

**UEE PA6 – IFMAT et MASTER IMCE**

**UNITE D'ENSEIGNEMENT  
AERO-HYDRODYNAMIQUE INTERNE DES MACHINES**

**TOME I**

**CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DES FLUIDES**

**Septembre 2008**

**R. REY – Professeur**

Chapitre A

**PROPRIETES CINEMATIKES DES  
ECOULEMENTS**

**I) GENERALITES**

**p. 5**

1.1. Définitions - Propriétés des lignes de courant

1.2. Accélération locale - Rotationnel

1.3. Equation de continuité

1.4. Ecoulement irrotationnel - Fonction potentiel

1.5. Circulation du vecteur vitesse

**II) ECOULEMENTS BIDIMENSIONNELS**

**p. 15**

2.1. Ecoulements plans en coordonnées cartésiennes

2.2. Ecoulements bidimensionnels de révolution

2.3. Méthode simplifiée de tracé des lignes de courant

2.4. Solutions analytiques de l'équation de Laplace

2.5. Application de la superposition des écoulements

## - PROPRIETES CINEMATIKUES DES ECOULEMENTS -

La mécanique des fluides constitue depuis plus d'un siècle le champ d'application des plus grands noms des mathématiques et de la physique, parmi lesquels :

- . au 18<sup>ème</sup> siècle : d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace ;
- . au 19<sup>ème</sup> siècle : Cauchy, Dirichlet, Poiseuille, Rankine, Reynolds, Riemann, Stokes ;
- . et au siècle dernier : Blasius, Joukowski, Karman et Prandtl.

Tour à tour domaine d'excellence du fluide parfait, du fluide réel puis de la physique expérimentale, la mécanique des fluides subit aujourd'hui une grande mutation par l'introduction des méthodes numériques qui permettent, grâce au développement des moyens de calcul, de traiter conjointement les équations cinématiques, dynamiques et énergétiques.

Seuls quelques aspects intrinsèques tels que les couches limites, la turbulence, les écoulements secondaires, les régimes transitoires, limitent, à des degrés divers, la fiabilité des modélisations.

Malgré ces progrès très importants, la détermination des vitesses autour d'un obstacle, d'un profil portant, est toujours une question d'actualité.

Pour le concepteur, les problèmes posés demeurent inchangés et se formulent en termes identiques. Ils se ramènent pour la plupart à la résolution des deux problèmes types : le problème direct et le problème inverse.

### Problème direct :

Pour un profil ou une succession de profils donnés (grille d'aubes annulaire, cylindrique, etc...) immergé dans un écoulement défini en amont de l'obstacle, quelle est la distribution de vitesses au voisinage des parois ?

L'application a posteriori des équations dynamiques permettra d'évaluer les pressions locales puis les efforts mis en jeu.

C'est le problème qui se traite dans le cadre de l'évaluation des performances d'une machine existante.

Problème inverse :

C'est la démarche adoptée lors du projet d'une nouvelle machine. Pour une cinématique d'écoulement définie à l'avance, à savoir : distribution de vitesse à l'amont et à l'aval du profil ou de la grille, champ de vitesses imposé à la paroi, quelle est la géométrie du ou des profils correspondants ?

La définition a priori du champ de vitesses est souvent inspirée des considérations suivantes :

- obtention des performances attendues,
- maîtrise spatiale des échanges énergétiques en vue de l'optimisation du rendement, du bruit, de la tenue à la cavitation, de la stabilité en débit partiel.

Pour simplifier le traitement du problème direct et du problème inverse, l'écoulement principal est souvent ramené à une juxtaposition d'écoulements bidimensionnels élémentaires compatibles entre eux. La résolution de l'aspect purement cinématique n'est rendue possible que par l'introduction d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices :

- fluide non visqueux,
- écoulement irrotationnel.

## I) GENERALITES

### 1.1. Définitions - Propriétés des lignes de courant

Dans le domaine des turbomachines, la plupart des écoulements et leurs équations associées, sont traités en coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou en coordonnées cylindriques (r, θ, z).

repères	x	ou	r	direction radiale
	y		θ	direction tangentielle
	z		z	direction axiale

Dans ces repères la vitesse  $\vec{C}$  en un point quelconque M aura pour composantes :

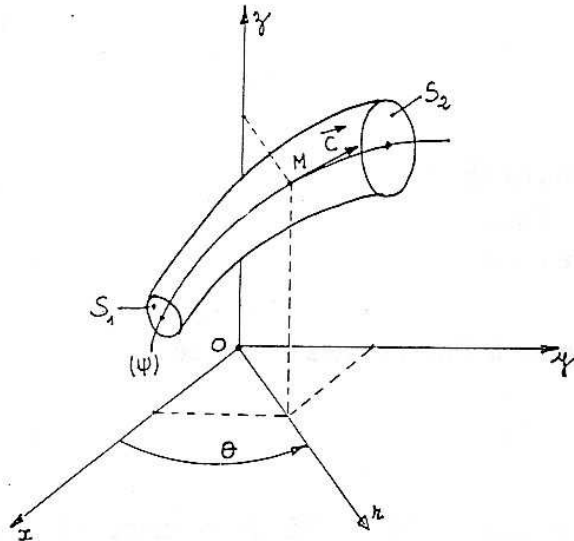
$$\vec{C} = \begin{cases} u = \frac{dx}{dt} \\ v = \frac{dy}{dt} \\ w = \frac{dz}{dt} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \vec{C} = \begin{cases} C_r = \frac{dr}{dt} \\ C_\theta \text{ ou } C_u = \frac{r d\theta}{dt} \\ C_a = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

Relations entre coordonnées :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (1)$$

et

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{tg } \theta = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \quad (2)$$



**Figure 1** : Définition du tube de courant

La description lagrangienne de l'écoulement consiste à observer, en fonction du temps, le déplacement d'une particule donnée et identifiée ; son déplacement s'effectue sur une trajectoire. Inversement, la description eulérienne se place en un point de l'écoulement et observe les variations de la vitesse en fonction du temps (plusieurs particules se succèdent en ce même point).

Si l'on observe au même instant l'ensemble des points de l'écoulement pendant une durée assez courte (photographie) on peut définir les lignes de courant.

La courbe  $(\psi)$  est une ligne de courant si en tout point M appartenant à  $(\psi)$ , la vitesse  $\vec{C}$  est tangente à  $(\psi)$ . On observera donc, pour l'ensemble des points :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (3)$$

Les composantes du vecteur vitesse dépendent à la fois des coordonnées du point M et du temps.

Lorsque l'écoulement est permanent (ou stationnaire), les composantes du vecteur vitesse sont indépendantes du temps. Les trajectoires et les lignes de courant sont alors confondues. La majorité des écoulements industriels sont instationnaires : l'écoulement dans une machine, l'écoulement turbulent en conduite. Cependant, il est souvent aisé et suffisamment précis de considérer qu'ils sont permanents en moyenne.

L'enveloppe des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé forme un tube de courant. Aucun débit ne traversant l'enveloppe du tube de courant, le débit massique Q circulant dans le tube reste constant, il est calculable par :

$$q_m = \iint_S \rho \vec{C} \cdot \vec{n} \, dS \quad (4)$$

avec :

- $dS$  : élément de surface
- $\vec{n}$  : vecteur unitaire normal à  $dS$
- $\rho$  : masse volumique du fluide

$$q_m = \iint_S \rho (u \, dy \, dz + v \, dx \, dz + w \, dx \, dy) \quad (5)$$

On définit également le débit volume comme le flux à travers la surface S.

$$q_v = \iint_S u \, dy \, dz + v \, dx \, dz + w \, dx \, dy \quad (6)$$

Dans une section normale à la ligne de courant (S1 et S2 de la figure 1), il est commode d'introduire la vitesse moyenne spatiale (ou vitesse débitante) :

$$q_m = \rho_1 S_1 \overline{C_1} = \rho_2 S_2 \overline{C_2} \quad (7)$$

$\rho_1$  et  $\rho_2$  étant les masses volumiques moyennes dans les sections  $S_1$  et  $S_2$  (calculables à partir de l'équation d'état du fluide).

## 1.2. Accélération locale - Rotationnel

Le vecteur accélération  $\vec{\Gamma}$  est calculable localement à partir de la vitesse  $\vec{C}$  :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d}{dt}(\vec{C}) \quad (8)$$

et ses trois composantes en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\Gamma} = \begin{vmatrix} \frac{d}{dt}(u) = \Gamma_x \\ \frac{d}{dt}(v) = \Gamma_y \\ \frac{d}{dt}(w) = \Gamma_z \end{vmatrix} \quad (9)$$

Sachant que dans le cas général  $u, v, w$  sont des fonctions de  $x, y, z$  et  $t$  on obtiendra la première composante à partir de la différentielle totale d'une fonction de quatre variables (annexe R8) :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}.dx + \frac{\partial u}{\partial y}.dy + \frac{\partial u}{\partial z}.dz + \frac{\partial u}{\partial t}.dt$$

$$\text{et} \quad \Gamma_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}.u + \frac{\partial u}{\partial y}.v + \frac{\partial u}{\partial z}.w + \frac{\partial u}{\partial t}$$

où l'on retrouve :  $u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt}$  les composantes de  $\vec{C}$ .

Soit finalement les composantes de  $\vec{\Gamma}$  :

$$\vec{\Gamma} = \begin{vmatrix} \Gamma_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ \Gamma_y = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \\ \Gamma_z = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \end{vmatrix} \quad (10)$$

Pour chaque composante, le dernier terme est l'accélération locale traduisant la non permanence de l'écoulement, les autres termes correspondent à l'accélération convective associée aux variations de vitesse dues aux variations de section de passage.

En coordonnées cylindriques, on peut calculer de la même façon les coordonnées  $\Gamma_r$ ,  $\Gamma_\theta$ ,  $\Gamma_z$  :

$$\vec{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_r = Cr \frac{\partial Cr}{\partial r} + Cu \frac{\partial Cr}{r\partial\theta} + Ca \frac{\partial Cr}{\partial z} - \frac{Cu^2}{r} + \frac{\partial Cr}{\partial t} \\ \Gamma_\theta = Cr \frac{\partial Cu}{\partial r} + Cu \frac{\partial Cu}{r\partial\theta} + Ca \frac{\partial Cu}{\partial z} + \frac{CrCu}{r} + \frac{\partial Cu}{\partial t} \\ \Gamma_z = Cr \frac{\partial Ca}{\partial r} + Cu \frac{\partial Ca}{r\partial\theta} + Ca \frac{\partial Ca}{\partial z} + \frac{\partial Ca}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (11)$$

On pourra retenir d'une façon générale la relation vectorielle (forme de Lamb) :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + \text{grad} \frac{C^2}{2} - \vec{C} \wedge \text{rot} \vec{C} \quad (12)$$

Nous verrons par la suite qu'il est important d'utiliser le vecteur rotationnel de la vitesse  $\vec{C}$ .

En coordonnées cartésiennes, celui-ci sera défini par :

$$\text{rot} \vec{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\Omega_x \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} = 2\Omega_y \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\Omega_z \end{pmatrix} \quad (13)$$

et en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot} \vec{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial Ca}{\partial \theta} - \frac{\partial Cu}{\partial z} = 2\Omega_r \\ \frac{\partial Cr}{\partial z} - \frac{\partial Ca}{\partial r} = 2\Omega_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r Cu) - \frac{1}{r} \frac{\partial Cr}{\partial \theta} = 2\Omega_z \end{pmatrix} \quad (14)$$

On rappellera enfin la définition du vecteur tourbillon  $\vec{\Omega}$  :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{C} \quad (15)$$

### 1.3. - Equation de continuité

Cette équation exprime la conservation de la masse contenue dans un volume élémentaire  $dV$  (Lagrange) ou encore pour un élément fixe (Euler), que la diminution de masse contenue dans le volume  $dV$  est égale à la masse ayant traversé la surface extérieure de l'élément (débit sortant) :

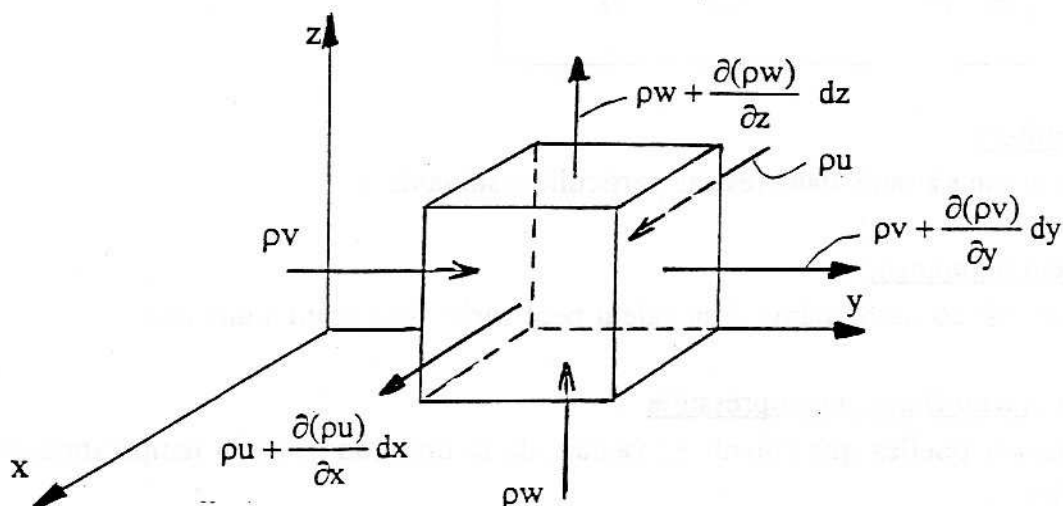
En utilisant cette seconde configuration, on aura (figure 2) :

Masse totale entrant dans un parallélépipède ayant pour côtés  $dx, dy, dz$  :

$$\rho [u \cdot dy \cdot dz + v \cdot dx \cdot dz + w \cdot dx \cdot dy] dt$$

Masse totale sortant au même instant :

$$\left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy \cdot dz \cdot dt + \left[ \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right] dx \cdot dz \cdot dt + \left[ \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \right] dx \cdot dy \cdot dt$$



**Figure 2** : Flux à la surface de l'élément fluide

La masse sortante est donc égale à :

$$dm = \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] . dx dy dz dt$$

La diminution de masse à l'intérieur de l'élément pendant la même durée dt:

$$dm = - \frac{\partial \rho}{\partial t} . dt . dx dy dz$$

En égalant les deux valeurs de dm on obtient l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

Ou encore sous forme plus compacte (annexe A4):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{C}) = 0 \quad (17)$$

En coordonnées cylindriques, l'équation de continuité s'écrira :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho C_r) + \frac{\partial(\rho C_\theta)}{r \partial \theta} + \frac{\partial(\rho C_z)}{\partial z} = \quad (18)$$

### Cas particuliers :

Le premier terme s'annule dans les cas particuliers suivants:

- Ecoulement permanent:

$\rho$  en un point est constant même si sa valeur peut varier d'un point à un autre.

- Ecoulement d'un fluide incompressible:

$\rho$  reste constant quelles que soient les valeurs de la pression et de la température au sein du fluide.

Dans ce cas, la relation (17) se ramène à :

$$\operatorname{div} \vec{C} = 0 \quad (19)$$

$$\text{ou} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r C_r] + \frac{\partial(C_u)}{r \partial \theta} + \frac{\partial(C_a)}{\partial z} = 0 \quad (20)$$

**N.B.** :

*Quelle que soit la forme géométrique du volume V, l'expression de l'équation de continuité est accessible en utilisant le théorème de Green de la divergence permettant de remplacer la relation (4) par une intégrale de volume (annexe R7).*

#### **1.4. Ecoulement irrotationnel - Fonction potentiel**

"L'écoulement est à potentiel des vitesses" ou encore le "champ des vitesses dérive d'un potentiel" est la terminologie employée dans le cas où la relation vectorielle suivante est vérifiée :

$$\vec{C} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi \quad (21)$$

avec  $\phi$  fonction potentiel dépendant des coordonnées au même titre que les composantes du vecteur vitesse  $\vec{C}$ .

On l'écrit également (annexe R3), en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (22)$$

et en coordonnées cylindriques :

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} C_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ C_u = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \\ C_a = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (23)$$

**Propriétés de la fonction potentiel  $\phi$  :**

L'écoulement à potentiel des vitesses présente la propriété remarquable de vérifier la relation vectorielle :

$$\vec{\text{rot}} \vec{C} = \vec{0} \quad (24)$$

En remplaçant dans le système (13) les termes u, v et w par leurs valeurs issues de (22), on obtiendra :

$$\vec{\text{rot}} \vec{C} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \end{vmatrix}$$

Les trois composantes du vecteur  $\vec{\text{rot}} \vec{C}$  sont nulles, on qualifie alors l'écoulement d'irrotationnel.

**Propriétés de l'écoulement irrotationnel :**

D'après la relation (15), l'écoulement irrotationnel n'est le siège d'aucun vecteur tourbillon. Il ne peut donc être utilisé que pour la description des écoulements en fluide parfait ou par extension des écoulements en fluide réel exempts de décollement. Cette propriété n'est pas applicable aux écoulements réels présentant :

- une forte incidence sur des obstacles minces (désadaptation)
- de grandes variations de direction ou de section de passage

On démontre qu'en tout point d'un écoulement irrotationnel, l'énergie totale est constante. Lorsqu'il existe un échange d'énergie entre les particules fluides et le milieu environnant, l'écoulement est rotationnel et l'énergie totale des particules varie d'une ligne de courant à l'autre. C'est le cas de l'écoulement relatif dans les machines tournantes.

Réciproquement, l'écoulement irrotationnel est vérifié par l'introduction de la fonction potentiel  $\phi$  sous la forme d'une différentielle totale :

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = u dx + v dy + w dz = \vec{C} \cdot d\vec{s} \quad (25)$$

ou en coordonnées cylindriques :

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} dr + \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} r d\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz = C_r dr + C_\theta r d\theta + C_z dz = \vec{C} \cdot \vec{ds} \quad (26)$$

Les relations (25) et (26) seront développées plus loin.

Si l'on utilise la même fonction définie en (22) dans l'équation de continuité (16) en fluide incompressible ( $\rho = \text{cte}$ ), on obtiendra l'équation de Laplace :

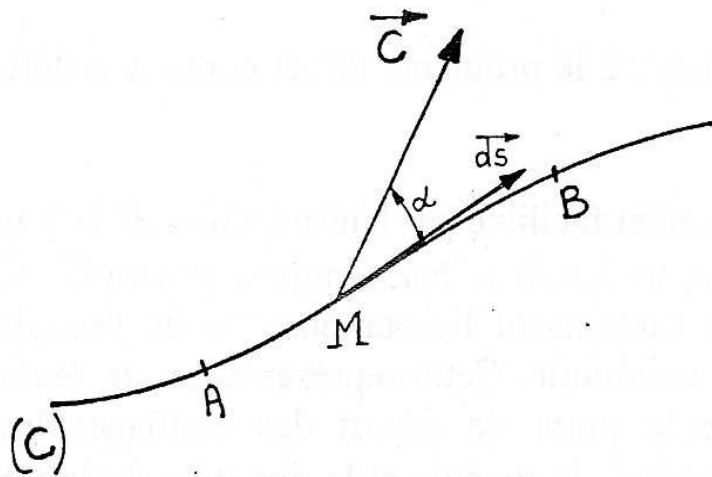
$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (27)$$

### 1.5. Circulation du vecteur vitesse

Par définition, la circulation  $\Gamma$  du vecteur vitesse  $\vec{C}$  de A et B le long de la courbe (C) est donnée par :

$$\Gamma = \int_{\overline{AB}} \vec{C} \cdot \vec{ds} = \int_{\overline{AB}} C \cdot \cos\alpha \cdot ds \quad (28)$$

avec  $\vec{ds}$  vecteur tangent en M à (C) :  $\vec{ds} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix}$



**Figure 3 : Définitions**

Le produit scalaire entre les deux vecteurs permet de calculer  $\Gamma$  (annexe R2) :

$$\Gamma = \int_{\overline{AB}} (u dx + v dy + w dz) \quad (29)$$

Dans le cas général,  $\Gamma$  dépend des points A et B et du chemin suivi pour aller de A à B. Par contre, dans le cas où le terme  $(u dx + v dy + w dz)$  est une différentielle totale exacte, la circulation ne dépend que des bornes A et B. La fonction  $\phi$  satisfait à cette condition (annexe R8) :

$$\Gamma = \int_{\overline{AB}} d\phi = \phi_B - \phi_A \quad (30)$$

Ainsi, la circulation est constante de A à B si l'écoulement est irrotationnel (ou identiquement à potentiel de vitesses).

L'équation (30) montre que la circulation est nulle le long d'une courbe fermée.

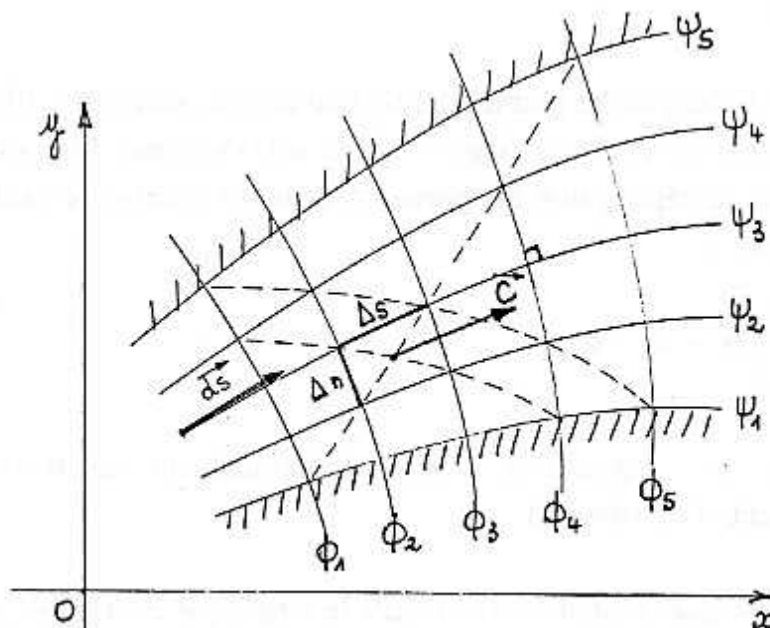
## II) ÉCOULEMENTS BIDIMENSIONNELS -

Une grande partie des écoulements réels, qu'ils soient internes ou externes, présentent un caractère tridimensionnel. Au moins au stade de l'avant-projet, un certain nombre de méthodes, dont la transformation conforme, permettent de décomposer ces écoulements complexes en une juxtaposition d'écoulements bidimensionnels compatibles entre eux.

Toujours en fluide parfait, nous introduisons ici les propriétés de l'écoulement bidimensionnel, propriétés particulièrement intéressantes dans le cadre de l'étude du problème direct :

Pour une géométrie donnée le problème direct consiste à définir le champ de vitesses correspondant. Cette étude est grandement facilitée par l'introduction de la fonction potentiel  $\phi$  et de la fonction de courant  $\psi$ , toutes deux harmoniques et satisfaisant l'équation de Laplace. La fonction potentiel satisfaisant l'irrotationnalité de l'écoulement et la fonction de courant l'équation de continuité. Cette représentation de l'écoulement en coordonnées "naturelles" constitue le point de départ des maillages les plus sophistiqués. Le maillage  $(\phi, \psi)$  étant réalisé, le module et la direction de la vitesse sont accessibles en tout point de l'écoulement.

On introduira ensuite les fonctions analytiques, à l'origine de la méthode des singularités. Deux méthodes qui, grâce au développement des moyens de calcul, bénéficient aujourd'hui d'un regain d'intérêt. On préférera l'une à l'autre des méthodes en fonction du type de problème à traiter.



**Figure 4 :** Représentation des lignes de courant et des équipotentielles.

## 2.1. Écoulements plans en coordonnées cartésiennes

On se place dans l'hypothèse d'un écoulement plan en fluide incompressible ( $\rho = \text{cte}$ ) pour lequel la vitesse en un point reste constante en module et direction en fonction de l'épaisseur.

Les lignes de courant sont définies par l'équation (3) :

$$\boxed{\frac{u}{dx} = \frac{v}{dy}} \quad (40)$$

u et v étant les composantes du vecteur vitesse  $\vec{C}$  :

$$\vec{C} = \frac{d\vec{S}}{dt} \quad (41)$$

où  $d\vec{S}$  est l'abscisse curviligne sur la ligne de courant :

$$d\vec{S} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \end{vmatrix}$$

D'où les composantes du vecteur vitesse  $\vec{C}$  colinéaire à  $d\vec{S}$  :

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} u = \frac{dx}{dt} \\ v = \frac{dy}{dt} \end{vmatrix}$$

Dans ces conditions, l'équation de continuité (16) se réduit à l'expression :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0} \quad (42)$$

On suppose l'écoulement irrotationnel et on introduit la fonction potentiel  $\phi$  à partir des composantes de la vitesse  $\vec{C}$  :

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (43)$$

On peut calculer  $\phi$  à partir de sa différentielle totale (annexe A8) :

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy = u dx + v dy \quad (44)$$

$$d\phi = C \cdot ds \quad (45)$$

ou encore : 
$$C = \frac{\Delta\phi}{\Delta s} \quad (46)$$

En tout point, le module de la vitesse est donné par le taux de variation de la fonction  $\phi$  en fonction de l'abscisse curviligne (figure 4).

### Fonction de courant $\Psi$ :

Au même titre que la fonction potentiel, on introduit la fonction de courant  $\psi$  à partir des composantes de la vitesse. Pour cela on posera :

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (47)$$

La propriété essentielle de cette fonction est de vérifier l'équation de continuité. En effet, en remplaçant  $u$  et  $v$  par leurs valeurs dans l'équation (42), on obtient :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x \cdot \partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y \cdot \partial x} = 0$$

Dans le cas d'un écoulement irrotationnel, la troisième composante de (13) donnera :

$$\text{rot } \vec{C} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \quad (48)$$

$\psi$  est donc une fonction harmonique.

Si l'on reprend l'équation (40) définissant les lignes de courant :

$$u dy - v dx = 0$$

et si on introduit  $\psi$  par l'intermédiaire des composantes  $u$  et  $v$  (47), on aura :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0 \quad (49)$$

On reconnaîtra pour le premier terme la différentielle totale de la fonction  $\psi$  :

$$d\psi = 0 \quad (50)$$

Montrant que sur une ligne de courant la fonction  $\psi$  est constante.

### Propriétés importantes :

L'écoulement irrotationnel est décrit par la fonction  $\phi$  et les lignes de courant par la fonction  $\psi$ .

$\phi$  et  $\psi$  sont des fonctions des coordonnées du point considéré et sont, dans tout l'espace fluide, orthogonales (figure 4).

On remarquera que les frontières de l'écoulement (parois) sont également des lignes de courant.

On démontre enfin que le module de la vitesse  $\vec{C}$  est égal en tout point à la variation transversale de la fonction  $\psi$  :

$$C = \frac{\Delta \psi}{\Delta n} \quad (51)$$

En reprenant les relations (46) et (51) on observe qu'en tout point du maillage, on aura :

$$C = \frac{\Delta \phi}{\Delta S} = \frac{\Delta \psi}{\Delta n} \quad (52)$$

Dans les applications on admettra que  $C$  est la vitesse au centre de la maille (intersection des pseudo diagonales).

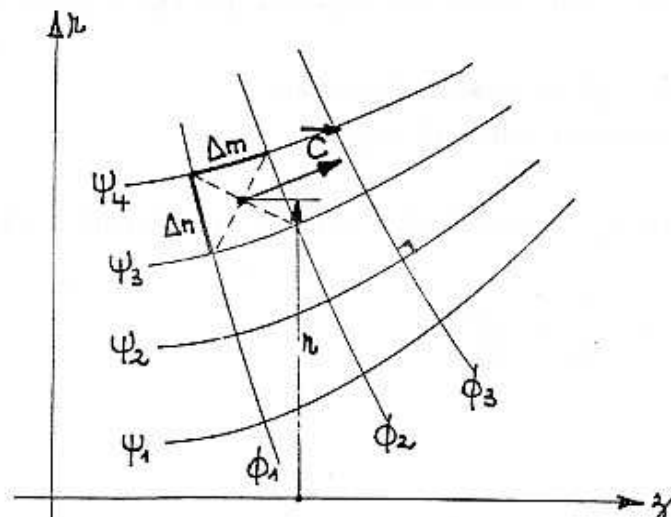
**Condition de glissement à la paroi :**

Certaines lignes de courant ( $\psi_1$  et  $\psi_5$  de la figure 4) forment les frontières de l'écoulement. Pour ces lignes de courant particulières d'équation  $S(x, y) = 0$ , la condition de glissement sera observée lorsque le produit scalaire entre la vitesse  $\vec{C}$  et la normale à la paroi est nul :

$$u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \tag{53}$$

**2.2. Écoulements bidimensionnels de révolution**

L'étude de l'écoulement de révolution peut se ramener à celle des écoulements plans. Il est représenté dans le système de coordonnées  $(r, z)$  où l'axe  $z$  est confondu avec l'axe de symétrie.



**Figure 5 :** *Écoulement à symétrie de révolution*

Les lignes de courant sont des surfaces de révolution, dans le plan d'étude désigné par plan méridien, elles prennent les cotes  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ . En un point M quelconque du plan, la vitesse méridienne  $\vec{C}$  est tangente à la ligne de courant et a pour composantes :

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} C_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ C_a = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{54}$$

La vitesse  $\vec{C}$  dérive du potentiel  $\phi$  satisfaisant la propriété d'irrotationnalité.

Comme pour l'écoulement plan, on introduit la fonction de courant  $\psi$  satisfaisant l'équation de continuité (relation 18) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r C_r] + \frac{\partial C_z}{\partial z} = 0 \quad (55)$$

Cette équation est satisfaite en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ C_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{array} \right. \quad (56)$$

Les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  ont les mêmes propriétés que celles définies au chapitre II.1 précédent :

- elles forment deux réseaux orthogonaux
- elles satisfont à l'équation de Laplace.

En un point du maillage, le module de la vitesse  $C$  est calculable à partir des relations :

$$C = \frac{\Delta \phi}{\Delta m} = \frac{\Delta \psi}{2\pi r \cdot \Delta n} \quad (57)$$

### 2.3. Méthode simplifiée de tracé des lignes de courant et des équipotentiels

Le tracé des lignes de courant et des équipotentiels s'inspire de la méthode graphique de PRASIL. Il s'obtient par approximations successives respectant à la fois la propriété d'orthogonalité et l'équation (52).

Seul un maillage très raffiné permet de connaître en détail le champ des vitesses mais la méthode proposée ici donne une première approximation relativement précise. On se place dans le cadre du problème direct et l'on se propose de définir le champ de vitesses dans le canal formé entre deux aubages de distributeur. L'écoulement à l'infini amont est supposé uniforme en grandeur et direction.

Dans les conditions d'adaptation, celui-ci aura la même orientation que la direction d'entrée d'aubage ; dans le cas présent, il s'agira d'un écoulement axial.

En supposant également que la direction de l'écoulement en sortie est la même que celle de la ligne moyenne, on peut définir sensiblement l'enveloppe de l'écoulement. Elle est formée, partiellement, dans l'espace interaubages, des lignes intrados et extrados du profil (figure 6a).

Condition de périodicité :

La condition de périodicité implique l'unicité du vecteur vitesse en tout point de l'écoulement. Suivant ce principe, à la même abscisse  $x$ , les lignes  $i$  et  $e$  de la figure 6a doivent présenter une vitesse égale : par exemple, le point 20 de la ligne  $i$  et le point 28 de la ligne  $e$ . Le respect de cette condition permet de définir la valeur exacte de la vitesse de sortie par retouches successives de la direction issue du bord de fuite.

**A) Maillage simplifié d'un espace inter-aubages**

On trace avec un pas sensiblement uniforme l'ensemble des cercles ayant pour enveloppes les deux frontières de l'écoulement. Ces lignes enveloppes ( $\psi_i$  et  $\psi_e$ ) sont considérées comme des lignes de courant au même titre que le lieu des centres de cercles que l'on désignera par ligne moyenne ( $\psi_0$ ) ou ligne de partage.

Si l'on joint par une même ligne les trois points qui constituent les points de tangence à  $\psi_i$  et  $\psi_e$  et le centre d'un même cercle, on obtient l'allure des équipotentiels. On veillera au moment de ce tracé, à l'orthogonalité avec les lignes de courant.

Champ de vitesses :

On se place sur la ligne moyenne et l'on suppose que la vitesse moyenne (ou vitesse débitante) est obtenue sur cette ligne. On calculera alors successivement :

\* la vitesse moyenne : 
$$\bar{C}_j = \frac{qv}{h \cdot b_j} \quad (60)$$

avec  $h$  : épaisseur de la veine fluide  
 $b_j$  : diamètre du cercle correspondant à l'équipotentielle  $j$  (de 1 à 28)

\* la cote des équipotentiels par : 
$$\phi_{j+1} = \phi_j + \Delta\phi_j \quad (61)$$

avec, d'après (52) : 
$$\Delta\phi_j = \bar{C}_j \cdot \Delta s_j \quad (62)$$

$\Delta s_j$  représente la distance curviligne séparant, sur  $\psi_0$  deux équipotentielles  $j$  et  $j+1$ .

\* les vitesses  $C_i$  et  $C_e$  sur les lignes de courant  $\psi_i$  et  $\psi_e$  : on réutilise pour cela la relation (52) :

$$C_{i,j} = \frac{\Delta\phi_j}{\Delta s_{i,j}} \quad (63)$$

$$C_{e,j} = \frac{\Delta\phi_j}{\Delta s_{e,j}} \quad (64)$$

$\Delta s_{i,j}$  = distance sur  $\psi_i$  séparant deux équipotentielles.

$\Delta s_{e,j}$  = distance sur  $\psi_e$  séparant les mêmes équipotentielles.

On remarquera que sur l'extrados du profil (ligne  $\psi_e$ ) les équipotentielles sont plus serrées que sur l'intrados. On obtiendra ainsi des vitesses importantes sur  $\psi_e$  au voisinage des points  $j = 9, 10, 11, 12$  et inversement sur  $\psi_i$ , de faibles vitesses pour les mêmes valeurs de  $j$ .

Nous verrons plus loin qu'à ce champ de vitesses est associé un champ de pression d'où prendra naissance l'effort aérodynamique global  $\vec{F}$ , représentant l'action du fluide sur l'aubage.

### Application :

Les différentes grandeurs sont calculées à partir des relations (60) à (64). Les valeurs de  $\Delta s$  sont mesurées directement sur la figure 6a à une échelle convenable. La figure 6a donne également l'évolution de  $C_e$  et  $C_i$  le long de l'abscisse curviligne de la ligne moyenne ainsi qu'une comparaison avec les résultats obtenus par Bonataki par une méthode numérique inspirée de la transformation conforme (référence 201). La figure 6b montre une comparaison des isovitesses obtenues par les deux méthodes : en haut la méthode graphique simplifiée, en bas la méthode numérique.

On trouve enfin en figure 6c le maillage simplifié issu de la méthode de l'hodographe décrite au chapitre G. Ce maillage, réalisé en  $\phi - \psi$ , donne accès directement au champ de vitesses.

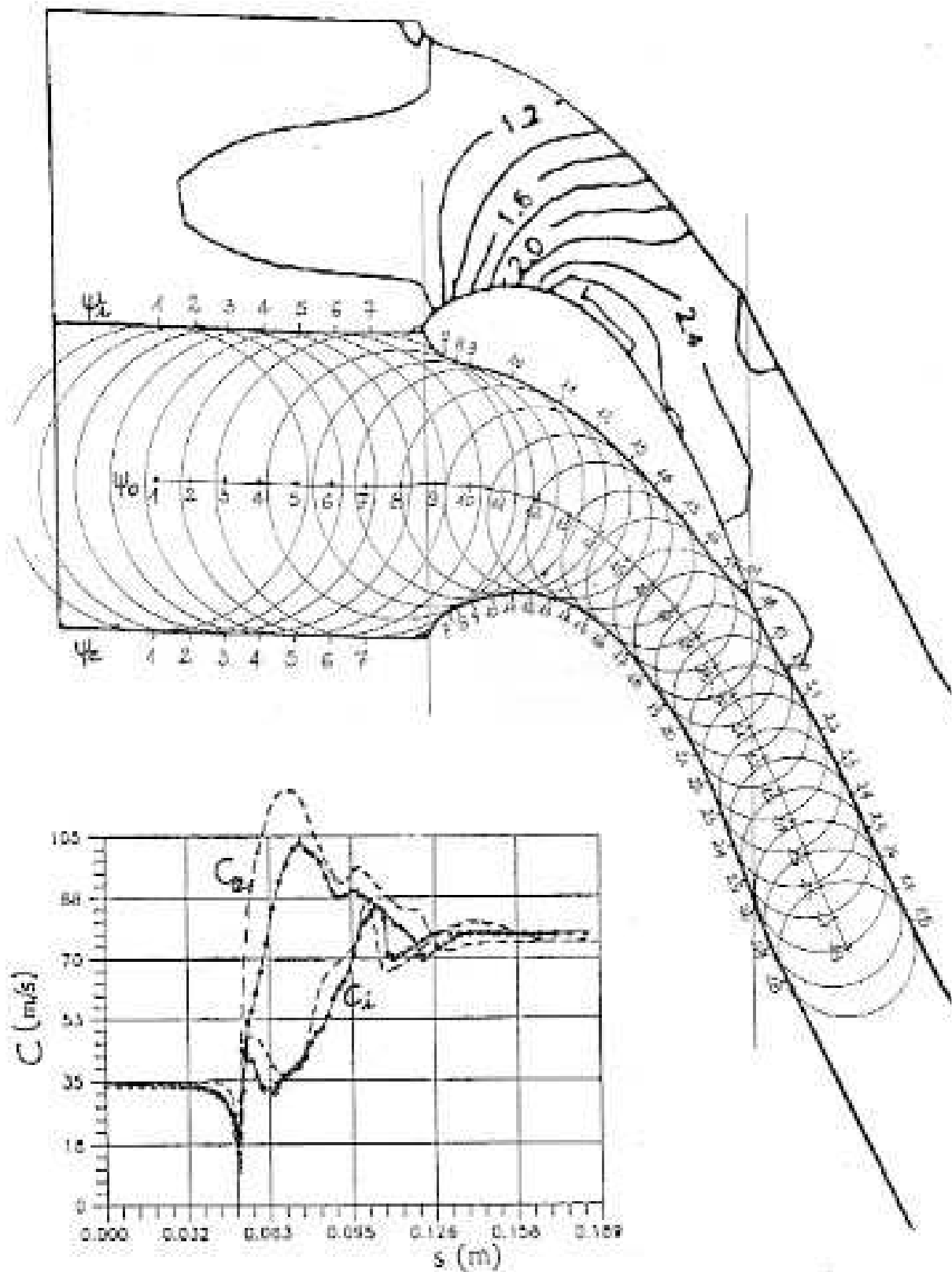
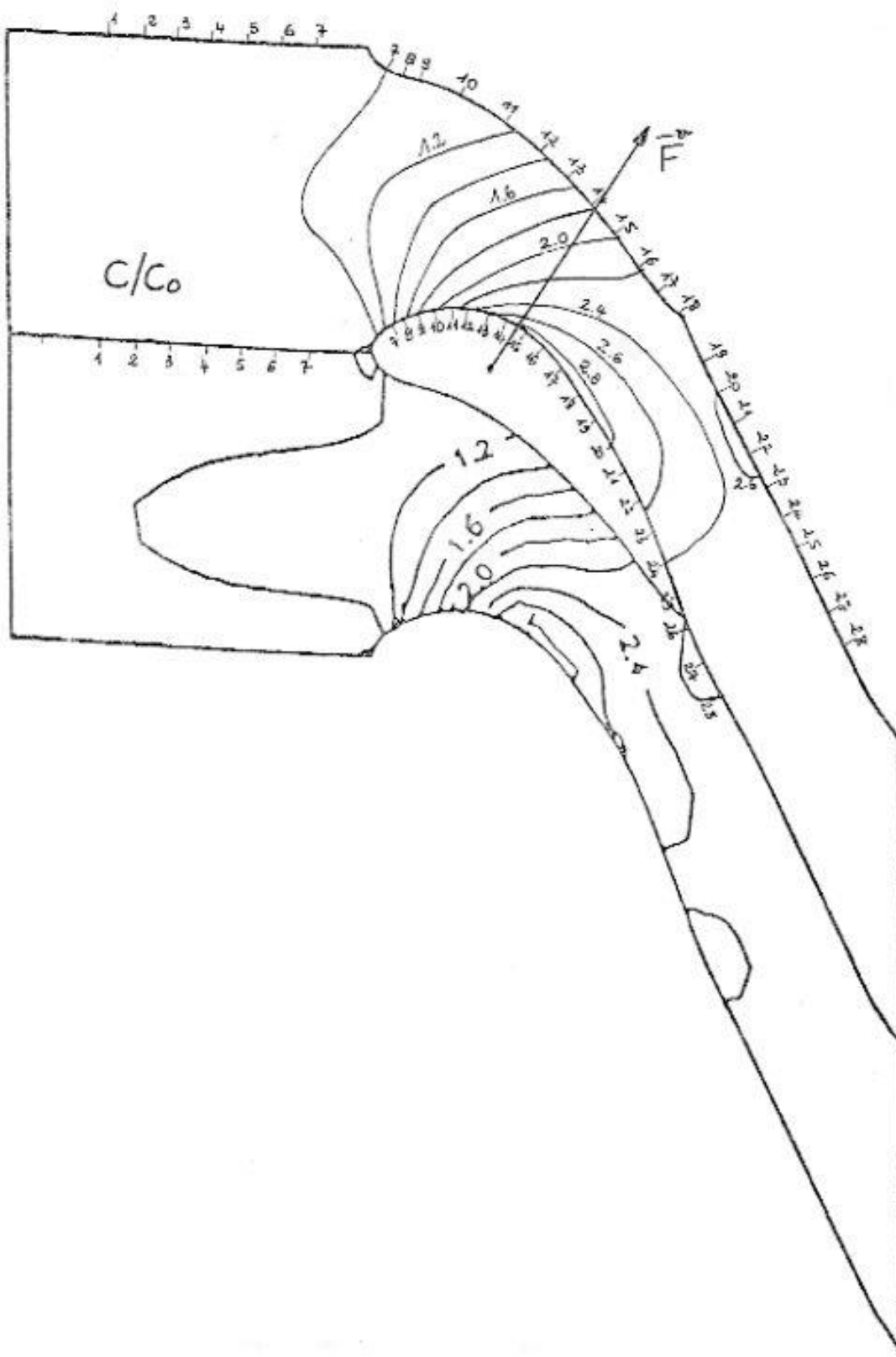
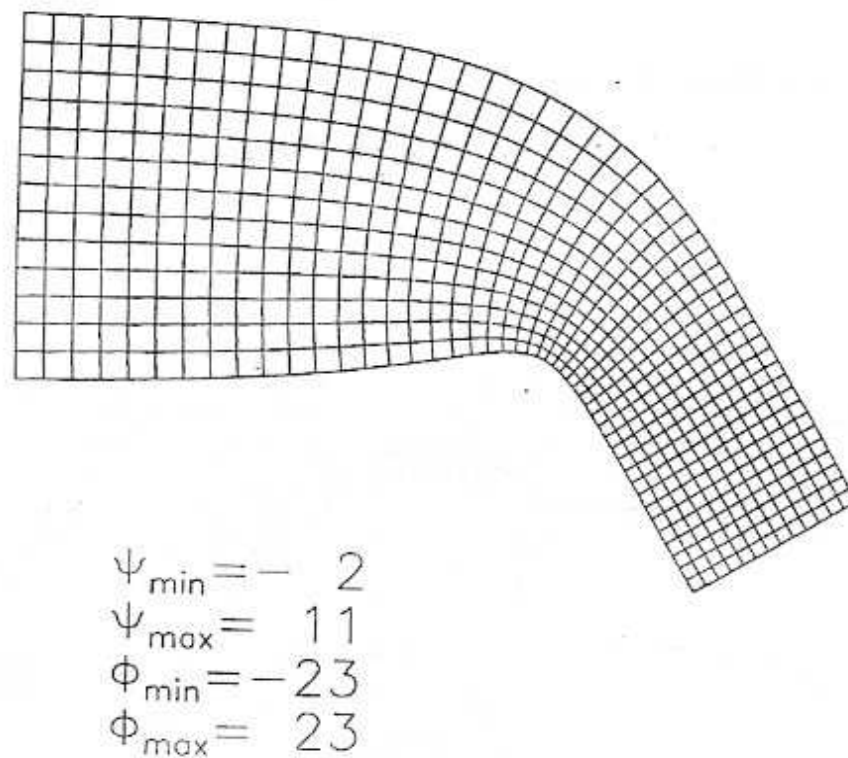


Figure 6a : Etude de l'espace inter-aubages d'un distributeur de turbine



**Figure 6b** : Comparaison des isovitesses



**Figure 6c :** Maillage interaubaes issu de la méthode de l'hodographe.

### **B) Maillage simplifié d'une section méridienne**

On se propose de définir les équipotentiels puis la distribution de vitesses dans la section méridienne correspondant à une pompe centrifuge. S'agissant d'un écoulement bidimensionnel, la section est dépourvue d'aubages à l'origine des composantes giratoires  $C_u$  normales au plan de l'étude.

Pour cet écoulement à symétrie de révolution, la méthode utilisée est identique à celle décrite en A mais la relation générique est ici la relation (57) au lieu de la relation (52).

La figure 7a ci-dessous donne le maillage  $(\phi-\psi)$  de la section étudiée. Obtenu par itérations successives, il a fait apparaître les équipotentiels et les lignes de courant satisfaisant à l'équation (57), il peut être aisément automatisé (réf. 202) pour donner la vitesse de l'écoulement en tout point.

La figure 7b présente le maillage simplifié. Il permet de calculer les vitesses de l'écoulement à la ceinture et au plafond (frontière extérieure et intérieure de la section méridienne).

A titre de comparaison, la figure 7c montre l'évolution du rapport de vitesses  $C_c/C_p$  ( $C_c$  et  $C_p$  étant définies sur la même équipotentielle) en fonction de l'abscisse curviligne de la ligne moyenne. Ce rapport est défini à partir du maillage simplifié et du maillage complet.

Sur cette même figure 7c, on a porté quelques points issus de la modélisation de Flügel décrite dans l'ouvrage de Karassik (réf. 104) et faisant appel aux rayons de courbure des enveloppes. On peut noter dans tous les cas une forte accélération à la ceinture dans la zone des points 18-19-20.

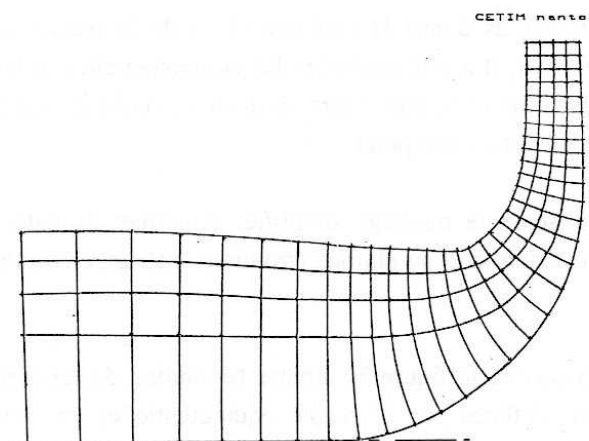
Remarque :

Contrairement à l'écoulement plan, le centre des cercles osculateurs d'un écoulement à symétrie de révolution n'est pas la ligne de courant moyenne. Dans ce cas précis, le respect de la relation (57) implique le tracé de deux séries de cercles respectant la propriété de division du débit en deux parties égales. La démarche constructive sera donc la suivante.

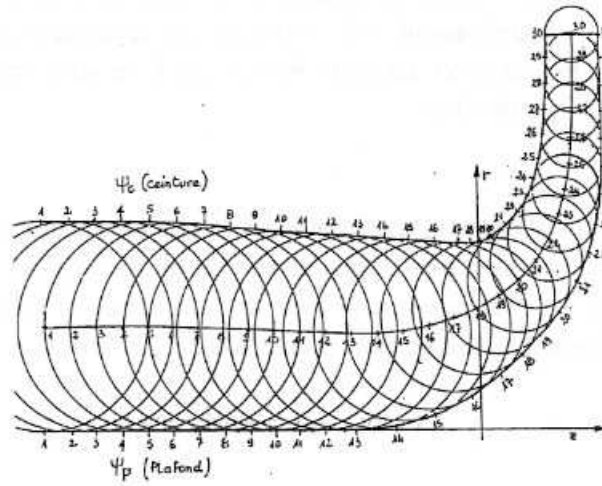
Suite à la première construction, on trace le segment joignant deux points homologues de la ceinture et du plafond. Deux cercles sont centrés sur ce segment, ils ont la propriété d'être à la fois tangents entre eux et aux enveloppes de la section d'écoulement. D'autre part, ils respectent la relation d'égalité de débit :

$$r_i \cdot b_i = r_e \cdot b_e$$

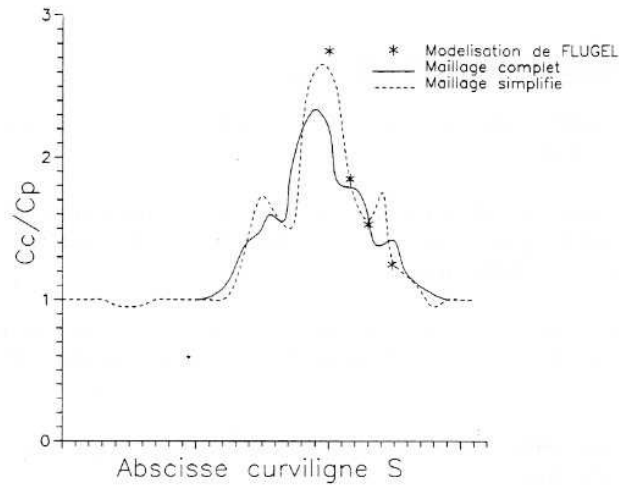
La ligne de courant moyenne est le lieu des tangentes communes aux différents couples de cercles (figure 7d). Cette seconde construction donne de meilleurs résultats dans les zones à forte courbure.



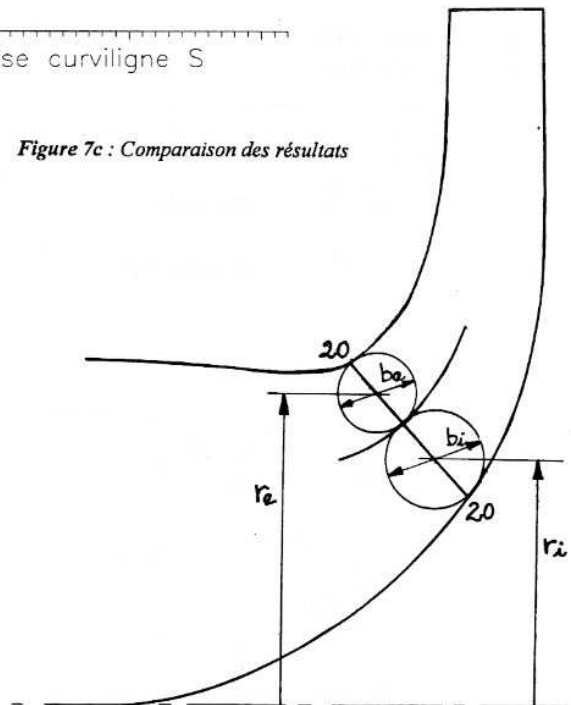
**Figure 7a : Equipotentielles et lignes de courant**



**Figure 7b** : Maillage simplifié



**Figure 7c** : Comparaison des résultats



**Figure 7d** : Construction de la ligne moyenne

## 2.4. - Solutions analytiques de l'équation de Laplace

L'étude des écoulements plans à potentiel des vitesses est facilitée par l'introduction des fonctions complexes.

On peut définir dans le plan d'écoulement un certain nombre de propriétés permettant d'accéder à la définition précise des champs de vitesses y compris dans les zones à forte courbure comme les bords d'attaque.

Dans ce paragraphe, on étudiera en détail quelques uns des écoulements élémentaires les plus souvent utilisés dans les méthodes de superpositions (méthode des singularités).

Au point M de coordonnées (x,y), représenté sur la figure 8, on fait correspondre une affiche complexe  $z$  telle que :

$$z = x + iy = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r \exp (i \theta) \quad (65)$$

avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  (module de  $z$ ) (66)

et  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$  (argument de  $z$ ) (67)

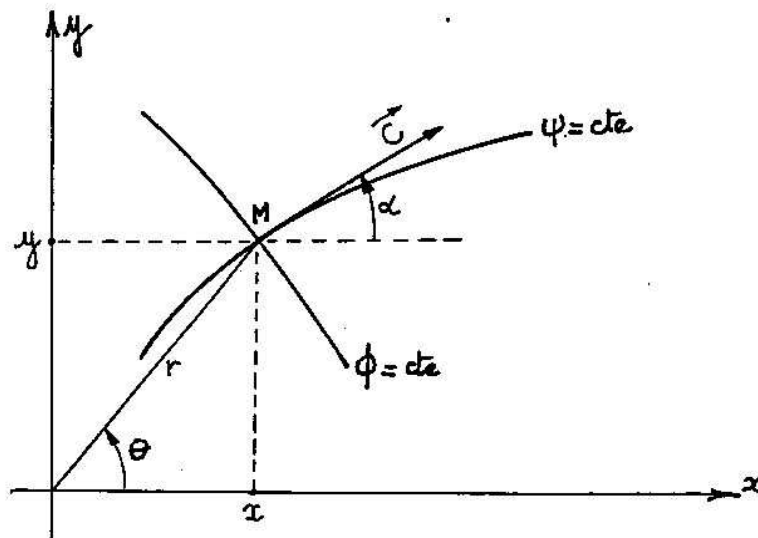


Figure 8 : Représentation dans le plan complexe.

De même, la vitesse  $\vec{C}$  au point M de composantes (u,v) peut être écrite sous forme vectorielle complexe :

$$C = u + i v = C (\cos \alpha + i \sin \alpha) = C \exp (i\alpha) \quad (68)$$

Nous avons vu également que la fonction de courant  $\psi$  et la fonction potentiel  $\phi$  peuvent être introduites à partir des composantes de la vitesse  $\vec{C}$ , l'une satisfaisant l'équation de continuité, l'autre l'irrotationnalité de l'écoulement (relation 47) :

$$\vec{C} = \begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad (69)$$

Dans le cadre de l'étude analytique, on introduit  $\psi$  et  $\phi$  par l'intermédiaire de la fonction potentiel complexe  $F(z)$  :

$$\boxed{F(z) = \phi + i \psi} \quad (70)$$

La fonction  $F(z)$  pour laquelle  $\phi$  et  $\psi$  satisfont aux relations (69) (conditions de CAUCHY-RIEMANN) est une fonction analytique dont les parties réelle et imaginaire satisfont à l'équation de LAPLACE.

**Propriétés complémentaires de la fonction potentiel complexe :**

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv \quad (71)$$

et 
$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{i \partial y} = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -iv + u \quad (72)$$

La fonction potentiel complexe possède une dérivée unique en un point M quelconque. On retiendra ensuite que la dérivée de F par rapport à z :

$$\boxed{\frac{dF}{dz} = u - iv} \quad (73)$$

est une vitesse complexe  $\vec{C}$  appelée vitesse conjuguée de la vitesse  $\vec{C}$ .

**A) Ecoulement uniforme :**

$$F(z) = C_0 \cdot z \quad (74)$$

Le potentiel complexe peut être développé à partir de la définition de l'affixe complexe (65) :

$$F(z) = C_0 \cdot z = C_0 (x + i y)$$

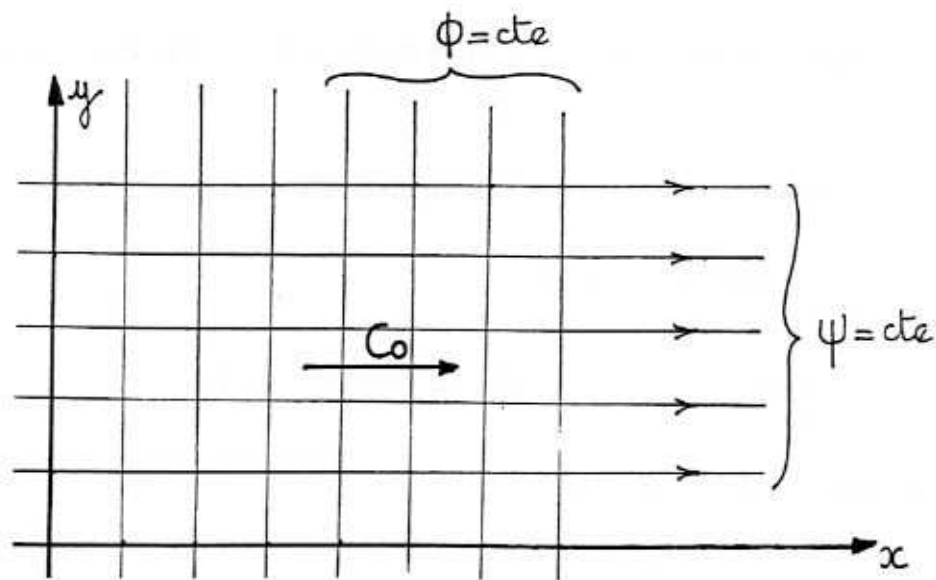
et identifié à la définition (70) :

$$F(z) = \phi + i \psi$$

Identification d'où l'on tire l'équation des équipotentielles et des lignes de courant :

$$\phi = C_0 \cdot x \quad \text{et} \quad \psi = C_0 \cdot y \quad (75)$$

Equations d'un réseau maillé que l'on peut tracer (figure 9).



**Figure 9 :** Ecoulement uniforme parallèle à x

La vitesse locale est calculable à partir de :

$$\vec{C} = \begin{cases} u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = C_0 \\ v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

La vitesse d'écoulement est donc uniforme en grandeur et direction en tout point du plan. Dans le cas où l'écoulement n'est pas parallèle à l'axe Ox mais forme un angle  $\alpha$  avec celui-ci, les équations seront les suivantes :

$$\begin{aligned} F(z) &= C_0 z \cdot \exp(-i\alpha) = C_0 r \exp(i\theta) \exp(-i\alpha) \\ F(z) &= C_0 r \exp[i(\theta - \alpha)] = C_0 r [\cos(\theta - \alpha) + i \sin(\theta - \alpha)] \\ F(z) &= C_0 [(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + i(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)] \\ \text{soit : } \phi &= C_0 [x \cos \alpha + y \sin \alpha] \\ \psi &= C_0 [-x \sin \alpha + y \cos \alpha] \end{aligned}$$

$$\vec{C} = \begin{cases} u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = C_0 \cos \alpha \\ v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = C_0 \sin \alpha \end{cases}$$

L'opérateur  $\exp(-i\alpha)$  correspond à une rotation d'angle  $\alpha$  dans le sens trigonométrique.

Remarque :

On accède plus rapidement à ce résultat en utilisant la relation (73) :

$$\begin{aligned} F(z) &= C_0 \cdot z \cdot \exp(-i\alpha) \\ \frac{dF}{dz} &= C_0 \cdot \exp(-i\alpha) = C_0 [\cos \alpha - i \sin \alpha] = u - iv \end{aligned}$$

D'où les composantes de la vitesse :

$$\vec{C} = \begin{cases} u = C_0 \cos \alpha \\ v = C_0 \sin \alpha \end{cases}$$

**B) Ecoulement de type source ou puits :**

$$F(z) = \pm C_0 \ln z \quad (76)$$

On traite ce cas plus facilement en coordonnées polaires (deuxième partie de la relation 65) :

Cas de la source (signe +)

$$F(z) = C_0 \ln [r \exp (i\theta)] = C_0 \ln r + i C_0 \theta \quad (77)$$

et  $F(z) = \phi + i \psi$

donnant après identification :

$$\phi = C_0 \ln r = C_0 \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (78)$$

$$\psi = C_0 \theta = C_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad (79)$$

Les équipotentiels sont des cercles centrés sur la source ( $r = \text{cte}$ ) et les lignes de courant des droites passant par l'origine ( $y/x = \text{cte}$ ).

Champ des vitesses :

La vitesse locale  $\vec{C}$  est également calculable à partir des relations de base (23) en coordonnées polaires :

$$\vec{C} \left| \begin{array}{l} C_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{C_0}{r} \\ C_u = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = 0 \end{array} \right. \quad (80)$$

En tout point de l'écoulement, la vitesse  $\vec{C}$  est radiale et varie en raison inverse du rayon.

Débit :

Le débit volume est calculé sur un rayon quelconque :

$$q_v = 2\pi r h \cdot C_r = 2\pi C_0 \quad (81)$$

avec  $h$  : épaisseur de l'écoulement prise égale à l'unité.

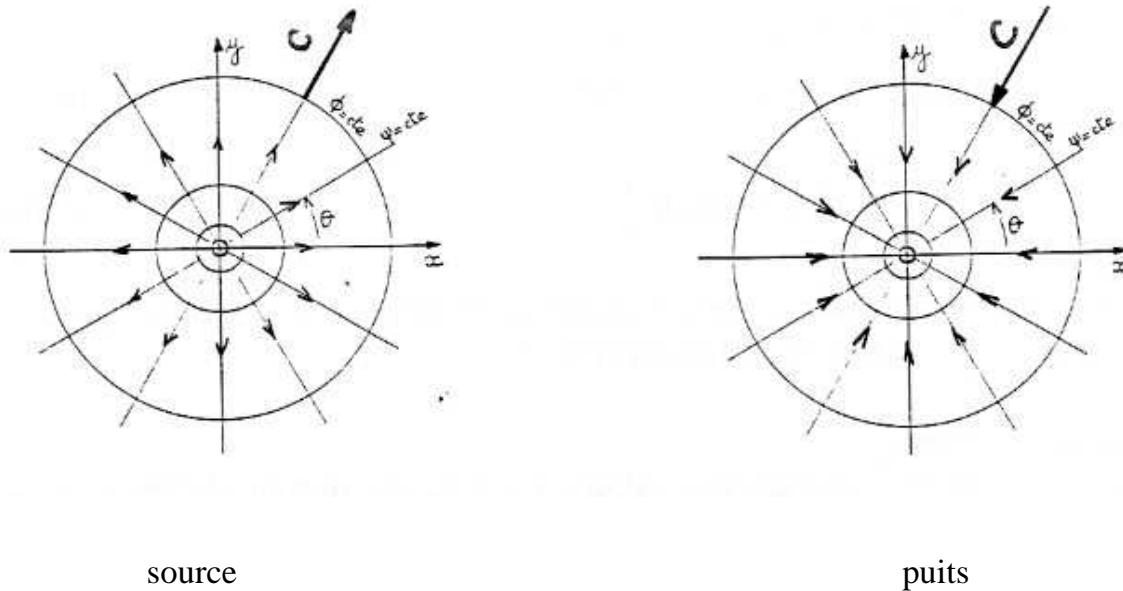
soit finalement :

$$C_o = \frac{q_v}{2\pi} \quad (82)$$

et

$$C = C_r = \frac{q_v}{2\pi r} \quad (83)$$

Dans le cas d'un puits, la vitesse d'écoulement est de sens opposé.



**Figure 10** : Source et puits de même débit.

Si la source ou le puits sont décentrés de l'affixe  $z_o$ , ils seront définis par la relation :

$$F(z) = \pm C_o \ln (z-z_o) \quad (84)$$

**C) Ecoulement tourbillonnaire**

$$F(z) = \pm i C_0 \ln z \quad (85)$$

Traitons le cas positif, en développant la fonction  $F(z)$  :

$$F(z) = i C_0 \ln [r \exp (i\theta)]$$

$$F(z) = i C_0 \ln r - C_0 \theta \quad (86)$$

en identifiant avec :

$$F(z) = \phi + i \psi$$

On obtient :

$$\phi = -C_0 \theta = -C_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad (87)$$

$$\psi = C_0 \ln r = C_0 \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (88)$$

Les lignes de courant sont cette fois des cercles concentriques tandis que les équipotentielles forment un faisceau de droites centré sur l'origine.

Vitesse locale :

$$\vec{C} \left\{ \begin{array}{l} C_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \\ C_u = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -\frac{C_0}{r} \end{array} \right. \quad (89)$$

La vitesse radiale est nulle, la vitesse circonférentielle est inversement proportionnelle à  $r$ . Il s'agit de l'écoulement tourbillonnaire centré en  $O$  et désigné aussi par vortex libre.

Le signe  $+$  de la relation (85) correspond à une rotation inverse du sens trigonométrique, le signe  $-$  de la même relation correspond au sens trigonométrique.

L'écoulement tourbillonnaire est caractérisé par la circulation du vecteur vitesse (relation 28) :

$$\Gamma = \int_{(\psi)} \vec{C} \cdot d\vec{S} \quad (90)$$

avec  $d\vec{S}$  abscisse curviligne le long du cercle de rayon  $r$  formant une ligne de courant :

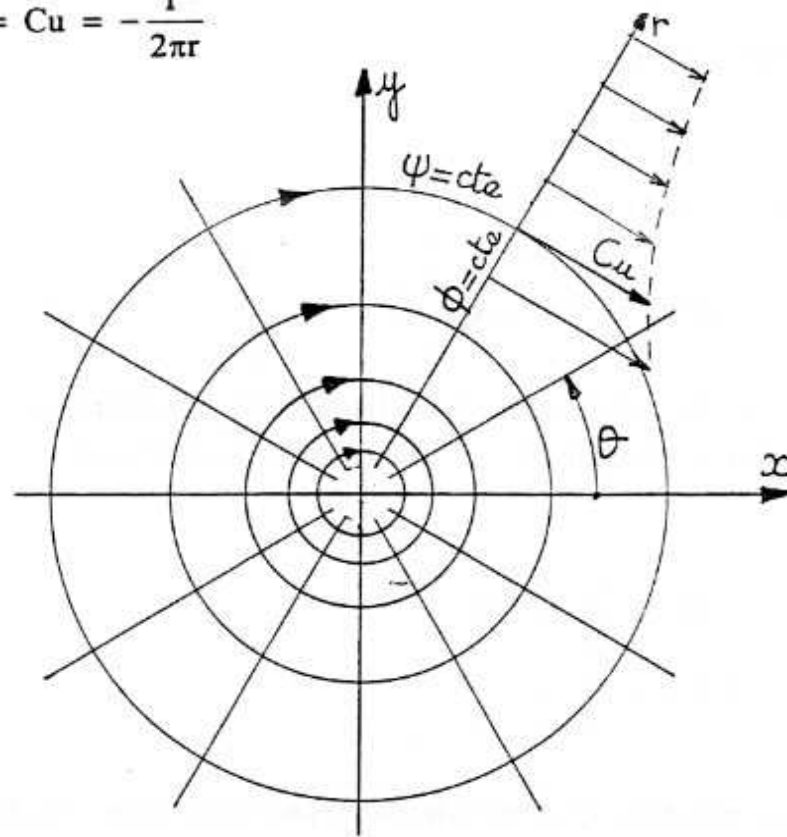
$$dS = -r \cdot d\theta$$

$$C = C_u = -\frac{C_0}{r}$$

$$\Gamma = \int_{(\psi)} \frac{C_0}{r} \cdot r \cdot d\theta = 2\pi C_0 \quad (91)$$

Quel que soit le cercle retenu, la circulation est une constante. En utilisant (89) et (91) on peut donner une autre expression à la vitesse C :

$$C = C_u = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$



**Figure 11 :** *Écoulement tourbillonnaire (ou vortex libre)*

**Remarque :**

Compte tenu de la relation (91), l'écoulement tourbillonnaire sera représenté par :

$$F(z) = i \cdot \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (93)$$

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} \phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi = +\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{array} \right. \quad (94)$$

$$\text{et : } C = C_u = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (96)$$

Pour un tourbillon, décentré par rapport au centre du repère de l'affixe  $z_0$ , on écrira :

$$F(z) = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln (z - z_0) \quad (97)$$

## 2.5. Application de la superposition d'écoulements élémentaires

Le principe de superposition des écoulements se traduit par l'addition des fonctions potentiel complexes et par conséquent par l'addition des fonctions de courant  $\psi$  et des fonctions potentiel  $\phi$ .

Si l'on a, pour deux écoulements distincts :

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \phi_1 + i \psi_1 \\ F_2(z) &= \phi_2 + i \psi_2 \end{aligned}$$

La superposition de ces deux écoulements aura comme potentiel complexe :

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) = \phi + i \psi \quad (100)$$

$$\text{avec } \phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (101)$$

$$\text{et } \psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (102)$$

Concernant les vitesses, celles-ci s'additionnent vectoriellement.

On démontre ci-dessous que les composantes exprimées dans le même repère, possèdent la propriété d'additivité :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial (\phi_1 + \phi_2)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = u_1 + u_2 \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial (\phi_1 + \phi_2)}{\partial y} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = v_1 + v_2 \end{array} \right.$$

Nous proposons dans les pages suivantes quelques unes des superpositions les plus significatives et des plus utiles en mécanique des fluides.

### A) Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source

Rappelons les caractéristiques de ces fonctions complexes, avec  $C_0$  vitesse de l'écoulement uniforme et  $qv$  le débit de la source :

$$F_1(z) = C_0 \cdot z \quad \text{avec} \quad \phi_1 = C_0 x \quad \text{et} \quad \psi_1 = C_0 y$$

$$F_2(z) = \frac{qv}{2\pi} \ln z \quad \text{avec} \quad \phi_2 = \frac{qv}{2\pi} \ln r \quad \text{et} \quad \psi_2 = \frac{qv}{2\pi} \theta$$

ou

$$\phi_2 = \frac{qv}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \psi_2 = \frac{qv}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

La superposition de ces deux écoulements donnera :

$$F(z) = C_0 z + \frac{qv}{2\pi} \ln z = \phi + i \psi$$

D'où l'on tire :

$$\phi = C_0 x + \frac{qv}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \tag{103}$$

$$\text{et} \quad \psi = C_0 y + \frac{qv}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

La ligne de courant  $\psi = 0$  est obtenue pour  $y = 0$  et  $y_0 = -\frac{qv}{2\pi C_0} \theta$  correspondant à la

courbe en trait fort (figure 12). C'est une courbe à deux asymptotes distantes de  $\frac{qv}{C_0}$  et

obtenues pour  $\theta = -\pi$  et  $+\pi$ . Le calcul des différentes lignes de courant se fait suivant l'organigramme de l'annexe R19.

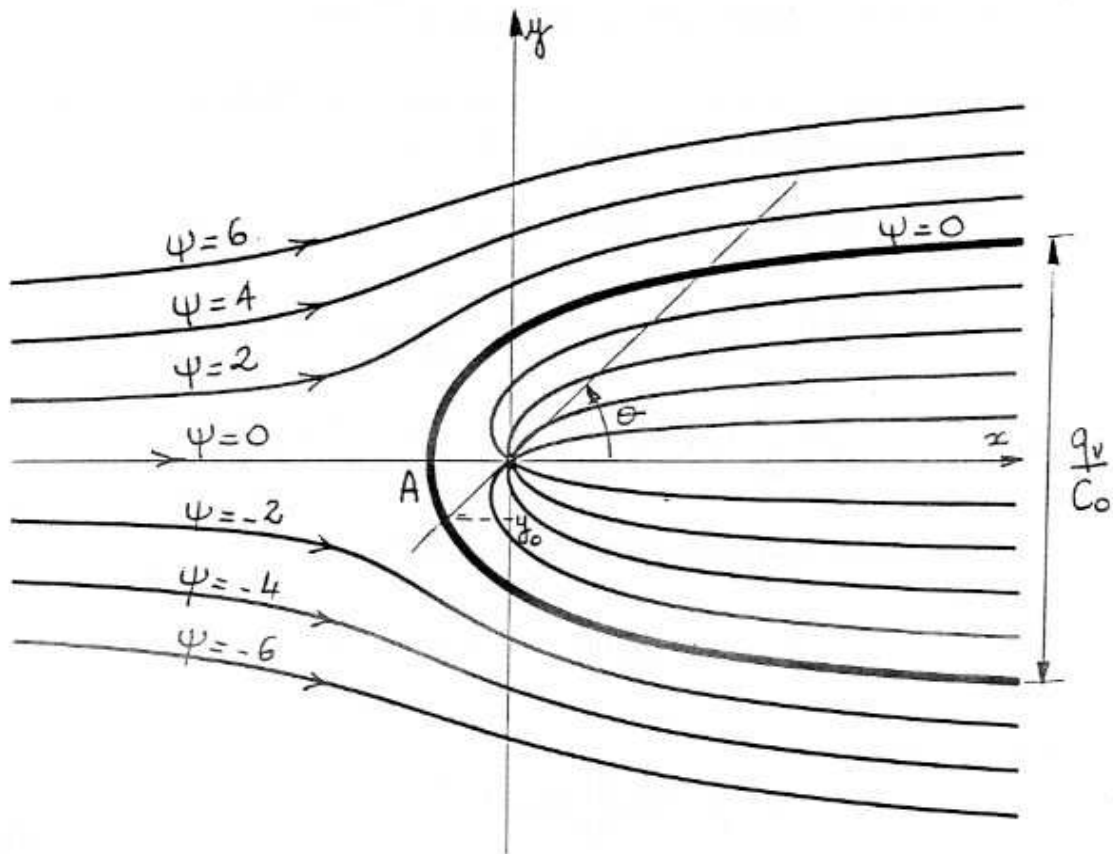
Les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  permettent de calculer les composantes de la vitesse locale :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = C_0 + \frac{qv}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{qv}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \tag{104}$$

Le point A est le point d'arrêt de l'écoulement correspondant à l'annulation conjointe de  $u$  et de  $v$ . Les coordonnées de ce point sont les suivantes :

$$A \left\{ \begin{array}{l} x_A = -\frac{q_v}{2\pi C_0} \\ y_A = 0 \end{array} \right.$$



**Figure 12** : Ecoulement autour d'un obstacle (solide de Rankine).

Lorsque  $x$  tend vers l'infini,  $v$  tend vers zéro et  $u$  tend vers  $C_0$ , vitesse de l'écoulement uniforme.

Ce principe de superposition permet donc de représenter l'écoulement autour d'un obstacle (correspondant notamment à  $\psi = 0$ ).

On peut en principe obtenir n'importe quelle forme d'obstacle en disposant dans le plan un nombre suffisant de sources et de puits.

**B) Superposition d'une source et d'un puits de mêmes débits**

La source centrée à l'affixe  $z_s$  (O,a) est caractérisée par les fonctions suivantes (R9) :

$$F_1(z) = \frac{qv}{2\pi} \ln(z - z_s)$$

$$\phi_1 = \frac{qv}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y - a)^2}$$

$$\psi_1 = \frac{qv}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y - a}{x}$$

Le puits centré à l'affixe  $z_p$  (O, - a) est caractérisé par les fonctions :

$$F_2(z) = -\frac{qv}{2\pi} \ln(z - z_p)$$

$$\phi_2 = -\frac{qv}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y + a)^2}$$

$$\psi_2 = -\frac{qv}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y + a}{x}$$

L'écoulement correspondant à la superposition des deux écoulements précédents sera lui caractérisé par (Annexe R10) :

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) = \frac{qv}{2\pi} \ln \frac{z - z_s}{z - z_p}$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{qv}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{x^2 + (y - a)^2}{x^2 + (y + a)^2}}$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{qv}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{2ax}{a^2 - x^2 - y^2} \quad (105)$$

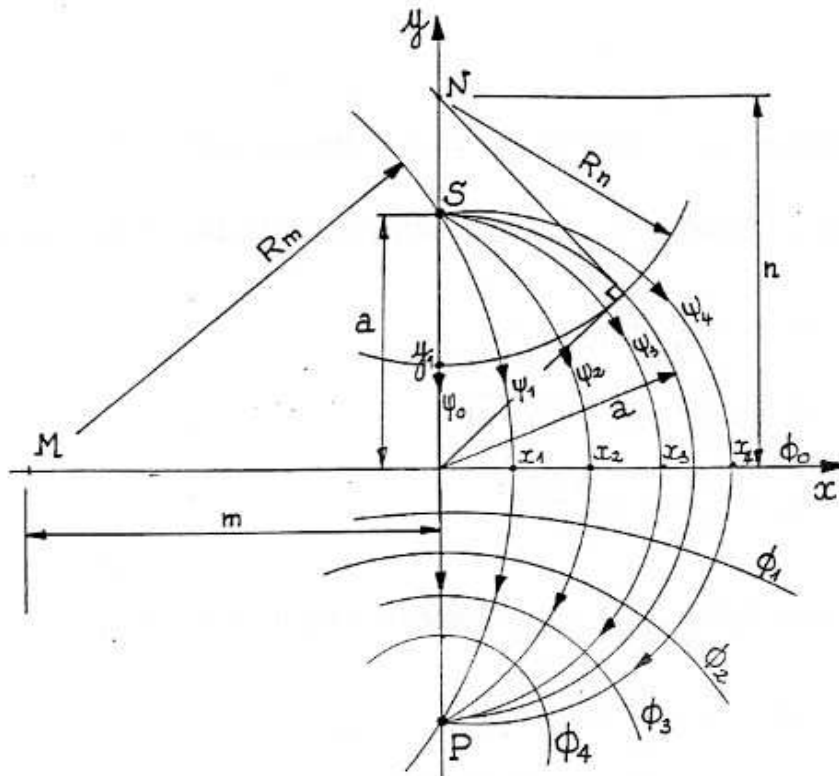
**Lignes de courant :**

La ligne de courant principale  $\psi = 0$ , obtenue pour  $x = 0$ , est constituée de l'axe y. Les autres lignes de courant sont constituées de la famille de cercles centrés sur l'axe x et passant par les points S et P. Leur rayon  $R_m$  est obtenu par la relation géométrique issue de la figure 13 :

$$R_m^2 = a^2 + (R_m - x_1)^2$$

soit après développement :

$$R_m = \frac{a^2 + x_1^2}{2x_1} \quad (106)$$



**Figure 13** : Superposition d'une source et d'un puits.

où  $x_1$  représente l'abscisse de l'intersection du cercle avec l'axe Ox. L'abscisse  $m_1$  du centre du cercle est donnée par  $m_1 = -(R_m - x_1)$ .

A cette ligne de courant est associée la fonction  $\psi_1$  ayant pour valeur :

$$\psi = \psi_1 = \frac{qv}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{2ax_1}{a^2 - x_1^2} \quad (107)$$

Les cotes des autres lignes de courant sont obtenues grâce à l'abscisse  $x_i$  de leur intersection avec l'axe Ox.

### Equipotentielles :

Les équipotentiels sont constituées de la familles des cercles conjugués centrés sur l'axe Oy. Si  $y_1$  représente l'ordonnée de l'intersection avec l'axe Oy, on observera les relations géométriques :

$$\begin{aligned} \text{Rayon} & : R_n = \sqrt{n^2 - a^2} \\ \text{Ordonnée du centre} & : n = R_n + y_1 \end{aligned}$$

soit finalement :

$$Rn = \frac{a^2 - y_1^2}{2 y_1} \quad (108)$$

et  $n = Rn + y_1 \quad (109)$

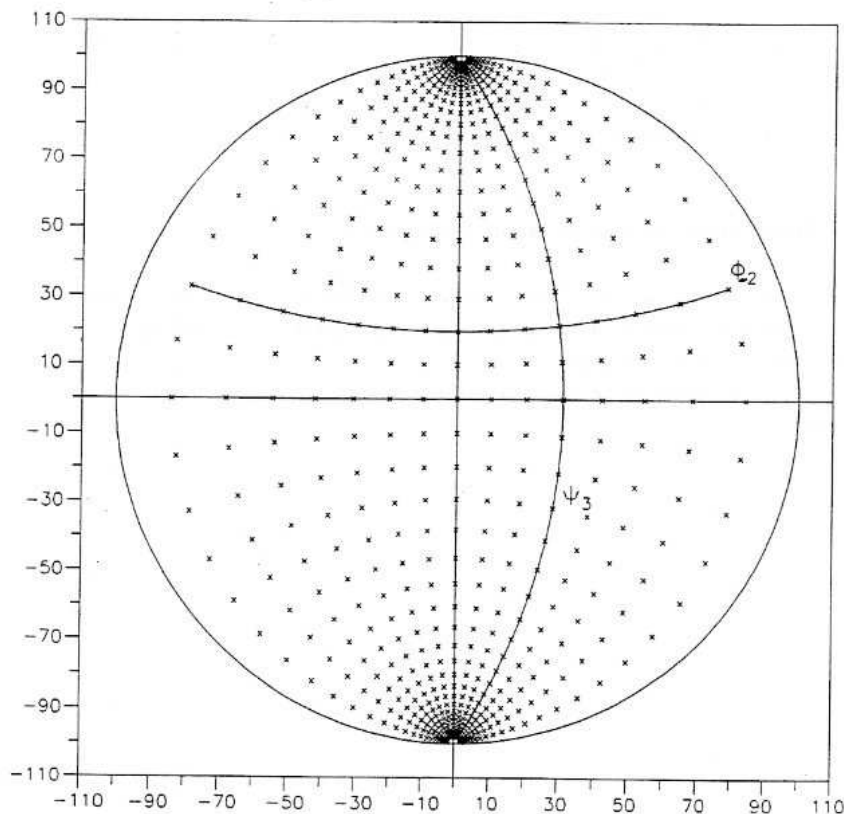
Comme précédemment, l'équipotentielle est caractérisée par son intersection avec l'axe y et prend sur ce cercle la valeur :

$$\phi_{-1} = \frac{qv}{2\pi} \ln \left| \frac{y_1 - a}{y_1 + a} \right| \quad (110)$$

Pour  $y_1 \in \{0, a\}$ ,  $\phi$  est négatif d'où la présence de l'indice -1.

**Représentation générale d'une association source-puits :**

Le diagramme suivant donne l'allure générale des lignes de courant et des équipotentiels d'une association source-puits. Elle est représentée sur la figure 14 pour une valeur de a égale à 100mm. L'association source-puits sert de base à la méthode de l'hodographe donnée en détail au chapitre G.



**Figure 14 :**  
Lignes de courant et équipotentiels correspondant à une association source-puits (valeurs obtenues pour a = 100 mm)

**Cas particulier du doublet :**

Un doublet est constitué d'une association source-puits centrés au même point D.

Si l'on reprend la relation générale (105) :

$$F(z) = \frac{qV}{2\pi} \ln \frac{z - z_S}{z - z_P} \quad (111)$$

Le segment PS formant l'angle  $\alpha$  avec l'axe Ox et  $2a$  étant sa longueur, on peut écrire :

$$z_S - z_P = 2a \exp(i\alpha)$$

Le potentiel complexe aura alors pour valeur :

$$F(z) = \frac{qV}{2\pi} \ln \left[ 1 - \frac{2a \exp(i\alpha)}{z - z_P} \right]$$

On constitue le doublet en adoptant les limites suivantes :

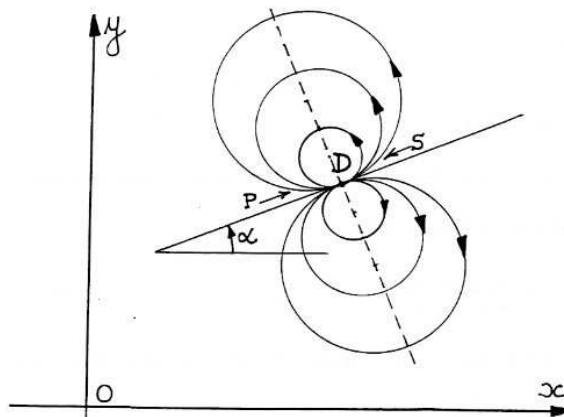
$$a \longrightarrow 0, \quad z_P \longrightarrow z_D, \quad \ln(1 - \varepsilon) \longrightarrow -\varepsilon$$

$$\text{et} \quad -\frac{qV}{2\pi} 2a \longrightarrow -m^2 \quad (\text{valeur arbitraire notée intensité du doublet})$$

Le potentiel complexe sera alors donné par :

$$F(z) = -\frac{m^2 \cdot \exp(i\alpha)}{z - z_D} \quad (112)$$

Le doublet est représenté sur la figure 15.



**Figure 15** : Doublet centré au point D

**Cas particulier :**

Lorsque D est centré en 0 et  $\alpha = 0$ , le doublet est décrit par l'équation :

$$F(z) = -\frac{m^2}{z} \quad (113)$$

En posant  $z = x + i y$ , l'équation précédente se transforme en :

$$F(z) = -\frac{m^2}{(x + iy)} = -\frac{m^2(x - iy)}{x^2 + y^2}$$

en posant d'autre part :

$$F(z) = \phi + i \psi$$

On obtient les expressions de  $\phi$  et  $\psi$  :

$$\left| \begin{array}{l} \phi = -\frac{m^2 x}{x^2 + y^2} \\ \psi = \frac{m^2 y}{x^2 + y^2} \end{array} \right. \quad (114)$$

**C) Superposition d'un écoulement uniforme et d'un doublet**

On procède comme pour les cas précédents :

$$\begin{array}{ll} \cdot \text{écoulement uniforme} & : \quad F_1(z) = C_0 z \\ \cdot \text{doublet centré en O} & : \quad F_2(z) = C_0 \frac{m^2}{z} \end{array}$$

D'où le potentiel complexe de l'écoulement :

$$F(z) = C_0 \left( z + \frac{m^2}{z} \right) = \phi + i \psi \quad (115)$$

On accède à  $\phi$  et  $\psi$  en remplaçant  $z$  par  $x + iy$  et en identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = Co \left( x + \frac{m^2 x}{x^2 + y^2} \right) \\ \psi = Co \left( y - \frac{m^2 y}{x^2 + y^2} \right) \end{array} \right. \quad (116)$$

Définissons la ligne de courant principale ( $\psi = 0$ ), elle est constituée par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y = 0 & \text{(axe Ox)} \\ x^2 + y^2 = m^2 & \text{(cercle de centre O et de rayon m)} \end{array} \right.$$

Le champ de vitesses est donné par les relations classiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = Co \left[ 1 + \frac{(x^2 + y^2)m^2 - 2x^2 m^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -Co \frac{2x y m^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{array} \right. \quad (117)$$

Les autres lignes de courant seront obtenues en suivant l'organigramme de l'annexe R20.

### Champ de vitesses à la surface du cylindre :

On remplace  $(x^2+y^2)$  par  $m^2$  (équation du cercle) dans les équations définissant  $u$  et  $v$ , on obtient les valeurs particulières  $u_0$  et  $v_0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 Co \left[ 1 - \frac{x^2}{m^2} \right] \\ v_0 = -2 Co \frac{x y}{m^2} \end{array} \right.$$

En remarquant que sur le cercle  $\sin \theta = \frac{y}{m}$  et  $\cos \theta = \frac{x}{m}$ , on aura :

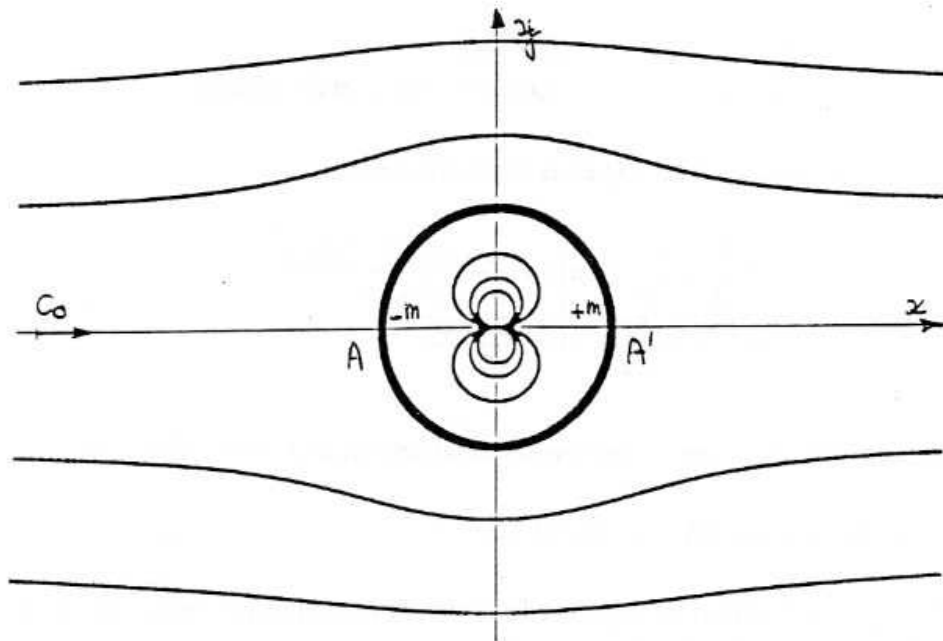
$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 Co \sin^2 \theta \\ v_0 = -2 Co \sin \theta \cos \theta \end{array} \right.$$

D'où l'on peut déduire le module de la vitesse  $\vec{C}$  :

$$\boxed{C = 2 Co |\sin \theta|} \quad (118)$$

Les points A ( $\theta = \pi$ ) et A' ( $\theta = 0$ ) sont les points d'arrêt de l'écoulement.

La superposition d'un écoulement uniforme et d'un doublet se présente comme l'écoulement irrotationnel autour d'un cylindre de révolution de rayon  $m$  (figure 16) :



**Figure 16** : Ecoulement autour d'un cylindre de rayon  $m$

**D) - Superposition d'une source et d'un vortex centrés en O :**

On étudie ici une source de débit  $qv$  centrée en O associée à un vortex centré également en O et d'intensité  $\Gamma$ .

Le potentiel complexe correspondant est donné par :

$$F(z) = \frac{qv}{2\pi} \ln z + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (119)$$

En retenant les coordonnées polaires et en remplaçant  $z$  par  $r \exp(i\theta)$ , on obtient :

$$F(z) = \frac{qv}{2\pi} (\ln r + i\theta) + i \frac{\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta)$$

donnant :

$$\begin{cases} \phi = \frac{qv}{2\pi} \ln r - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi = \frac{qv}{2\pi} \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{cases} \quad (120)$$

ainsi que le champ de vitesses :

$$\begin{cases} C_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{qv}{2\pi r} \\ C_u = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \quad (121)$$

L'angle  $\beta$  formé entre la direction radiale et la tangente à la ligne de courant est donnée par (figure 17) :

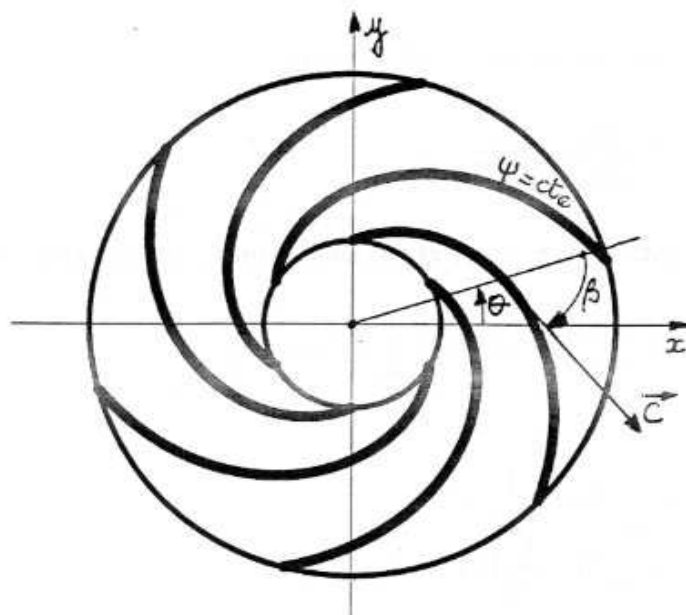
$$\text{tg } \beta = \frac{C_u}{C_r} = -\frac{\Gamma}{qv} \quad (122)$$

L'angle  $\beta$  est donc constant quel que soit le rayon proposé. Les lignes de courant sont des spirales logarithmiques d'équation :

$$r = \exp\left[\frac{2\pi\psi}{\Gamma}\right] \cdot \exp\left(-\frac{\theta}{\text{tg } \beta}\right)$$

L'écoulement est axisymétrique puisque l'on observe simultanément :

$$\frac{\partial C_r}{\partial \theta} = \frac{\partial C_u}{\partial r} = 0$$



**Figure 17** : Superposition d'une source et d'un vortex

Il s'agit de l'écoulement relatif simplifié produit par une roue centrifuge équipée d'aubages en forme de spirales logarithmiques. On démontre que l'écoulement n'est véritablement axisymétrique que dans le cas d'un nombre infini d'aubages (hypothèse d'Euler).

Chapitre B

**DYNAMIQUE DES FLUIDES  
INCOMPRESSIBLES**

<b>I - EQUATIONS DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS</b>	<b>p. 4</b>
1.1. Intégration le long d'une ligne de courant	
1.2. Théorème des quantités de mouvement	
<b>II - PROPRIETES DU FLUIDE REEL</b>	<b>p. 11</b>
2.1. Viscosité	
2.2. Description du frottement visqueux	
2.3. Généralisation	
2.4. Tenseur des contraintes	
2.5. Liaison entre contraintes et taux de déformation	
<b>III - EQUATION DE NAVIER-STOKES</b>	<b>p. 23</b>
<b>IV - CARACTERISTIQUES DE L'ECOULEMENT VISQUEUX</b>	<b>p. 29</b>
4.1. Régimes d'écoulement	
4.2. Propriétés des écoulements laminaires	
4.3. Propriétés des écoulements turbulents	
4.4. Modélisation de la turbulence	
<b>V - COUCHE LIMITE BIDIMENSIONNELLE</b>	<b>p. 43</b>
5.1. Equations régissant la couche limite laminaire	
5.2. Evolution de la couche limite laminaire à la surface d'une paroi de forme quelconque	
5.3. Autres paramètres caractéristiques de la couche limite	
5.4. Couche limite turbulente	
5.5. Couche limite turbulente sur une surface quelconque	
5.6. Ordre de grandeur des caractéristiques de la couche limite sur une plaque plane	
<b>VI - ECOULEMENTS EN CONDUITE</b>	<b>p. 76</b>
6.1. Régime laminaire	
6.2. Régime turbulent lisse	
6.3. Influence de la rugosité	

## DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Au même titre que le chapitre A, ce second chapitre constitue la partie classique et académique de la mécanique des fluides. En général, l'étude des écoulements visqueux nécessite une étude préalable en fluide parfait qui sert de référence aux calculs mettant en évidence le profil de la couche limite, son éventuel décollement et les pertes par frottement associées.

L'équation de la dynamique des fluides réels est donnée dans son expression la plus générale sous la forme de l'équation de Navier-Stokes.

Elle est obtenue par le développement des principes fondamentaux de la mécanique : l'équation de Newton ( $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$ ) ou le théorème des quantités de mouvement. Son établissement dans sa forme actuelle est basé sur les travaux de Stokes, Saint-Venant, Navier et Poisson.

Exceptés quelques cas très limités où il existe une solution exacte, l'équation de Navier-Stokes ne possède pas de solution analytique générale et constitue ainsi le champ d'application privilégié des numériciens.

Les diverses formes de l'équation de l'énergie seront examinées dans le cadre de la dynamique des écoulements compressibles. Dans une large mesure, les écoulements de gaz peuvent être considérés comme incompressibles tant que le nombre de Mach reste inférieur à 0,4.

## I - EQUATIONS DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

L'équation dynamique est l'équation de Newton traduisant, pour un élément fluide, l'égalité des efforts extérieurs et des efforts d'inertie :

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\Gamma} \cdot dm} \quad (1)$$

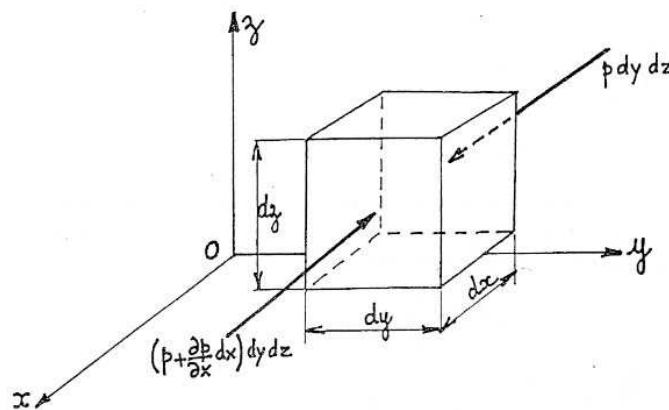
avec  $dm$  : masse de l'élément fluide  $dm = \rho \cdot dV$   
 $\vec{\Gamma}$  : accélération dans le repère fixe (galiléen)  
 $\vec{F}$  : résultante des efforts extérieurs appliqués

Les efforts agissant sur la particule sont classés en deux groupes principaux :

- Forces agissant à la surface de l'élément fluide :
  - efforts de pression agissant perpendiculairement aux parois :  $F_p$  ;
  - efforts de frottement agissant tangentiuellement et se manifestant en présence d'un fluide visqueux :  $F_f$  ;
  - efforts matériels tels que l'effort d'un aubage sur l'élément de fluide :  $F_a$ .
- Forces de volume :  $F_v$

Efforts à distance tels que la pesanteur, les effets magnétiques ou tout autre effort extérieur agissant sans contact. Plaçons nous en coordonnées cartésiennes dans l'hypothèse d'un fluide parfait ( $F_f = 0$ ). Considérons un volume de fluide élémentaire éloigné d'une paroi ( $F_a = 0$ ) sur lequel agit un effort de volume  $\vec{F}_v$  de composantes ( $F_x, F_y, F_z$ ).

Examinons les efforts en présence suivant la direction  $Ox$  (Figure 1) :



**Figure 1** : Disposition des efforts de pression suivant  $Ox$

Forces de pression :  $p \, dy \, dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \, dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz$

Forces de volume :  $F_x$

Masse de l'élément :  $\rho \, dV = \rho \, dx \, dy \, dz$

Accélération :  $\Gamma_x$

Le bilan établit l'équation d'équilibre issue de l'équation (1) :

$$- \frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz + F_x = \rho \Gamma_x \, dx \, dy \, dz \quad (2)$$

En extrapolant aux autres composantes et en retenant  $\vec{f}$  comme effort par unité de masse :

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}_V}{\rho \, dx \, dy \, dz} \quad (3)$$

On obtient l'équation vectorielle :

$$- \frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p + \vec{f} = \vec{\Gamma}$$

(4)

L'accélération  $\vec{\Gamma}$  de la particule fluide est exprimée par ses composantes cartésiennes au chapitre A (relation 10). En reportant celles-ci dans l'équation (4), on obtient le système d'équations différentielles suivant, désigné par équations d'Euler :

$$\begin{cases} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_y = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \end{cases} \quad (5)$$

qui s'écrivent aussi en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + fr = Cr \frac{\partial Cr}{\partial r} + Cu \frac{\partial Cr}{r \partial \theta} + Ca \frac{\partial Cr}{\partial z} - \frac{Cu^2}{r} + \frac{\partial Cr}{\partial t} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} + f\theta = Cr \frac{\partial Cu}{\partial r} + Cu \frac{\partial Cu}{r \partial \theta} + Ca \frac{\partial Cu}{\partial z} + \frac{CrCu}{r} + \frac{\partial Cu}{\partial t} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + fz = Cr \frac{\partial Ca}{\partial r} + Cu \frac{\partial Ca}{r \partial \theta} + Ca \frac{\partial Ca}{\partial z} + \frac{\partial Ca}{\partial t} \end{cases} \quad (6)$$

En général, les forces de volume dérivent d'un potentiel et, plus particulièrement, de celui de la pesanteur. On notera dans ce cas :

$$\vec{f}_V = - \text{grad}(gh) \quad (7)$$

avec  $g$  : accélération de la pesanteur

$h$  : cote ou altitude du point considéré

Ainsi, l'expression la plus générale de l'équation dynamique s'écrira en fluide parfait :

$$\boxed{-\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \text{grad}(gh) = \vec{\Gamma}} \quad (8)$$

En remplaçant l'accélération de la particule par sa valeur issue de la relation vectorielle (12) du chapitre A, l'équation dynamique s'écrira sous la forme de Lamb :

$$\boxed{-\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \text{grad}(gh) = \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + \text{grad} \frac{C^2}{2} - \vec{C} \wedge \text{rot } \vec{C}}$$

Pour un fluide barotrope pour lequel la masse volumique ne dépend que de la pression ( $\rho = \rho(p)$ ), le premier terme se transformera en :

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } p = - \text{grad} \int \frac{dp}{\rho}$$

Enfin, le groupement des termes  $\text{grad}$  donnera :

$$-\text{grad} \left( \int \frac{dp}{\rho} + gh + \frac{C^2}{2} \right) = \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} - \vec{C} \wedge \text{rot } \vec{C} \quad (9)$$

**1.1. Intégration le long d'une ligne de courant**

La relation générale (9) peut être intégrée le long d'une ligne de courant d'abscisse curviligne ds.

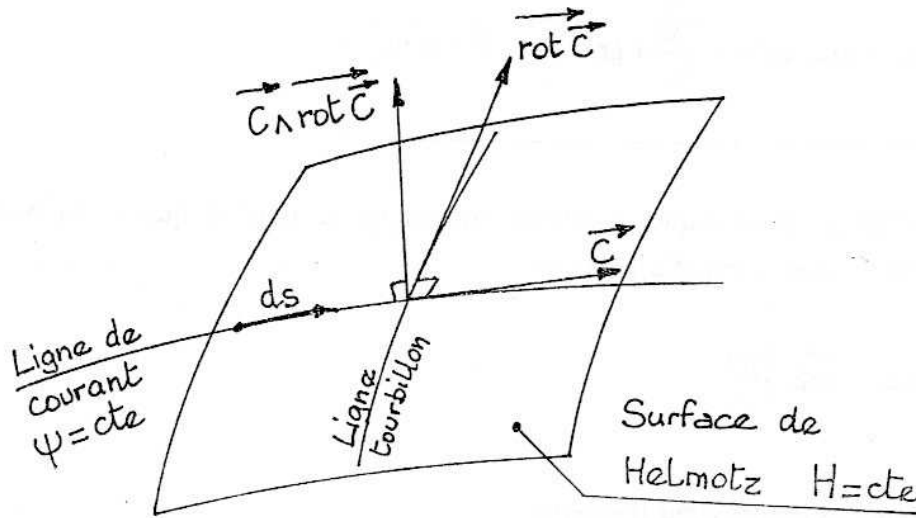


Figure 2 : Ligne de courant, ligne tourbillonnaire, surface de Helmholtz

On démontre que le dernier terme de la relation (9) peut s'exprimer sous la forme :

$$\vec{C} \wedge \text{rot } \vec{C} = \text{grad } H$$

où H est une constante sur la surface de Helmholtz contenant à la fois la ligne de courant et la ligne tourbillonnaire portant le vecteur tourbillon :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{C}$$

L'intégration donne le résultat suivant :

$$\int \frac{dp}{\rho} + gh + \frac{C^2}{2} + \int \frac{\partial C}{\partial t} ds = H(t) \quad (10)$$

où  $H(t)$  est une constante variant d'une ligne de courant à l'autre ainsi qu'en fonction du temps. L'écoulement rotationnel est donc le siège d'un échange d'énergie avec le milieu environnant. Cependant, entre deux points 1 et 2 de la même ligne de courant, on pourra écrire à chaque instant :

$$\boxed{\left[ \int \left( \frac{dp}{\rho} + \frac{\partial C}{\partial t} ds \right) \right]_1 + gh_1 + \frac{C_1^2}{2} = \left[ \int \left( \frac{dp}{\rho} + \frac{\partial C}{\partial t} ds \right) \right]_2 + gh_2 + \frac{C_2^2}{2}} \quad (11)$$

**Cas de l'écoulement irrotationnel :**

Dans cette hypothèse, le dernier terme du second membre de (9) s'annule et la vitesse dérive d'un potentiel  $\phi$  :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{C} &= 0 \\ \vec{C} &= \text{grad } \phi \\ \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \vec{\text{grad}} \phi \right] = \vec{\text{grad}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

L'équation dynamique prend la forme :

$$\vec{\text{grad}} \left[ \int \frac{dp}{\rho} + gh + \frac{C^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = 0$$

soit, après intégration :

$$\boxed{\int \frac{dp}{\rho} + gh + \frac{C^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{Cte}(t)} \quad (12)$$

C'est la forme la plus générale du théorème de Bernoulli où le terme  $\text{Cte}(t)$  est une constante d'intégration dépendant du temps mais identique pour tous les points de l'écoulement.

Au même instant, en deux points quelconques 1 et 2, situés ou non sur la même ligne de courant, on observera l'égalité pratique :

$$\boxed{\left[ \int \frac{dp}{\rho} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_1 + gh_1 + \frac{C_1^2}{2} = \left[ \int \frac{dp}{\rho} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_2 + gh_2 + \frac{C_2^2}{2}} \quad (13)$$

**Autres cas particuliers :**

- **Ecoulement permanent :** On observe simultanément que  $\partial\phi/\partial t = 0$  et que la constante d'intégration est indépendante du temps.
- **Fluide incompressible :** Dans le cas où  $\rho = \text{cte}$ , le terme de pression se réduit à l'expression :

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho} \int dp = \frac{p}{\rho}$$

Ainsi, la forme la plus simplifiée de l'équation de Bernoulli sera donnée par :

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + gh + \frac{C^2}{2} = \text{cte}} \quad (14)$$

Elle correspondra, sous cette forme, à l'écoulement permanent et irrotationnel d'un fluide parfait incompressible.

**1.2. Théorème des quantités de mouvement**

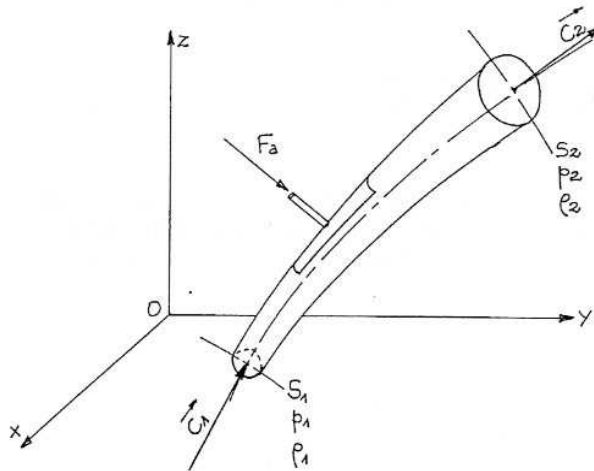
Il s'agit d'une autre expression de l'équation dynamique que nous établirons sous forme intégrale dans le cas particulier d'un tube de courant en régime stationnaire.

L'énoncé de ce théorème est le suivant :

*La quantité de mouvement sortant d'un volume fluide est égale à la somme des forces extérieures appliquées à ce volume.*

S'agissant d'un tube de courant (Figure 3), aucun fluide ne traverse l'enveloppe extérieure et seules les sections terminales du tube débitent.

La quantité de mouvement est un effort obtenu par le produit du débit massique  $Q$  par la vitesse locale.



**Figure 3 :** Equation des quantités de mouvement appliquée à un tube de courant

En considérant les vitesses uniformes à l'entrée et la sortie du tube de courant, la quantité de mouvement sortante a pour expression :

$$Q \left( \vec{C}_2 - \vec{C}_1 \right) = \rho_2 qv_2 \vec{C}_2 - \rho_1 qv_1 \vec{C}_1 \quad (15)$$

Les modules de  $\vec{C}_1$  et  $\vec{C}_2$  sont calculables à partir du débit volume et des sections :

$$\left| \begin{array}{l} C_1 = \frac{qv_1}{S_1} \\ C_2 = \frac{qv_2}{S_2} \end{array} \right.$$

Au titre des forces extérieures, on retiendra comme précédemment les forces de volume  $F_v$  (la pesanteur essentiellement), les forces de contact  $F_a$  correspondant à l'action des parois ou du fluide environnant, les forces de frottement  $F_f$  agissant tangentielllement à la surface du tube et enfin les efforts de pression agissant sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$ .

En regroupant tous les efforts sous la forme résultante  $\vec{F}$  hormis les efforts de pression aux extrémités, le théorème des quantités de mouvement s'écrira :

$$\boxed{Q \left( \vec{C}_2 - \vec{C}_1 \right) = \vec{F} + p_1 \vec{S}_1 - p_2 \vec{S}_2} \quad (16)$$

L'avantage de cette forme de l'équation dynamique est qu'elle permet d'évaluer l'effort extérieur global sans connaître par le détail la distribution de pression à la surface de contact avec le milieu extérieur : fluide environnant ou paroi matérielle (aubages, conduite, etc...).

## II - PROPRIETES DU FLUIDE REEL

Le fluide réel se caractérise, en opposition au fluide parfait, par deux propriétés importantes :

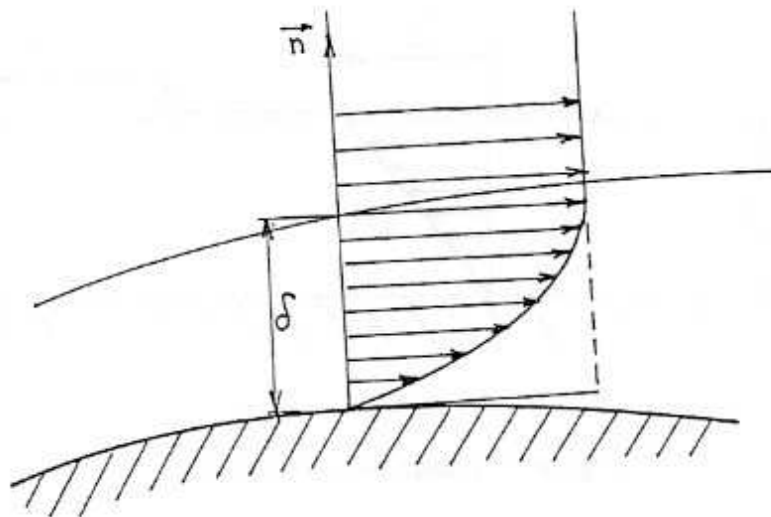
- La viscosité, qui est une caractéristique physique du fluide se manifestant par une résistance de celui-ci aux déformations et plus particulièrement aux vitesses de déformation.

Elle est due à la combinaison des efforts de cohésion et d'agitation moléculaire s'opposant au déplacement relatif des couches liquides les unes par rapport aux autres.

La viscosité dépend de la nature du fluide et varie considérablement d'un fluide à un autre. Pour un même fluide, elle dépend de la pression et de la température, pour les liquides incompressibles, elle est pratiquement invariable avec la pression.

- L'adhérence du fluide aux parois solides : contrairement au fluide parfait pour lequel la vitesse d'écoulement possède une valeur non nulle à la paroi, le fluide réel adhère parfaitement à celle-ci et sa vitesse est nulle à cet endroit.

Dans cette zone de fort gradient de vitesse désignée par couche limite, les effets du frottement interne sont importants (Figure 4).



**Figure 4 :** *Écoulement au voisinage de la paroi*

Nous verrons que l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite dépend à la fois de la viscosité du fluide et du régime d'écoulement.

A l'extérieur de la couche limite, la cinématique du fluide est pratiquement identique à celle décrite en fluide parfait. Ainsi, dans certains modèles d'écoulement, les conditions de glissement ne s'écrivent pas à la paroi elle-même mais à la frontière de la couche limite.

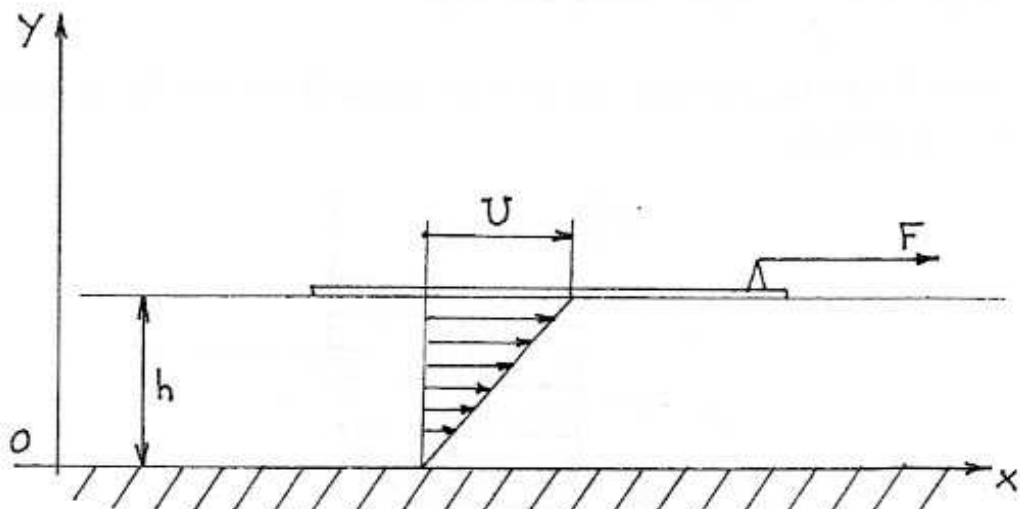
### 2.1. Viscosité

L'expérience de Couette est souvent utilisée pour mettre en évidence l'existence de la viscosité.

On dispose d'une plaque de surface  $S$  infiniment mince flottant à la surface libre d'un liquide au repos. La hauteur de liquide est égale à  $h$ . Pour atteindre une vitesse de déplacement égale à  $U$ , il faut exercer sur la plaque, en régime permanent, un effort  $F$  (Figure 5).

La contrainte de cisaillement à la surface de la plaque est égale à :

$$\tau = \frac{F}{S} \quad (17)$$



**Figure 5 : Expérience de Couette**

Pour un fluide de viscosité donnée, on observe que  $\tau$  est proportionnelle à la vitesse et inversement proportionnelle à la hauteur de fluide :

$$\tau = \mu \cdot \frac{U}{h} \quad (18)$$

$\mu$  : coefficient de proportionnalité qualifié de coefficient de viscosité ou encore de viscosité dynamique

Pour les conditions d'adhérence déjà présentées, la vitesse du fluide est nulle au fond et égale à  $U$  à la surface de la plaque. La vitesse en tout point du fluide compris entre le fond et la plaque étant supposée linéaire, celle-ci est donnée par :

$$u = \frac{U}{h} y \quad (19)$$

Le gradient transversal s'écrit donc d'après l'équation (19) :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{h} \quad (20)$$

L'hypothèse de Newton consiste à généraliser cette propriété en écrivant :

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (21)$$

La viscosité dynamique  $\mu$  s'exprime dans le système SI en  $N.s/m^2$  ou en  $kg/m.s$  ou encore Poiseuille (Pl). On la trouve très souvent exprimée à partir des unités du système CGS en  $g/cm.s$  ou Poise (Po).

D'autres lois de comportement peuvent être observées, dépendant de la nature du fluide :

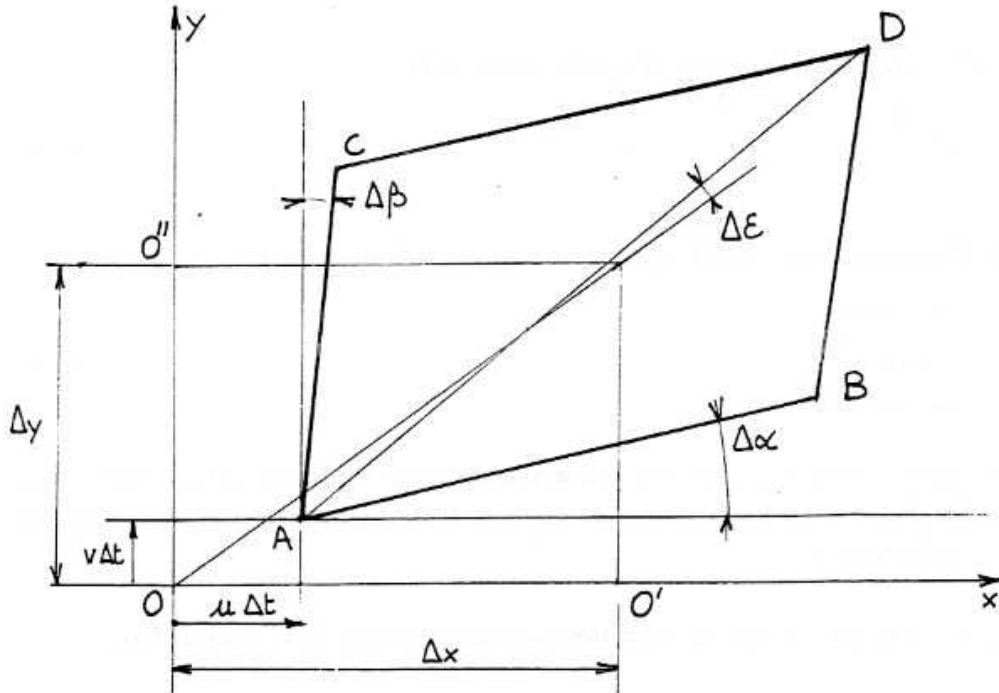
$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (22)$$

La présence de la contrainte critique ou contrainte de Bingham  $\tau_0$  montre la nécessité de dépasser un certain seuil de contrainte pour engendrer l'écoulement du fluide. Ces fluides, qualifiés généralement de non-newtoniens, se rencontrent industriellement aussi couramment que les fluides newtoniens.

A l'inverse des fluides newtoniens qualifiés de liquides purs, les fluides non newtoniens sont généralement constitués de mélanges liquide/solide : sang, pâte à papier, lait, etc... ou encore d'émulsions diverses liquide/liquide ou gaz/liquide.

## **2.2. Description du frottement visqueux**

Examinons dans le plan  $(x, y)$  la déformation de la face du parallélépipède rectangle élémentaire représentant une particule fluide en mouvement. Les gradients de vitesse seront supposés positifs (Figure 6).



**Figure 6 : Déformations d'une face de la particule**

A l'instant  $t = t_0$ , la face considérée est supposée rectangulaire de côtés  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ . A l'instant  $t = t_0 + \Delta t$ , le point  $O$  s'est déplacé jusqu'au point  $A$  de composantes :

$$A = \begin{vmatrix} u\Delta t \\ v\Delta t \end{vmatrix}$$

$u$  et  $v$  étant les composantes du vecteur vitesse au point  $O$ .

Pendant le même instant, le point  $O'$  s'est déplacé en  $B$ . Le théorème des accroissements finis au premier ordre indique pour le point  $O'$  une vitesse ayant pour composantes :

$$C_{O'} = \begin{vmatrix} u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \\ v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \end{vmatrix}$$

D'où les coordonnées du point  $B$  :

$$B = \begin{vmatrix} \Delta x + \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) \Delta t \\ \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) \Delta t \end{vmatrix}$$

Le segment OO' a subi à la fois une translation, un allongement et une rotation qui sont tous trois calculables. S'agissant de faibles déformations, l'angle  $\Delta\alpha$  est assimilable à sa tangente :

$$\Delta\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (23)$$

$\Delta\alpha$  est calculable à partir des coordonnées de A et B :

$$\Delta\alpha = \frac{\left( v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) \Delta t - v \Delta t}{\Delta x + \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) \Delta t - u \Delta t}$$

qui, après simplifications, s'écrit :

$$\boxed{\Delta\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta t} \quad (24)$$

De la même façon, on peut calculer les coordonnées du point C transformé du point O'' :

$$C \begin{cases} \left( u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right) \Delta t \\ \Delta y + \left( v + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) \Delta t \end{cases}$$

et la rotation  $\Delta\beta$  :

$$\Delta\beta = \frac{x_C - x_A}{y_C - y_A} = \frac{\left( u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right) \Delta t - u \Delta t}{\Delta y + \left( v + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) \Delta t - v \Delta t}$$

$$\boxed{\Delta\beta = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta t} \quad (25)$$

La rotation de la diagonale AD notée  $\Delta\epsilon$  sera déduite des relations (24) et (25) :

$$\Delta\epsilon = \frac{\Delta\alpha - \Delta\beta}{2}$$

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \Delta t - \frac{\partial u}{\partial y} \Delta t \right)$$

D'où l'on peut calculer la vitesse angulaire de la particule :

$$\boxed{\Omega_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)} \quad (26)$$

Le dernier membre de cette équation représente la composante sur z du vecteur tourbillon

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{C}.$$

Dans le cas d'un écoulement irrotationnel, la particule se déformera sans changement de direction de sa diagonale et subira donc une déformation sans rotation ( $\Delta\varepsilon = 0$ ).

**Taux de déformation :**

Suivant la direction Ox, l'élongation du segment AB s'écrit :

$$\Delta X = (x_B - x_A) - \Delta x$$

$$\Delta X = \left( \Delta x + \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) \Delta t - u \Delta t \right) - \Delta x$$

$$\Delta X = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \Delta t$$

La vitesse d'élongation sera quant à elle définie par :

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x$$

et le taux de déformation par :

$$\frac{V}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Suivant la direction Oy, le taux de déformation du même segment est égal à  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

Concernant le segment AC, les taux de déformation suivant Ox et Oy sont respectivement :

$$\frac{\partial v}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y}$$

On peut ainsi construire le tenseur des taux de déformation dans le plan (x, y) :

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (27)$$

que l'on peut décomposer en deux tenseurs : un tenseur d'élongation symétrique et un tenseur de rotation antisymétrique :

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} + \overline{\overline{\mathbf{\Omega}}} \quad (28)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \end{vmatrix}$$

Concernant le tenseur  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ , les termes diagonaux représentent les taux d'élongation des côtés de la particule dans les directions x et y tandis que les autres termes non diagonaux représentent la déformation par cisaillement. Les deux côtés de la particule aboutissant au point A subissent une rotation respective  $\Delta\alpha$  et  $\Delta\beta$  de sens inverse. Le taux de cisaillement dans le plan (x, y) est donc égal à :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\alpha + \Delta\beta}{\Delta t} \right)$$

soit d'après les relations (24) et (25) :

$$\left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (29)$$

Cette valeur est proportionnelle à l'allongement et au raccourcissement des deux diagonales du parallélogramme.

### 2.3. Généralisation

Si l'on considère une particule de forme parallélépipédique ayant pour dimensions respectives  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , le principe développé précédemment peut être aisément généralisé.

Dans un champ de vitesses quelconque, le tenseur des taux de déformation s'écrira comme la superposition d'un tenseur d'élongation symétrique et d'un tenseur de rotation antisymétrique.

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} + \overline{\overline{\mathbf{\Omega}}} \quad (30)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (31)$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{vmatrix} \quad (32)$$

**Remarque :**

A l'instant  $t = t_0 + \Delta t$  les dimensions principales de la particule deviennent (Figure 6) :

$$AB \quad \Delta x \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t \right)$$

$$AC \quad \Delta y \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta t \right)$$

$$\text{sur } Oz \quad \Delta z \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta t \right)$$

Le volume de celle-ci devient au premier ordre :

$$\Delta x \Delta y \Delta z \left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Delta t \right]$$

soit encore :

$$\Delta x \Delta y \Delta z [1 + \text{div } \vec{C} \cdot \Delta t] \tag{33}$$

Pour un fluide incompressible ( $\rho = \text{cte}$ ), le terme  $\text{div } \vec{C}$  est nul, satisfaisant ainsi l'équation de continuité (relation A17). Au premier ordre, en fluide incompressible, la particule tourne et se déforme sans changer de volume.

### 2.4. Tenseur des contraintes

Le tenseur  $\vec{C}$  des contraintes appliquées à la surface d'une particule de forme parallélépipédique de dimensions élémentaires  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  est composé des contraintes normales et des contraintes tangentielles. Examinons sur l'une des faces supposée contenue dans le plan  $yOz$ , les contraintes en présence (Figure 7).

L'effort  $\vec{F}$  exercé par le fluide environnant donne lieu à deux contraintes :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xx} \quad \text{contrainte normale} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{array} \right\} \text{composantes de la contrainte de cisaillement } \tau_x$$

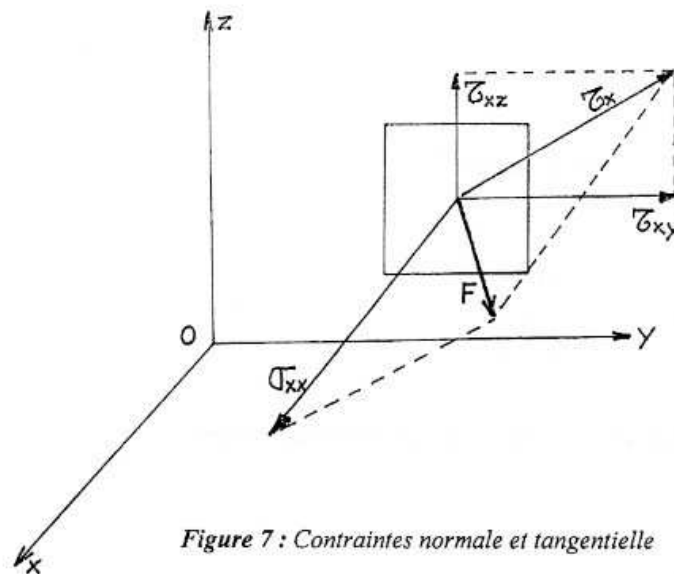


Figure 7 : Contraintes normale et tangentielle

Le double indice associé à ces contraintes doit être interprété de la manière suivante :

Le premier (x) correspond à la face orientée par l'axe correspondant, le second (x, y ou z) correspond à la direction de projection.

Pour une face orientée de manière quelconque dans l'espace, le tenseur des contraintes s'écrira :

$$\overline{\overline{C}} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (34)$$

On démontre que les termes symétriques sont égaux entre eux :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Pour un fluide au repos ou un fluide de viscosité nulle, les contraintes tangentielles sont nulles, les contraintes normales sont alors égales et opposées à la pression hydrostatique p.

On utilisera cette propriété pour écrire le tenseur  $\overline{\overline{C}}$  sous la forme de la superposition de deux états :

$$\overline{\overline{C}} = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{vmatrix} \quad (35)$$

$$\text{soit } \overline{\overline{C}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \quad (36)$$

$$\text{avec } \overline{\overline{I}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{tenseur unitaire}$$

$$\text{et } \overline{\overline{\tau}} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{vmatrix}$$

tenseur déviateur représentant uniquement les effets du frottement.

**2.5. Liaison entre contraintes et taux de déformation**

Trois principes fondamentaux sont utilisés dans cette partie : La rotation sans déformation de la particule fluide n’engendre aucune contrainte de cisaillement.

- Les contraintes sont proportionnelles aux taux de déformation (généralisation de l’équation de Newton).
- Le fluide est isotrope.

On observera donc entre les tenseurs la relation générale :

$$\boxed{\vec{\tau} = \varepsilon (\text{div } \vec{C}) \cdot \vec{I} + 2\mu \vec{D}} \tag{37}$$

avec  $\varepsilon$  : viscosité de dilatation  
 $\mu$  : viscosité dynamique

Relation permettant d’accéder aux différentes composantes des contraintes :

$$\text{Contraintes normales} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \varepsilon \text{div } \vec{C} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \\ \sigma_{yy} = \varepsilon \text{div } \vec{C} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - p \\ \sigma_{zz} = \varepsilon \text{div } \vec{C} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - p \end{array} \right. \tag{38}$$

$$\text{Contraintes tangentielles} \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{array} \right. \tag{39}$$

Pour un fluide compressible ou non, l’addition des trois contraintes normales conduit à :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = (3\varepsilon + 2\mu) \text{div } \vec{C} - 3p$$

permettant d’exprimer la pression hydrostatique locale :

$$p = -\frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \left( \varepsilon + \frac{2}{3} \mu \right) \text{div } \vec{C} \tag{40}$$

En fluide incompressible, l'équation de continuité  $\text{div} \vec{C} = 0$  montre que la pression est égale et opposée à la moyenne des contraintes normales.

En fluide compressible, on admet qu'il en va de même, ce qui implique que le terme  $\varepsilon + \frac{2}{3} \mu = 0$ .

C'est une hypothèse que l'on adopte couramment sous forme de l'équation de Stokes :

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{2}{3} \mu} \quad (41)$$

Dans l'écoulement plan pour lequel  $v = w = 0$ , les relations (39) se ramènent à :

$$\left| \begin{array}{l} \tau_{xy} = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \end{array} \right| \quad (42)$$

correspondant au cas de l'expérience de Couette décrite au § 2.1.

### III - EQUATION DE NAVIER-STOKES

C'est l'équation de la dynamique des fluides établie en fluide réel pour lequel la viscosité engendre des contraintes de cisaillement.

Reprenons les concepts et les efforts développés au § I concernant une particule fluide et examinons les efforts en présence suivant la seule direction  $\vec{Ox}$ . A l'inverse de la Figure 1, on observe dans le cadre de l'écoulement d'un fluide réel non seulement les contraintes normales mais également les contraintes tangentielles (Figure 8).

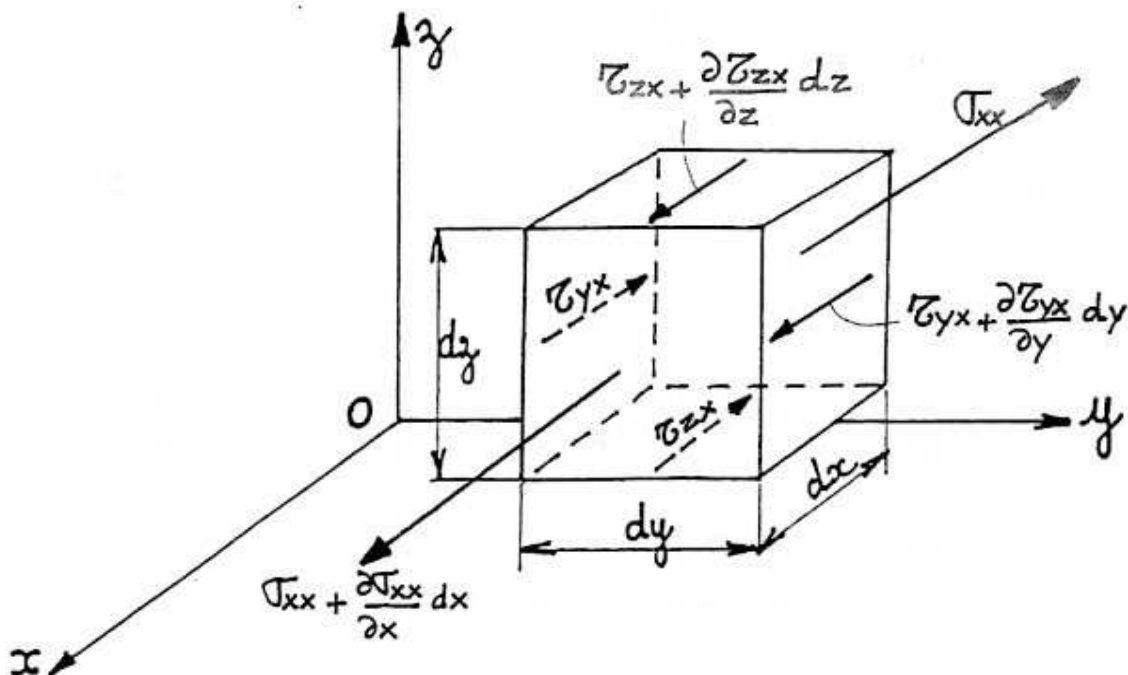


Figure 8 : Actions à la surface de l'élément fluide suivant  $\vec{Ox}$

Forces de surface :

$$\left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz$$

$$+ \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz$$

$$+ \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy$$

Forces de volume :  $F_x$

Accélération :  $\Gamma_x$

L'équation de la dynamique (1) appliquée à l'élément fluide donne l'équation suivante :

$$\Gamma_x dm = F_x + \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

se réduisant après simplification à :

$$\rho \Gamma_x = \frac{F_x}{dx dy dz} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (43)$$

En remplaçant les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zx}$  par leurs valeurs issues de (38) et (39), on aura :

$$\rho \Gamma_x = \frac{F_x}{dx dy dz} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \varepsilon \operatorname{div} \vec{C} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

En supposant  $\mu$  constant, elle s'écrit également :

$$\rho \Gamma_x = \frac{F_x}{dx dy dz} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \varepsilon \operatorname{div} \vec{C} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (44)$$

soit encore en identifiant  $\operatorname{div} \vec{C}$  et le laplacien de  $u$ .

$$\rho \Gamma_x = \frac{F_x}{dx dy dz} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\varepsilon + \mu) \operatorname{div} \vec{C} \right] + \mu \nabla^2 u \quad (45)$$

En retenant le cas des fluides incompressibles pour lesquels le terme  $\operatorname{div} \vec{C}$  est nul (équation de continuité), en posant d'autre part :

$$\vec{f} = \text{effort à distance par unité de masse}$$

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\rho dx dy dz}$$

et  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  viscosité cinématique,

l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\vec{\Gamma} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{C} \quad (46)$$

En coordonnées cartésiennes (46) s'écrit comme (5) mais figurent en plus les termes visqueux :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_y + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \end{cases} \quad (47)$$

et, **en coordonnées cylindriques**, la forme plus complexe (48) :

$$\begin{cases} \frac{\partial Cr}{\partial t} + Cr \frac{\partial Cr}{\partial r} + \frac{Cu}{r} \frac{\partial Cr}{\partial \theta} + Ca \frac{\partial Cr}{\partial z} - \frac{Cu^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \dots \\ \frac{\partial Cu}{\partial t} + Cr \frac{\partial Cu}{\partial r} + \frac{Cu}{r} \frac{\partial Cu}{\partial \theta} + Ca \frac{\partial Cu}{\partial z} + \frac{CrCu}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} + f_\theta + \dots \\ \frac{\partial Ca}{\partial t} + Cr \frac{\partial Ca}{\partial r} + \frac{Cu}{r} \frac{\partial Ca}{\partial \theta} + Ca \frac{\partial Ca}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \dots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \dots + \nu \left[ \frac{\partial^2 Cr}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Cr}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Cr}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 Cr}{\partial z^2} - \frac{Cr}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial Cu}{\partial \theta} \right] \\ & \dots + \nu \left[ \frac{\partial^2 Cu}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Cu}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Cu}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 Cu}{\partial z^2} - \frac{Cu}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial Cr}{\partial \theta} \right] \\ & \dots + \nu \left[ \frac{\partial^2 Ca}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Ca}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Ca}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 Ca}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (48)$$

Lorsque la viscosité du fluide est nulle, on retrouve naturellement l'équation (4) d'Euler.

L'accélération  $\vec{\Gamma}$  de la particule fluide est exprimée par ses composantes cartésiennes et cylindriques au chapitre A. Les propriétés du laplacien sont rappelées en annexe R.6.

La viscosité cinématique  $\nu$  s'exprime dans le système d'unité SI en  $m^2/s$  et dans le système CGS en  $cm^2/s$  ou Stoke (St). L'unité pratique est le plus souvent le centi-Stoke (cSt) égal à  $1 \cdot 10^{-6} m^2/s$ .

On retiendra quelques valeurs importantes :

- pour l'eau à 20°C sous 1 atm (760 mm Hg) :  $\nu = 1 \text{ cSt} = 1 \cdot 10^{-6} m^2/s$
- pour l'air dans les mêmes conditions :  $\nu = 15,1 \text{ cSt} = 15,1 \cdot 10^{-6} m^2/s$

**Cas du fluide compressible :**

Si l'on reprend l'expression (45) et l'hypothèse formulée précédemment indiquant que la pression hydrostatique est la moyenne des contraintes normales (41) et conduisant à  $\varepsilon = -2/3 \mu$ , l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\vec{\Gamma} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} \left[ p - \frac{1}{3} \mu \text{div} \vec{C} \right] + \nu \nabla^2 \vec{C} \quad (49)$$

**Cas du fluide non-newtonien :**

Pour les fluides non-newtoniens, la loi de comportement est donnée par exemple par la forme de Bingham (22) :

$$\tau_{xy} = \tau_0 + \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

où  $\tau_0$  est une contrainte de cisaillement critique dépendant de plusieurs facteurs.

- d'une part, de sa composition, le fluide non-newtonien étant le plus souvent constitué d'un mélange diphasique ou de fluides de même phase mais non miscibles, par exemple : eau boueuse, pâte à papier, eau-pétrole, gaz-pétrole, etc... ;
- d'autre part, de la forme physique du mélange : concentration des divers constituants, forme du mélange par micro-bulles en suspension ou par macro-inclusions (poches), etc... ; toutes ces propriétés étant non-isotropes et non permanentes en un point donné.

Par analogie avec les écoulements turbulents, on peut écrire que  $\tau_0$  est constitué d'une valeur moyenne et d'une composante fluctuante dépendant de l'hétérogénéité du mélange :

$$\tau_0 = \overline{\tau_0} + \tau'_0$$

$$\overline{\tau_0} \text{ est la valeur moyenne spatiale} = \frac{1}{L} \int_0^L \tau_0 \cdot ds$$

La composante fluctuante étant caractérisée par une moyenne spatiale nulle à condition que celle-ci soit effectuée sur une échelle importante :

$$\overline{\tau'_0} = \frac{1}{L} \int_0^L \tau'_0 ds = 0$$

L'hétérogénéité du mélange est caractérisée par le terme H :

$$H = \frac{\sqrt{(\overline{\tau'_{ox}{}^4} + \overline{\tau'_{oy}{}^4} + \overline{\tau'_{oz}{}^4})}}{\overline{\tau_0}}$$

valeur correspondant au module du vecteur  $\vec{H}$  de composantes :

$$\vec{H} \begin{pmatrix} \frac{\overline{\tau'_{ox}{}^2}}{\tau_0} \\ \frac{\overline{\tau'_{oy}{}^2}}{\tau_0} \\ \frac{\overline{\tau'_{oz}{}^2}}{\tau_0} \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'équation de Navier-Stokes s'écrira, en s'inspirant de la forme (46) :

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \vec{C} + \frac{1}{\rho} \text{grad } H} \quad (49b)$$

**Autre formulation :**

L'expression (46) correspondant au fluide incompressible peut être transformée en introduisant l'expression A-12 de l'accélération :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + \text{grad} \frac{C^2}{2} - \vec{C} \wedge \text{rot } \vec{C}$$

Dans le cas où les forces de volume dérivent d'un potentiel tel que la pesanteur :

$$\vec{f} = - \text{grad } (gh)$$

La relation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} - \vec{C} \wedge \text{rot } \vec{C} = - \text{grad} \left[ \frac{C^2}{2} + gh + \int \frac{dp}{\rho} \right] + \nu \cdot \nabla^2 \vec{C}$$

Introduisons le vecteur tourbillon  $\vec{\Omega}$  défini par :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{C}$$

et prenons le rotationnel des deux membres de cette équation. En retenant que  $\text{rot}(\text{grad}) = 0$  et que  $\nabla^2 \vec{C} = \text{rot}(\text{rot } \vec{C}) = \text{rot}(2\vec{\Omega})$ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{C}) - \text{rot}(\vec{C} \wedge 2\vec{\Omega}) = \nu \text{rot} \left[ \text{rot } 2\vec{\Omega} \right]$$

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{\Omega} \wedge \vec{C}) = \nu \nabla^2 \vec{\Omega}$$

(50)

C'est une des formes alternatives de l'équation de Navier-Stokes. C'est la forme tourbillonnaire établie par Helmholtz.

Elle indique que l'écoulement irrotationnel satisfait l'équation de Navier-Stokes mais ne peut satisfaire les conditions aux frontières. A la surface d'un corps solide, il se forme une couche tourbillonnaire constituant la couche limite qui diffuse ensuite dans l'écoulement et se transforme en chaleur.

## **IV - CARACTERISTIQUES DE L'ÉCOULEMENT VISQUEUX**

L'observation de l'écoulement des fluides est aujourd'hui facilitée par des moyens de mesures de plus en plus performants tels que le fil chaud et, plus récemment, l'anémomètre laser.

La connaissance de la structure fine des écoulements et en particulier des phénomènes turbulents, des couches limites, des sillages a permis de mettre en place des modélisations de plus en plus performantes.

Sur la base des expériences de Reynolds, un pas important a été franchi à la fin du dernier siècle, concernant la structuration des régimes d'écoulement. Prandtl et Von Karman ont présenté au début du vingtième siècle les premiers développements théoriques concernant la couche limite. Celle-ci fait encore l'objet de nombreuses études, tant théoriques qu'expérimentales, portant essentiellement sur la transition et le décollement en présence de gradients de pression positifs ou négatifs et du taux de turbulence.

### **4.1. Régimes d'écoulement**

L'expérience de Reynolds consiste à observer l'écoulement de l'eau dans un tube transparent, écoulement au centre duquel est introduit un fin filet de liquide coloré.

On observe principalement deux régimes distincts :

- un régime laminaire montrant un filet coloré parfaitement rectiligne ne se mélangeant pas à l'écoulement principal. Ce régime est observé aux faibles vitesses, il est parfaitement stable et pratiquement imperturbable.
- un régime turbulent se manifestant à partir d'une certaine distance de l'entrée par une oscillation du filet coloré puis à un mélange intime avec le fluide principal.

En utilisant plusieurs diamètres de tube et différentes viscosités de fluide (en faisant varier par exemple la température), Reynolds a mis en évidence que le régime laminaire était toujours observé lorsque le produit  $C.D/v$  était inférieur à 2300. Ce produit adimensionnel, appelé nombre de Reynolds, quantifie l'ensemble des caractéristiques de l'écoulement : la vitesse moyenne du fluide, le diamètre de la conduite, la viscosité cinématique du fluide.

Au-delà de cette valeur, suivant la qualité de l'entrée du tube, la régularité de la surface intérieure, la présence de vibrations, etc..., l'écoulement laminaire peut ou non se transformer en régime turbulent. Dans des conditions idéales, l'écoulement laminaire peut se maintenir jusqu'à un nombre de Reynolds de  $4.10^4$ . Au-delà, l'écoulement organisé se dégrade systématiquement en écoulement turbulent.

### **4.2. Propriétés des écoulements laminaires**

L'écoulement laminaire se rapproche de l'idée que l'on se fait de l'écoulement d'un fluide parfait pour lequel on imagine un glissement des diverses couches de fluide les unes sur les autres sans échange de particules entre les différentes couches.

Dans ce régime d'écoulement, les effets visqueux sont pourtant prépondérants et on est très loin de l'écoulement potentiel, en particulier au voisinage des parois.

Cependant, par opposition à l'écoulement turbulent, c'est l'organisation et la stabilité qui dominent parmi les propriétés principales de l'écoulement laminaire.

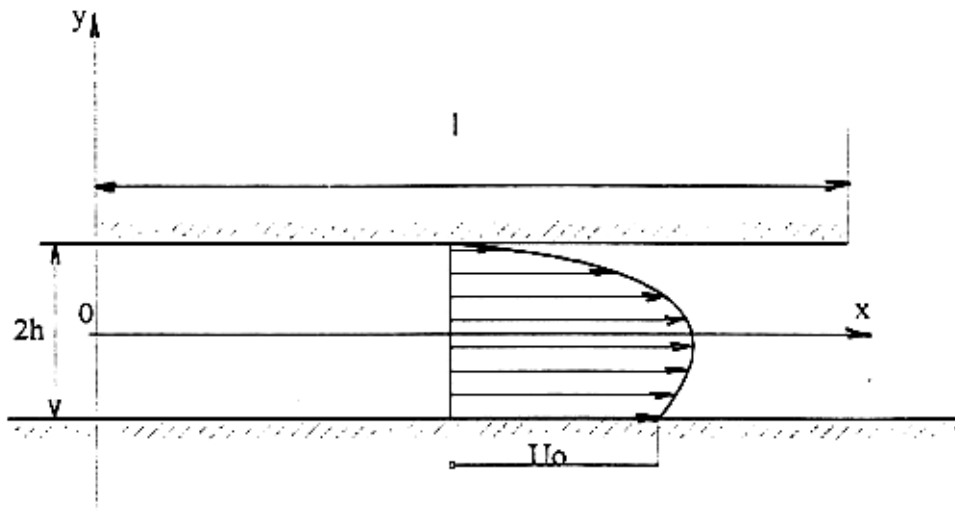
Les applications industrielles les plus importantes correspondent aux paliers et patins hydrodynamiques et à tous les domaines de la lubrification.

Ils correspondent également à l'écoulement en milieu poreux : filtration, applications pétrolières, etc...

L'écoulement laminaire unidimensionnel voire bidimensionnel fournit quelques unes des solutions exactes de l'équation de Navier-Stokes.

### Écoulement entre deux plaques parallèles

L'écoulement s'effectue comme indiqué sur la Figure 9 entre deux plaques planes parallèles de largeur très importante par rapport à la longueur  $l$ . La distance séparant les plaques est égale à  $2h$ . Suivant les cas, il peut exister ou non un gradient de pression et la plaque inférieure peut être fixe ou se déplacer parallèlement à elle-même (vitesse de translation  $U_0$ ).



*Figure 9 : Écoulement de Poiseuille*

Reprenons l'équation de continuité et l'équation de Navier-Stokes (47) exprimée en coordonnées cartésiennes.

#### Hypothèses simplificatrices :

- Les composantes  $v$  et  $w$  de l'écoulement suivant  $y$  et  $z$  sont nulles.
- L'écoulement est permanent, ce qui implique que les termes en  $\frac{\partial}{\partial t}$  sont nuls.
- On suppose les forces de pesanteur négligeables (écoulement horizontal par exemple).

Compte tenu du caractère unidimensionnel de l'écoulement, l'équation de continuité  $\text{div } \vec{C} = 0$  se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

indiquant que la vitesse  $u$  n'est fonction que de  $y$  :

$$u = u(y) \quad (51)$$

Dans ces conditions, les projections de l'équation de Navier-Stokes se réduisent aux trois équations suivantes :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (52)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (53)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (54)$$

Les équations (53) et (54) indiquent que la pression ne dépend que de  $x$ , l'équation du mouvement se réduit alors à :

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \nu \frac{d^2 u}{dy^2}} \quad (55)$$

La composante  $u$  ne dépendant que de  $y$ , l'équation (55) montre que le premier membre ne peut être fonction de  $x$  et, par conséquent, doit être nul ou constant :

$$\text{En posant : } \frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{l} \quad (56)$$

$$\text{avec } \Delta p = p(x=0) - p(x=l) \quad (57)$$

l'équation (55) s'intègre en :

$$\boxed{u = -\frac{\Delta p}{\mu l} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2} \quad (58)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes d'intégration dépendant des conditions aux limites.

### **Conditions aux limites :**

Les conditions aux limites sont données sur la Figure 9 et traduisent les conditions d'adhérence du fluide à la paroi :

$$\begin{aligned} y = -h, & \quad u(-h) = U_0 \\ y = +h, & \quad u(+h) = 0 \end{aligned}$$

On obtient ainsi, d'après (58), deux équations permettant de calculer  $C_1$  et  $C_2$  :

$$\begin{cases} U_0 = -\frac{\Delta p}{\mu l} \frac{h^2}{2} - C_1 h + C_2 \\ 0 = -\frac{\Delta p}{\mu l} \frac{h^2}{2} + C_1 h + C_2 \end{cases}$$

donnant pour  $C_1$  et  $C_2$  :

$$C_1 = -\frac{U_0}{2h} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{U_0}{2} + \frac{\Delta p}{\mu l} \frac{h^2}{2}$$

d'où l'équation générale du mouvement :

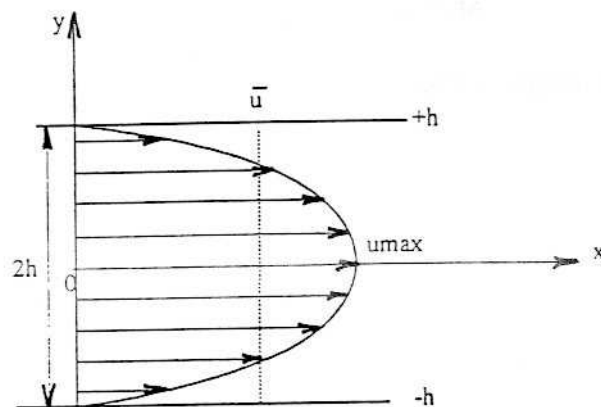
$$u = \frac{U_0}{2} \left[ 1 - \frac{y}{h} \right] + \frac{\Delta p}{\mu l} \frac{h^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (59)$$

Un certain nombre de situations peuvent se rencontrer :

### A) Ecoulement de Poiseuille

La plaque inférieure est immobile ( $U_0 = 0$ ) et l'écoulement s'effectue sous l'action du gradient de pression  $\Delta p/l$ . La distribution de vitesse est parabolique et donnée par l'équation (60) :

$$u = \frac{\Delta p}{\mu l} \frac{h^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (60)$$



**Figure 10** : Distribution de vitesse en écoulement laminaire

La vitesse maximale est obtenue au centre du canal et vaut :

$$\boxed{u_{\max} = \frac{\Delta p}{\mu l} \frac{h^2}{2}} \quad (61)$$

La vitesse moyenne spatiale ou vitesse débitante est obtenue à partir du calcul du débit sur la largeur L :

$$q_v = \int_{-h}^h u L dy = 2h L \bar{u} \quad (62)$$

$$\boxed{\bar{u} = \frac{\Delta p}{\mu l} \frac{h^2}{3} = \frac{2}{3} u_{\max}} \quad (63)$$

Pour une largeur L, le débit est calculable par la relation (64) montrant que celui-ci est proportionnel à la pression motrice  $\Delta p$  :

$$q_v = 2h L \bar{u} = \frac{2}{3} \frac{\Delta p}{\mu l} h^3 L \quad (64)$$

Le nombre de Reynolds de l'écoulement est calculable à partir du diamètre hydraulique  $D_H$  de la section. Il est donné par la relation :

$$\boxed{D_H = \frac{4S}{P}} \quad (65)$$

S est la section de passage :  $2hL$

P est le périmètre :  $4h + 2L$

Soit  $D_H$  pour un écoulement tel que  $h \ll L$  :

$$D_H = \frac{8hL}{2L} = 4h$$

d'où le nombre de Reynolds :

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{4 h \bar{u}}{\nu}} \quad (66)$$

L'écoulement reste laminaire et l'on observe une distribution de vitesse parabolique tant que le nombre de Reynolds reste inférieur à la valeur critique de 2300 à 40000 suivant les conditions d'établissement.

**Contraintes au sein du fluide :**

L'état de contrainte au sein de l'écoulement est donné par l'équation de Newton (21) :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

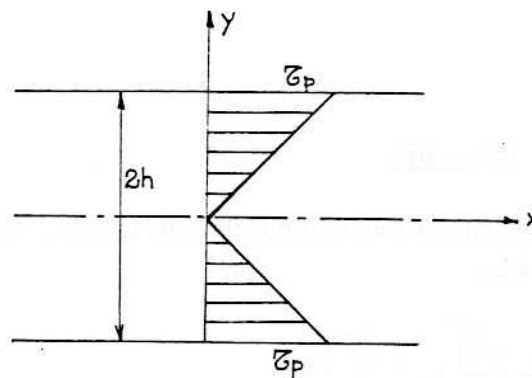
Relation dans laquelle la direction  $y$  désigne la direction allant de la paroi vers le centre de l'écoulement.

Cette contrainte s'annule au centre de l'écoulement où le terme  $du/dy$  s'annule (sommet de la parabole) et se trouve maximale à la paroi (Figure 11) :

$$\tau_p = \mu \cdot \left. \frac{du}{dy} \right|_{y = -h} = -\mu \cdot \left. \frac{du}{dy} \right|_{y = h}$$

$$\boxed{\tau_p = \frac{\Delta p}{l} \cdot h} \quad (67)$$

La contrainte interne est linéaire du centre à la paroi.



*Figure 11 : Distribution des contraintes dans l'écoulement*

**Coefficient de perte de charge :**

La pression motrice à mettre en jeu pour assurer l'écoulement est souvent ramenée à la pression dynamique engendrée par l'intermédiaire d'un coefficient  $\lambda$  appelé coefficient de perte de charge :

$$\boxed{\Delta p = \lambda \cdot \rho \frac{\bar{u}^2}{2}} \quad (68)$$

La pression motrice est égale à la perte de charge par frottement sur les parois et se calcule par l'intermédiaire de la contrainte de paroi  $\tau_p$ .

A l'équilibre, le bilan des forces exercées sur le volume fluide compris entre l'entrée et la sortie s'écrit :

$$\Delta p \cdot 2h L = 2 \tau_p l \cdot L$$

$$\tau_p = \frac{\Delta p}{l} h$$

équation évidemment identique à celle établie en (67).

On introduit également le coefficient de perte de charge linéique  $\Lambda$  défini par la relation :

$$\lambda = \Lambda \cdot \frac{l}{D_H} = \Lambda \cdot \frac{l}{4h} \quad (69)$$

La relation (68) permet de calculer  $\Lambda$  :

$$\Lambda = \frac{4h}{l} \frac{\Delta p}{\rho \frac{\bar{u}^2}{2}}$$

En exprimant  $\bar{u}$  à partir de (63) et en introduisant le nombre de Reynolds défini en (66), on obtient finalement :

$$\Lambda = \frac{96}{\mathcal{R}} \quad (70)$$

### B) Écoulement de Couette généralisé

C'est l'écoulement général décrit par l'équation (59) dans laquelle la vitesse de déplacement de la paroi inférieure est égale à  $U_0$  :

$$u = \frac{U_0}{2} \left[ 1 - \frac{y}{h} \right] + \frac{\Delta p}{\mu l} \frac{h^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (71)$$

Suivant la valeur de  $\Delta p$ , on observe les allures suivantes pour la distribution de vitesse (Figure 12) :

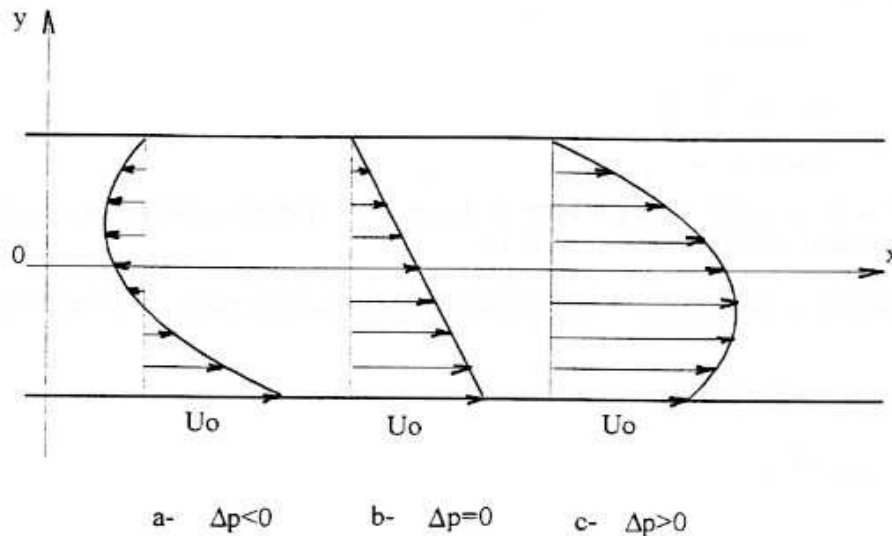


Figure 12 : Différentes distributions de vitesse

On peut noter que le présent écoulement 12-a est susceptible de constituer une pompe capable de débiter en présence d'une contre-pression ( $\Delta p < 0$ ).

### 4.3. Propriétés des écoulements turbulents

Le passage du régime laminaire au régime turbulent s'effectue dans une conduite donnée par augmentation du débit.

La connaissance des propriétés des écoulements turbulents est essentiellement d'origine expérimentale. En régime turbulent, l'écoulement unidimensionnel est instationnaire et présente des fluctuations dans la direction d'écoulement mais également sur les directions normales. Ces fluctuations de caractère aléatoire (régies par les lois du hasard) prennent naissance de l'existence au sein du fluide de tourbillons de taille variable en interaction permanente.

Une étude théorique basée sur l'intégration de perturbations dans l'équation de Navier-Stokes, montre que dans la couche limite, celles-ci sont soit amorties pour de faibles nombres de Reynolds, soit amplifiées pour donner à l'aval un régime turbulent.

En un point quelconque d'un écoulement unidimensionnel, l'enregistrement des valeurs instantanées de la composante  $u$  présente l'allure de la Figure 13.

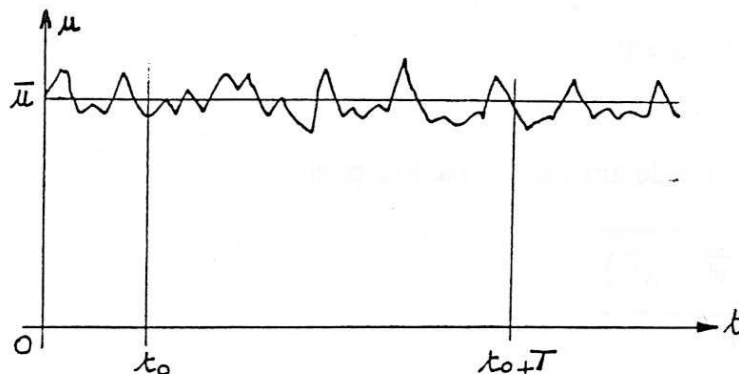


Figure 13 : Fluctuations de la vitesse en fonction du temps

On présente généralement la vitesse comme la somme de la composante moyenne  $\bar{u}$  et d'une composante fluctuante  $u'$  (pouvant atteindre localement 20 à 30% de  $\bar{u}$ ) :

$$\boxed{u = \bar{u} + u'} \quad (72)$$

La composante moyenne  $\bar{u}$  représente la moyenne temporelle établie par :

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} u \cdot dt \quad (73)$$

Pour un écoulement permanent en moyenne, sa valeur reste constante si le temps  $T$  d'observation est suffisamment important.

Par contre, la composante fluctuante possède une moyenne temporelle nulle :

$$\overline{u'} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u' \cdot dt = 0 \quad (74)$$

Les fluctuations de vitesses se produisent également sur les directions normales à l'écoulement principal, les composantes  $v$  et  $w$  ne sont plus nulles mais égales à leurs composantes fluctuantes  $v'$  et  $w'$ .

$$\boxed{\begin{matrix} v = v' \\ w = w' \end{matrix}} \quad (75)$$

Egalement de moyennes temporelles nulles,  $v'$  et  $w'$  satisfont à la relation (74).

En réalisant les moyennes quadratiques, on observe que celles-ci sont non nulles :

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u'^2 \cdot dt > 0 \quad (76)$$

On définit ainsi l'intensité de turbulence  $I$  par le rapport :

$$I = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}}{\bar{u}} \quad (77)$$

Dans le cas d'un écoulement tridimensionnel, le dénominateur sera constitué de la vitesse moyenne  $\bar{C}$ .

### **Coefficients de corrélation :**

L'analyse des variations du coefficient de corrélation  $R_u$  entre les fluctuations de deux composantes présente un grand intérêt :

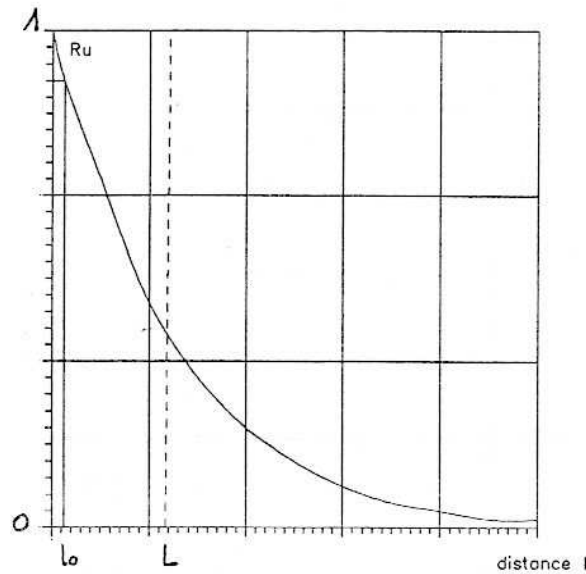
$$R_u = \frac{\overline{u'_1 u'_2}}{\sqrt{\overline{u'^2_1}} \sqrt{\overline{u'^2_2}}} \quad (78)$$

Lorsque  $u'_1$  et  $u'_2$  sont mesurées en deux points différents et que l'on fait varier la distance séparant ces deux points, on peut définir la corrélation spatiale et la longueur de corrélation par l'intégrale :

$$L = \int_0^{\infty} R_u(l) dl \quad (79)$$

représentant l'aire sous la courbe de la Figure 14.

En portant l'évolution de  $R_u$  en fonction de la distance  $l$  séparant les points de mesure, on observe l'évolution suivante :  $R_u = 1$  pour  $l = 0$  et  $R_u = 0$  pour  $l \rightarrow \infty$ .



**Figure 14 :** *Corrélation spatiale pour les fluctuations de même nature*

Pour une corrélation proche de 1, la distance  $l_0$  définit la taille des petits tourbillons,  $L$  définit l'échelle des grands tourbillons.

Dans une conduite de diamètre  $D$ , l'ordre de grandeur de  $l_0$  est de  $0,03 D$ .

La corrélation peut porter également sur deux composantes orthogonales de la vitesse :

$$R_{uv} = \frac{\overline{u'_1 v'_2}}{\sqrt{\overline{u'^2_1}} \sqrt{\overline{v'^2_2}}} \quad (80)$$

Il existe en tout 9 coefficients de corrélation.

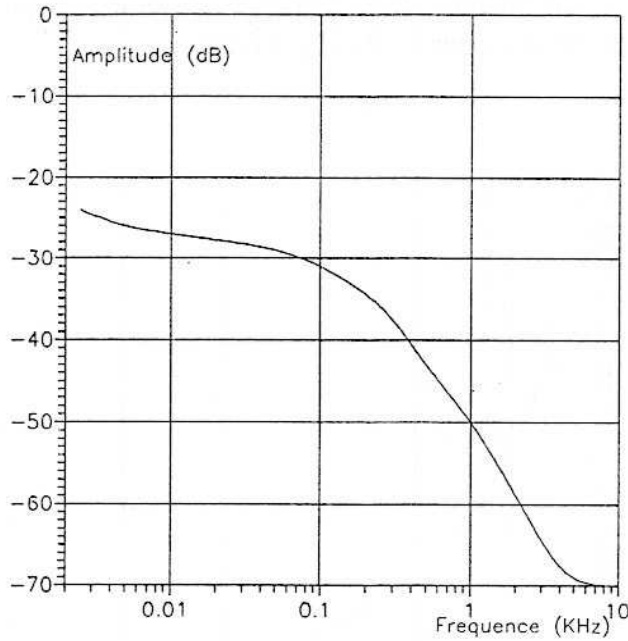
### **Analyse spectrale :**

S'agissant de composantes fluctuantes, l'analyse spectrale permet de décomposer le signal sous la forme d'une série de Fourier et de reporter l'amplitude des différentes sinusoïdes en fonction de leur fréquence  $f$ .

On observe en général un spectre monotone et continu sans fréquence caractéristique.

Si on analyse le terme  $u'^2$ , on obtiendra l'énergie cinétique des fluctuations longitudinales de la vitesse (analyse de Taylor).

Les formes les plus classiques sont données par la Figure 15.



**Figure 15 :** Spectre énergétique de la turbulence

**Interprétation :**

La turbulence s’entretient par prélèvement d’énergie sur l’écoulement principal, assurant la création de grands tourbillons qui se disloquent en formant des tourbillons plus petits jusqu’à une échelle telle qu’ils sont dissipés par viscosité.

**4.4. Modélisation de la turbulence**

En écoulement turbulent, l’influence des termes fluctuants devient plus importante que celle des termes visqueux déjà examinés.

Leur introduction dans les équations nécessite une modélisation qui reste encore aujourd’hui de caractère semi-empirique.

**Equation de continuité :**

En se référant au fluide incompressible, l’équation de continuité instantanée s’écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Comme chacune des composantes est constituée de la somme de deux termes, on calculera les moyennes des différents termes de la manière suivante :

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{\partial u}{\partial x} dt = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial x} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} u dt$$

Equation dans laquelle on reconnaît la définition (73) de  $\bar{u}$  :

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

L'équation de continuité s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0} \quad (81)$$

En remplaçant chaque terme par sa valeur issue de (72), on observera également :

$$\boxed{\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0} \quad (82)$$

montrant que les fluctuations respectent également l'équation de continuité.

**Equation dynamique :**

Toujours en fluide incompressible, considérons la projection sur x de l'équation de Navier-Stokes sous la forme donnée par (43).

$$\rho \Gamma_x = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (83)$$

avec  $\Gamma_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$

Le terme instationnaire  $\frac{\partial u}{\partial t}$  a une moyenne nulle :

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial}{\partial t} u \, dt = \frac{1}{T} [u(t_0 + T) - u(t_0)] = 0 \quad (84)$$

En effet, lorsque l'intervalle de temps T est suffisamment grand, la moyenne du terme instationnaire est nulle pour un écoulement permanent en moyenne.

On démontre que les autres termes se mettent sous la forme :

$$\Gamma_x = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}$$

$$\Gamma_x = \overline{\Gamma_x} - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}$$

qui donne finalement comme projection :

$$\overline{\rho \Gamma_x} = \rho f_x - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\tau_{xx}} - \rho \overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\tau_{xy}} - \rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\tau_{xz}} - \rho \overline{u'w'}) \quad (85)$$

Le tenseur des contraintes est donc modifié puisqu'au tenseur des contraintes visqueuses est soustrait le tenseur des contraintes turbulentes appelé tenseur de Reynolds.

$$\overline{\tau} = 2 \mu \overline{D} - \rho \overline{\tau_t} \quad (86)$$

Rappelons la forme de ces tenseurs :

$\overline{D}$  : tenseur des taux de déformation donné en (31)

$$\text{et } \overline{\tau_t} = \begin{vmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{vmatrix} \quad (87)$$

Chacune des contraintes du tenseur correspond à un coefficient de corrélation entre les composantes fluctuantes de la vitesse en un même point de l'écoulement.

Sauf au voisinage immédiat des parois où les termes  $\partial \overline{u} / \partial y$  sont importants, les contraintes turbulentes sont généralement supérieures aux tensions visqueuses. On s'autorise ainsi à concevoir l'écoulement turbulent d'un fluide comme étant constitué de zones distinctes : les zones visqueuses constituées des couches limites où l'écoulement subit à la fois l'influence des tensions visqueuses et des tensions turbulentes et enfin la zone dite « saine » où ne subsistent que les tensions turbulentes.

La modélisation des fluctuations de vitesses est donné par une relation semi-empirique établie par Prandtl montrant que la fluctuation locale est directement proportionnelle au gradient de vitesse moyenne locale.

On posera donc :

$$u' = l \cdot \frac{d\overline{u}}{dy} \quad (88)$$

où  $l$  est la longueur de mélange de Prandtl.

On admet également que  $v'$  est du même ordre de grandeur que  $u'$  mais de signe opposé, cette estimation étant justifiée par l'équation de continuité des composantes fluctuantes (82).

Ainsi, la tension turbulente s'écrira :

$$\tau_{txy} = -\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{d\overline{u}}{dy} \right| \frac{d\overline{u}}{dy} \quad (89)$$

Le terme  $\rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|$  est donc assimilable à une viscosité que l'on qualifie de viscosité turbulente.

Toujours au titre des modèles empiriques, Von Karman propose comme longueur de mélange une fonction de la distance  $y$  à la paroi :

$$\boxed{l = ky} \quad (90)$$

La contrainte turbulente devient alors :

$$\boxed{\tau_{txy} = \rho k^2 y^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}} \quad (91)$$

L'expérience montre que  $k$  est voisin de 0,41.

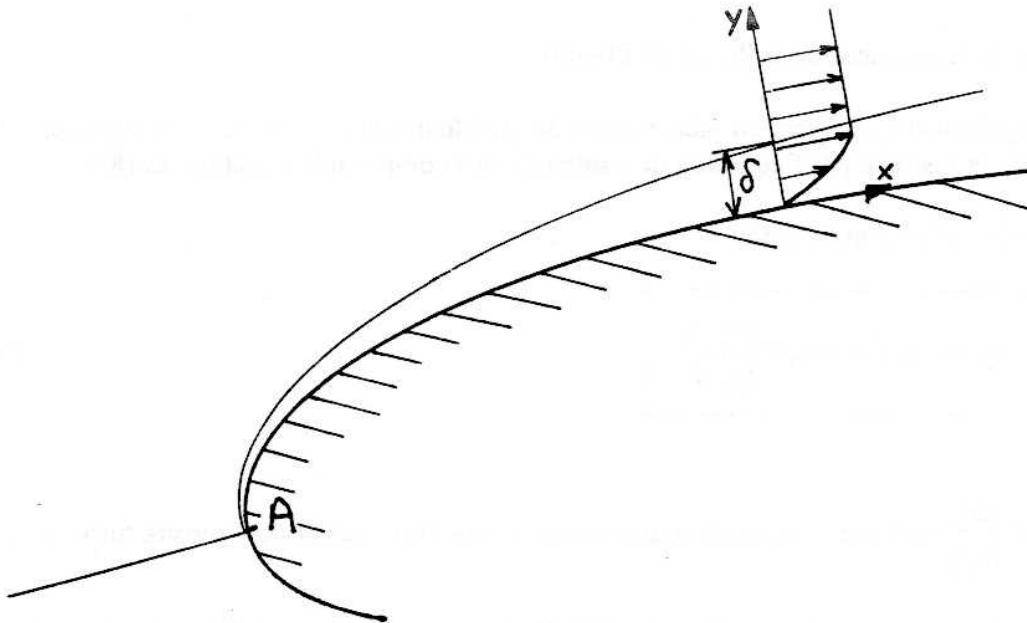
## V - COUCHE LIMITE BIDIMENSIONNELLE

L'une des propriétés des fluides visqueux newtoniens ou non est d'imposer une condition d'adhérence à la surface d'une paroi solide.

Pour le fluide visqueux, la condition à la paroi s'écrira donc  $\vec{C} = 0$  alors qu'elle s'écrit  $\vec{C} \cdot \vec{n} = 0$  en fluide parfait,  $\vec{n}$  représentant la normale locale à la paroi.

Ce ralentissement important n'occupe en réalité qu'une épaisseur réduite par rapport aux dimensions du corps en contact avec le fluide et, très rapidement, en s'éloignant de la paroi, on atteint les valeurs de vitesses égales ou comparables à celles obtenues en fluide parfait (Figure 16).

Cette zone à fort gradient de vitesse est qualifiée de couche limite. Son épaisseur  $\delta$  varie continûment depuis le point d'arrêt et son régime d'écoulement passe du laminaire au turbulent en présentant entre les deux un régime de transition.



La couche limite se sépare ensuite du corps solide vers le bord de fuite en formant, en aval de celui-ci, un sillage généralement très turbulent qui se dissipe dans l'écoulement principal. En dehors de la couche limite, l'écoulement est pratiquement non visqueux puisque les gradients de vitesses sont relativement modestes.

**5.1. Equations régissant la couche limite laminaire**

En s'imposant un repère local dont l'axe Ox est tangent à la paroi et l'axe Oy est normal et dirigé vers l'extérieur, les équations bidimensionnelles d'un écoulement incompressible et stationnaire s'écrivent en négligeant les forces de volume :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (92)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (93)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (94)$$

Un certain nombre de simplifications ont été apportées, permettant d'accéder aux équations caractéristiques dites équations de Prandtl.

On définit pour cela un certain nombre de références permettant d'adimensionnaliser les variables.

$U_e$  : vitesse de référence (par exemple la vitesse à l'extérieur de la couche limite dans la direction x).

$L$  : longueur caractéristique dans la direction x

$\delta$  : longueur caractéristique dans la direction y

On retiendra :  $\frac{\delta}{L} \ll 1$

$U_e \frac{\delta}{L}$  : vitesse de référence dans la direction y

$\rho U_e^2$  : la pression de référence

$\frac{L}{U_e}$  : le temps de référence

Il est alors possible de déterminer l'ordre de grandeur de chacun des membres des équations du mouvement.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (92)$$

$$\boxed{\frac{U_e}{L} \quad \frac{U_e \delta}{L \delta} = \frac{U_e}{L}}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (93)$$

$$\boxed{U_e \cdot \frac{U_e}{L} = \frac{U_e^2}{L}} \quad \boxed{U_e \frac{\delta}{L} \cdot \frac{U_e \delta}{\delta} = \frac{U_e^2}{L}} \quad \boxed{\frac{U_e^2}{L}} \quad \boxed{\nu \cdot \frac{U_e}{L^2}} \quad \boxed{\nu \cdot \frac{U_e}{\delta^2}}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (94)$$

$$\boxed{U_e \frac{U_e \delta}{L^2}} \quad \boxed{U_e \frac{\delta}{L} \cdot \frac{U_e \delta}{L} \cdot \frac{1}{\delta}} \quad \boxed{\frac{U_e^2}{\delta}} \quad \boxed{\nu \cdot \frac{U_e \delta}{L} \cdot \frac{1}{L^2}} \quad \boxed{\nu \cdot \frac{U_e \delta}{L} \cdot \frac{1}{\delta^2}}$$

Pour l'équation (92), les deux termes subsisteront tandis que dans les termes visqueux de (93), seul le second terme sera conservé (fort gradient transversal et faible gradient longitudinal). Dans l'équation (94), seul le terme de pression et le second terme de viscosité subsistent. Si l'on effectue pour l'équation (93) le rapport entre le terme de pression et le terme visqueux, on obtient :

$$\frac{U_e^2}{L} \cdot \frac{\delta^2}{\nu U_e} = \frac{U_e \delta^2}{L \cdot \nu} = \frac{U_e L}{\nu} \cdot \left(\frac{\delta}{L}\right)^2$$

En effectuant la même opération pour l'équation (94), on aura :

$$\frac{U_e^2}{\delta} \cdot \frac{\delta L}{\nu U_e} = \frac{U_e L}{\nu}$$

montrant que le terme visqueux du second membre est négligeable devant le terme de pression pour l'équation (94).

Compte tenu de ces simplifications, les équations de Prandtl de la couche limite laminaire sont données ci-dessous :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned}} \quad (95)$$

La dernière équation indique que la couche limite transmet à la paroi la pression existant à la périphérie de la couche à la même abscisse :

$$p(y = 0) = p(y = \delta)$$

C'est un point très important concernant les prises de pression effectuées à la paroi.

En présence d'une forte courbure de rayon  $R_C$ , on utilisera :

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{u^2}{R_C}} \quad (96)$$

Autre expression :

A la périphérie de la couche limite, l'écoulement est pratiquement non visqueux et peut se calculer selon la théorie potentielle.

Selon le théorème de Bernoulli (14), la vitesse à la limite  $U_e(x)$  est liée à la pression  $p_e(x)$  par la relation :

$$p_e(x) + \rho \frac{U_e^2(x)}{2} = \text{cte}$$

Sachant que  $p_e$  ne dépend pas de  $y$ , on peut écrire :

$$\boxed{-\frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx} = U_e \frac{dU_e(x)}{dx}} \quad (97)$$

d'où l'expression finale :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= U_e \cdot \frac{dU_e}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}} \quad (98)$$

où  $U_e$  est une fonction de  $x$  décrite par la théorie potentielle.

Conditions aux limites :

- A la paroi :  $y = 0$  et  $u = v = 0$
- A la périphérie de la couche limite :  $y = \delta(x)$  et  $u = U_e(x)$

**A) Couche limite laminaire à la surface d'une plaque plane**

C'est un cas très intéressant pour lequel une solution a été proposée par Blasius au début du vingtième siècle.

On imagine une plaque plane lisse et infiniment mince disposée parallèlement à la direction de l'écoulement.

L'écoulement potentiel est de la forme  $Ue(x) = cte$ , ainsi le terme  $\frac{dUe}{dx}$  est nul (Figure 17).

En introduisant la fonction de courant  $\psi$ , les composantes de la vitesse prennent la forme :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (99)$$

La fonction de courant satisfaisant l'équation de continuité, l'écoulement dans la couche limite est alors régi par une seule équation issue de (98) :

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}} \quad (100)$$

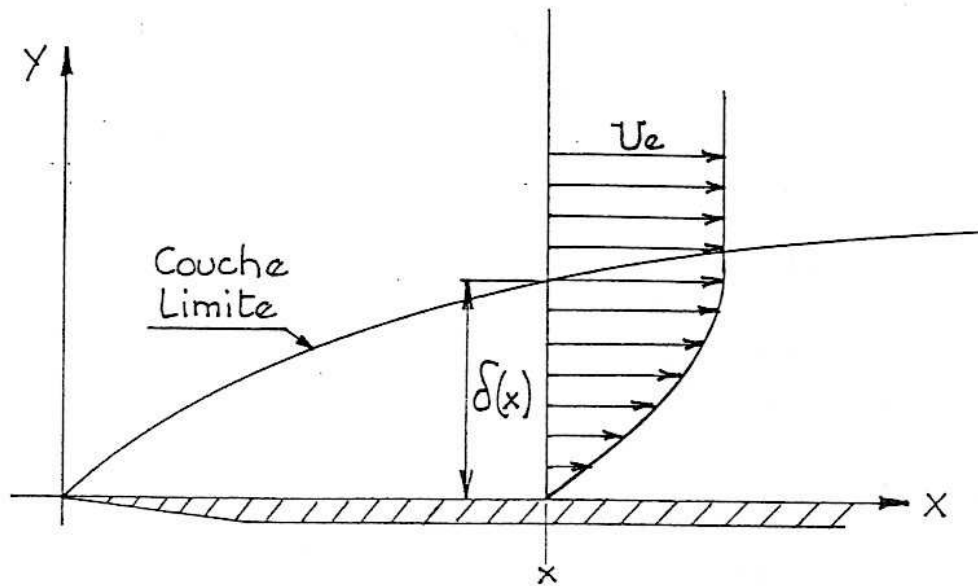
Pour simplifier cette équation, on introduit la variable adimensionnelle  $s$  et la fonction  $f(s)$  :

$$s = y \cdot \sqrt{\frac{Ue}{\nu x}} = \frac{y}{x} \sqrt{\mathcal{R}_x} \quad (101)$$

$$\psi = \sqrt{\nu x Ue} \cdot f(s) \quad (102)$$

$\mathcal{R}_x$  est un nombre Reynolds construit avec la distance parcourue à la surface de la plaque plane à partir du point d'arrêt :

$$\boxed{\mathcal{R}_x = \frac{Ue x}{\nu}} \quad (103)$$



**Figure 17 :** Evolution de la vitesse à la surface de la plaque plane

Les relations (99) et (100) s'écrivent alors :

$$u = \sqrt{v_x U_e} \cdot \sqrt{\frac{U_e}{v_x}} \cdot \frac{df}{ds} = U_e \frac{df}{ds} \quad (104)$$

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v U_e}{x}} \left[ s \cdot \frac{df}{ds} - f \right] \quad (105)$$

$$f \cdot \frac{d^2 f}{ds^2} + 2 \frac{d^3 f}{ds^3} = 0 \quad (106)$$

Conditions aux limites :

A la paroi :  $s = 0 \quad \frac{df}{ds} = 0 \quad f = 0 \quad (\text{d'après 104 et 105})$

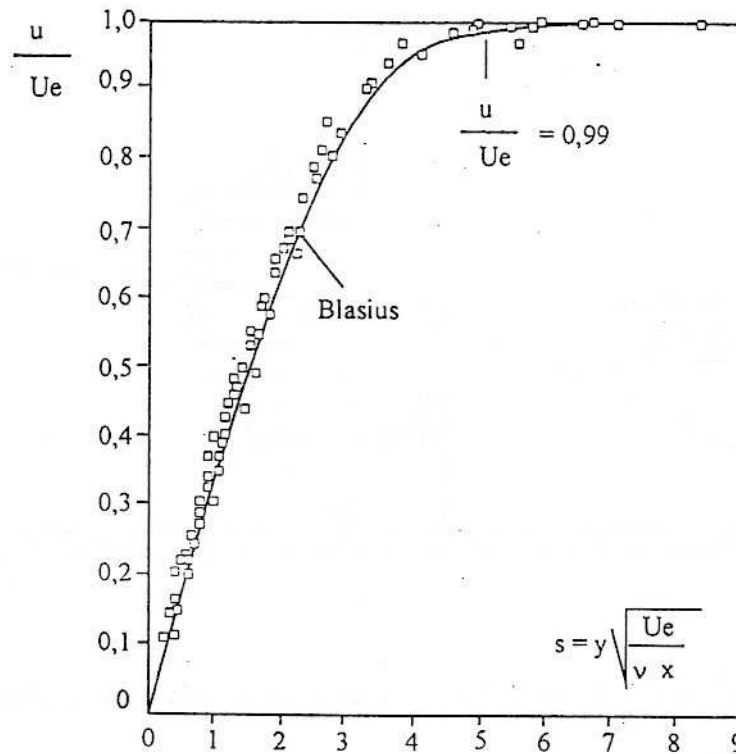
Sachant que dans ce cas précis, la vitesse ne varie pas de  $y = \delta(x)$  jusqu'à l'infini, on écrira :

$$s \rightarrow \infty \quad u = U_e \text{ et d'après (104) : } \frac{df}{ds} = 1$$

L'intégration numérique de la relation (106) permet d'accéder aux caractéristiques locales de la couche limite laminaire. La fonction  $f$  est tabulée en Annexe R17.

Profil de vitesse :

Le profil de vitesses est obtenu en traçant l'évolution de  $\frac{u}{U_e} = \frac{df}{ds}$  en fonction de  $s$  (Figure 18).



**Figure 18 :** Profil de vitesse de la couche limite laminaire à la surface d'une plaque plane

Le profil théorique de Blasius est comparé avec les résultats d'essais de Dhawan (NACA TN 2567-1952).

Contrainte à la paroi :

Celle-ci est calculée à partir de la relation de Newton :

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

que l'on peut calculer à partir des relations (104) et précédentes :

$$\tau_p = \mu \cdot U_e \cdot \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \cdot \frac{d^2f}{ds^2} (0) \tag{107}$$

On définit le coefficient de frottement à la paroi par le rapport adimensionnel ci-dessous :

$$\boxed{C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho U_e^2}} \quad (108)$$

En remplaçant  $\tau_p$  par sa valeur issue de (107) et en tirant de l'annexe R17 la valeur de  $\frac{d^2f}{ds^2}(0) = 0,33206$ , on obtient finalement :

$$\boxed{C_f = \frac{0,664}{\sqrt{(\mathcal{R}_x)}}} \quad (109)$$

où le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_x$  est défini en (103).

#### Epaisseur de la couche limite :

Par convention, on admet que la limite de la couche frontière est atteinte lorsque la vitesse  $u(y)$  atteint 99% de la valeur atteinte à la limite, à savoir :

$$\frac{u}{U_e} = 0,99 \quad (110)$$

L'Annexe 17 et la Figure 18 indiquent que cette valeur est obtenue pour  $s = 5$ .

On aura ainsi, d'après (101), en désignant par  $\delta$  cette épaisseur :

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{v x}{U_e}} \quad (111)$$

ou encore :

$$\boxed{\delta = \frac{5 x}{\sqrt{\mathcal{R}_x}}} \quad (112)$$

Utilisant l'équation (112), on obtiendrait les valeurs de  $\delta$  suivantes :

Pour de l'air et pour  $x = 1$  m :

$$\begin{aligned} \delta &= 19 \text{ mm} && \text{pour } U_e = 1 \text{ m/s} \\ \delta &= 6 \text{ mm} && \text{pour } U_e = 10 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Pour de l'eau et pour  $x = 1$  m :

$$\begin{aligned} \delta &= 5 \text{ mm} && \text{pour } U_e = 1 \text{ m/s} \\ \delta &= 2,9 \text{ mm} && \text{pour } U_e = 3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Comme le montre la relation (112), lorsque  $x$  augmente, l'épaisseur de couche limite augmente aussi. Cependant, à partir d'un certain nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_x$ , l'écoulement dans la couche limite devient transitoire puis turbulent et les relations proposées ne sont plus applicables.

### B) Cas général

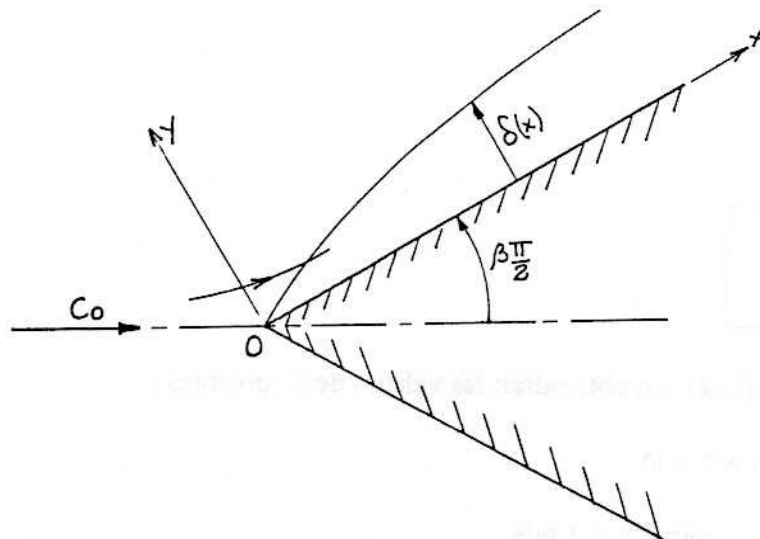
La méthode décrite précédemment nécessite la connaissance de l'écoulement potentiel  $Ue(x)$  au voisinage d'une paroi pour donner un ordre de grandeur au terme  $Ue \frac{dUe}{dx}$  figurant dans l'expression générale (98).

Falkner et Skan ont étendu la méthode précédente au cas général :

$$\boxed{Ue(x) = Co x^m} \quad (113)$$

Relation dans laquelle  $Co$  est une constante et où  $m$  peut prendre des valeurs réelles positive, négative ou nulle (ramenant au cas de la plaque plane étudié précédemment).

La relation (113) correspond à l'écoulement potentiel sur un dièdre pour lequel l'axe  $Ox$  est confondu avec la face étudiée (Figure 19).



**Figure 19 :** Ecoulement sur un dièdre

**Rappel : (chapitre A - §2.4.)**

La fonction potentiel  $F(z)$  correspondant à l'équation :

$$F(z) = Co \frac{z^{m+1}}{m+1} \quad (114)$$

s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$F(z) = \frac{Co}{m+1} r^{m+1} [\cos (m+1) \theta + i \sin (m+1) \theta ]$$

En l'identifiant à la forme générale  $\phi + i\psi$ , on peut déduire la fonction de courant  $\psi$  :

$$\psi = \frac{Co}{m+1} r^{m+1} \sin (m+1) \theta \quad (115)$$

La forme du profil correspondant à  $\psi = 0$  est obtenue pour :

$$\sin (m+1) \theta_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_0 = \frac{m\pi}{m+1} \quad \text{avec } m \text{ entier.}$$

En remarquant que  $\theta_0$  est identique à  $\frac{\beta}{2} \pi$ , on retient pour toutes les valeurs de  $m$  :

$$\boxed{\beta = \frac{2m}{m+1}} \quad (116)$$

- $m = 0$  et  $\beta = 0$  correspondant à une plaque plane disposée dans la direction de l'écoulement.
- $m = 1$  et  $\beta = 1$  correspondant à une plaque plane perpendiculaire à l'écoulement.

Les composantes de la vitesse sont données par :

$$\begin{cases} Cr = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = Co r^m \cos (m+1) \theta \\ Cu = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = Co r^m \sin (m+1) \theta \end{cases}$$

Si enfin on effectue un changement de repère correspondant à une rotation d'angle  $(m+1)\theta$ , les deux composantes deviennent :

$$\begin{cases} Cr = Co r^m \\ Cu = 0 \end{cases}$$

Soit avec les notations retenues jusqu'ici :

$$\boxed{Ue = Co \cdot x^m} \quad (117)$$

identique à la relation (113) proposée.

- $\beta > 0$  et  $m > 0$  correspondent à une accélération de l'écoulement en fonction de  $x$  et à un gradient de pression négatif.
- $\beta < 0$  et  $m < 0$  correspondent à une décélération et à un gradient de pression positif. Lorsque ce gradient atteint une valeur suffisante, on obtient un décollement de la couche limite de la paroi.

En introduisant  $s$  et  $f(s)$  sous les formes suivantes, similaires à (101) et (102) :

$$s = \sqrt{m+1} \frac{y}{x} \sqrt{\mathcal{R}x} \quad (118)$$

$$\Psi = \sqrt{\frac{1}{m+1}} v_x Ue \cdot f(s) \quad (119)$$

On obtient alors les relations :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = Ue \frac{df}{ds} \quad (120)$$

$$v = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{v Ue}{x}} \sqrt{m+1} \left( f + s \frac{m-1}{m+1} \frac{df}{ds} \right) \quad (121)$$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit alors :

$$f \frac{d^2 f}{ds^2} + 2 \frac{d^3 f}{ds^3} + \frac{2m}{m+1} \left[ 1 - \left( \frac{df}{ds} \right)^2 \right] = 0 \quad (122)$$

La résolution numérique proposée par Hartree, ainsi que les conditions aux limites, sont identiques à celles retenues précédemment, le terme  $m$  est un paramètre.

La Figure 20 donne les valeurs du profil de vitesse pour diverses valeurs de  $m$ .

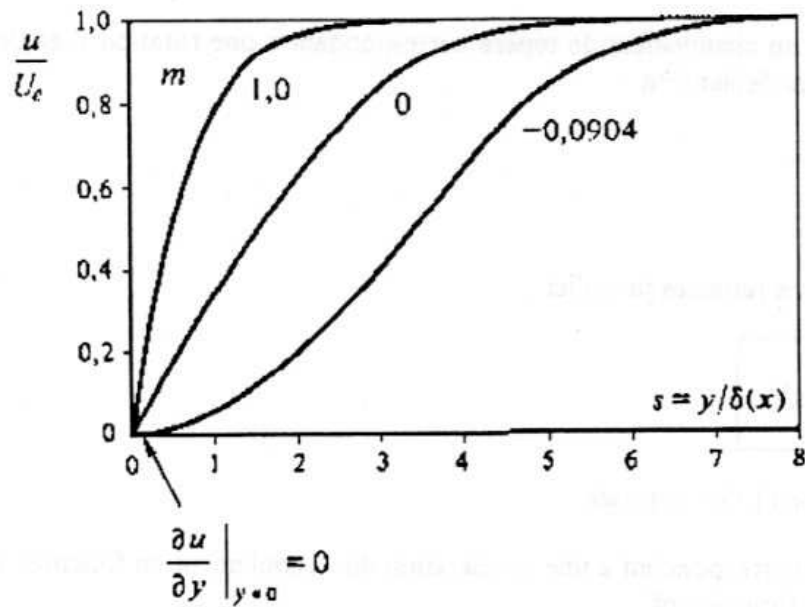


Figure 20 : couche limite laminaire sur différents dièdres

Parmi ces caractéristiques, la plus importante est celle correspondant à  $m = -0,0904$ .

Pour cette valeur limite, on observe  $\left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} = 0$ , conduisant à l'annulation de la contrainte de cisaillement à la paroi. **Cette condition est celle qui sera retenue comme critère de décollement de la couche limite laminaire.**

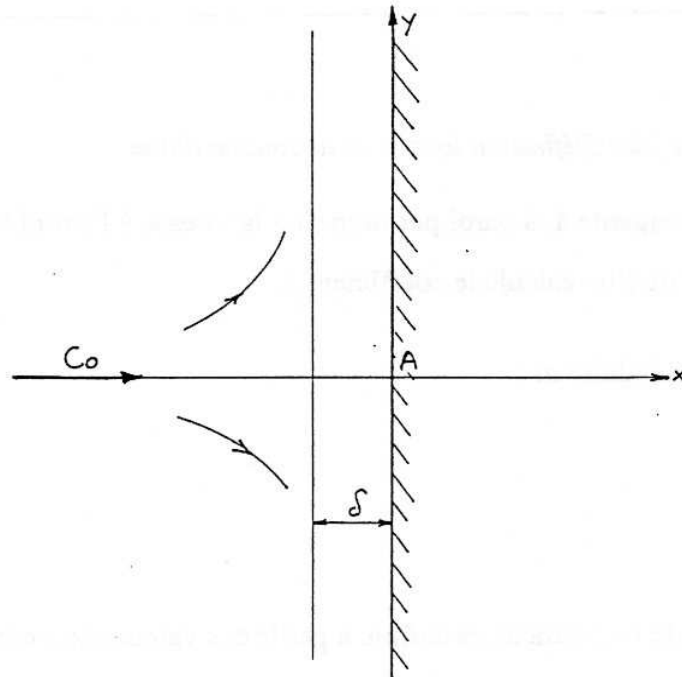
Le demi-angle correspondant est égal d'après (116) à  $-0,3121$  radian soit encore à  $-17,88^\circ$ .

Pour  $m = 1$  (Figure 21), l'épaisseur de couche limite est donnée pour  $\frac{u}{U_e} = 0,99$ , soit pour  $s = 3,4$  correspondant d'après (118) à :

$$\sqrt{2} \frac{\delta}{x} \sqrt{\frac{C_o x^2}{\nu}} = 3,4$$

soit :  $\delta = 2,4 \sqrt{\frac{\nu}{C_o}}$  (123)

Valeur constante en fonction de  $x$  et de  $y$ .



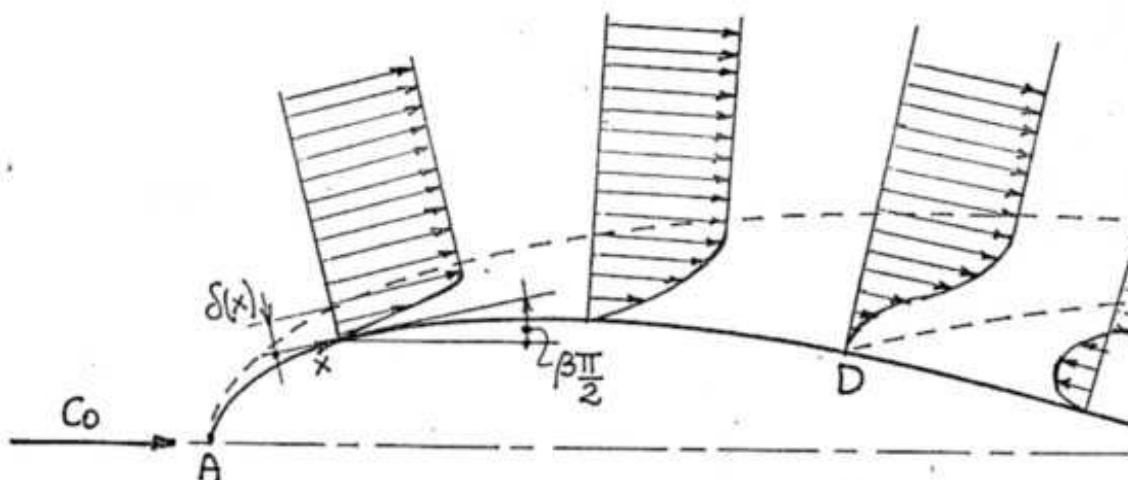
**Figure 21 :** Couche limite à la surface d'un plan perpendiculaire à l'écoulement

**5.2. Evolution de la couche limite laminaire à la surface d'une paroi de forme quelconque**

Lorsque l'écoulement potentiel n'est pas de la forme  $Ue(x) = C_0 x^m$ , on qualifie la couche limite de non-autosimilaire. C'est le cas que l'on doit traiter lors de l'étude de l'écoulement autour de formes comme celles des profils aérodynamiques.

La méthode la plus sommaire consiste à remplacer les résultats obtenus aux différentes abscisses curvilignes par ceux obtenus pour la plaque plane aux mêmes abscisses linéaires pour les mêmes valeurs de m.

L'abscisse x est définie à partir du point d'arrêt sur l'obstacle.



**Figure 22 :** Définition locale de la couche limite

A l'abscisse  $x$ , on définit la tangente à la paroi par rapport à la vitesse à l'infini  $Co$ . Cet angle est égal à  $\beta \frac{\pi}{2}$  (Figure 19), d'où l'on calcule le coefficient  $\beta$ .

La relation (116) permet d'en déduire  $m$  :

$$\boxed{m = \frac{\beta}{2 - \beta}} \quad (124)$$

L'épaisseur de la couche limite  $\delta(x)$  sera alors définie à partir des valeurs de  $s$  correspondant à  $\frac{u}{U_e} = 0,99$  illustrées en Figure 20 :

$$\boxed{s_{99} = 3,028 + \frac{0,437}{0,1987 + m}} \quad (125)$$

Partant de cette valeur, on peut déduire l'épaisseur de couche limite  $\delta$  en se référant à la définition de  $s$  donnée en (118) :

$$\boxed{\delta = x \cdot \frac{s_{99}}{\sqrt{m+1}} \frac{1}{\sqrt{\frac{U_e x}{\nu}}}} \quad (126)$$

Cette application nécessite évidemment la connaissance de  $U_e(x)$  qui aura été déterminée au préalable grâce à l'écoulement potentiel en fluide parfait. Le chapitre C permet de résoudre ce type de problème lorsque le profil est défini géométriquement.

Si la couche limite reste laminaire, le décollement s'effectuera à partir du point D, formant l'angle de  $-17,88^\circ$  avec la direction de  $Co$  (Figure 22).

Cette méthode présente l'avantage d'être rapide et permet d'obtenir avec une précision acceptable l'épaisseur de couche limite  $\delta$ . Aucune indication n'est fournie concernant le profil de vitesse. Celui-ci n'est accessible que par intégration numérique de l'équation de Prandtl fournie en (98).

### **Contrainte à la paroi :**

La contrainte à la paroi  $\tau_p$  est donnée par la relation de Newton :

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Compte tenu de la définition de  $s$  donnée en (118) et de la définition de  $u$  donnée en (120) :

$$s = \sqrt{m+1} \frac{y}{x} \sqrt{\frac{Ue x}{\nu}}$$

$$u = Ue \frac{df}{ds}$$

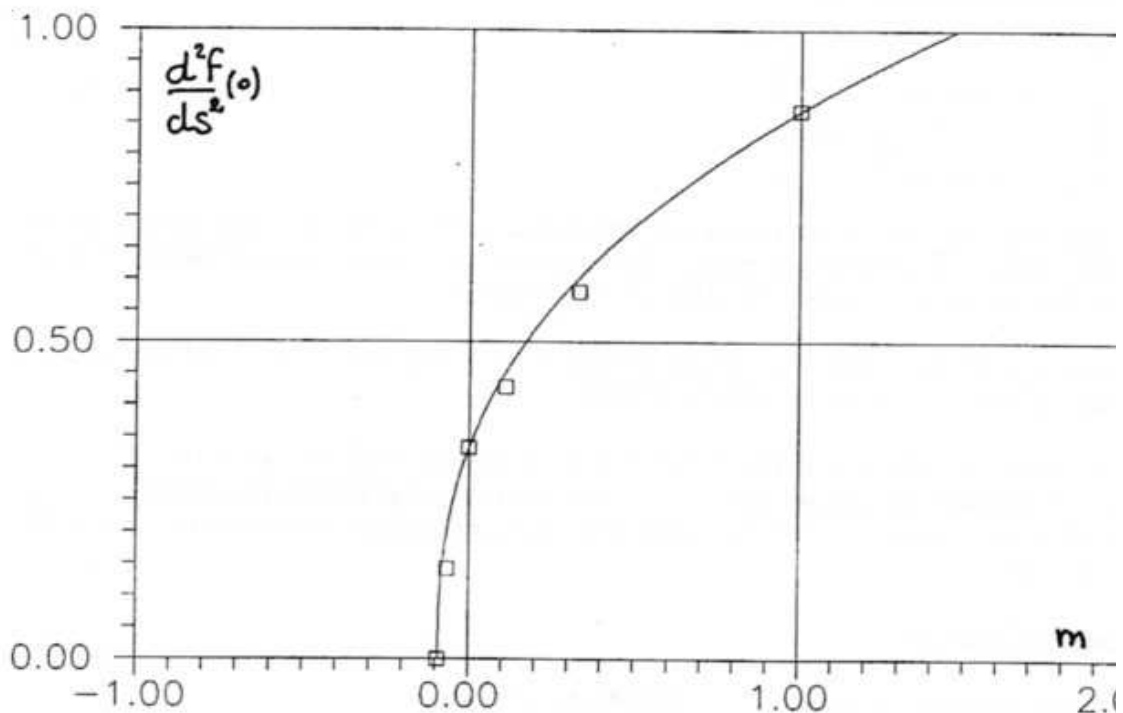
Il est possible de déterminer  $\tau_p$  à partir du calcul de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Ue \frac{d^2f}{ds^2} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} = Ue \sqrt{m+1} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{Ue x}{\nu}} \cdot \frac{d^2f}{ds^2} \quad (127)$$

et d'en déduire  $C_f$  d'après (108) :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} = \frac{2 \sqrt{m+1}}{\sqrt{\frac{Ue x}{\nu}}} \frac{d^2f}{ds^2} (0) \quad (128)$$

Les valeurs de la pente à l'origine sont disponibles en fonction de  $m$  (Figure 23).



**Figure 23 :** Evolution du gradient de vitesse à la paroi en fonction de  $m$

Cette fonction peut être modélisée par la corrélation suivante :

$$\frac{d^2f}{ds^2}(0) = 0,841 (m + 0,0904)^{0,387}$$

conduisant à la relation générale :

$$Cf = \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{\frac{Ue x}{\nu}}} 1,682 (m + 0,0904)^{0,387} \quad (129)$$

On retrouve pour la plaque plane ( $m = 0$ ) la valeur classique donnée par (109) :

$$Cf = \frac{0,664}{\sqrt{\frac{Ue x}{\nu}}}$$

Pour une définition plus précise, on se reportera aux travaux de Von Karman, Polhausen et Thwaites.

**Remarque :**

Pour améliorer la précision, et selon le développement de la théorie de la couche limite auto-similaire, divers auteurs [105], ont proposé de remplacer l'angle  $\beta$  défini géométriquement par un développement de la fonction potentielle  $Ue(x)$  :

$$\beta = \frac{2}{Ue^2} \frac{dUe}{dx} \int_0^x Ue(x) dx \quad (130)$$

En adoptant pour  $Ue$  la forme  $Co x^m$ , on retrouve l'expression déjà établie :

$$\beta = \frac{2 m}{m + 1}$$

Cette démarche donne des résultats tout à fait acceptables et plus précis que ceux obtenus en remplaçant  $\beta$  par sa valeur géométrique.

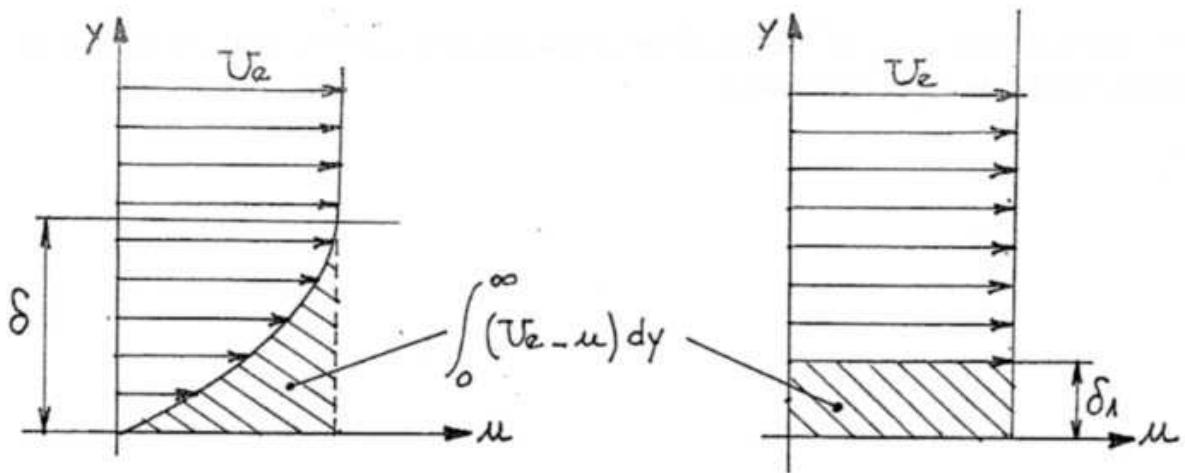
**5.3. Autres paramètres caractéristiques de la couche limite**

D'autres paramètres caractéristiques sont utilisés dans l'étude et la modélisation de la couche limite. En plus de l'épaisseur  $\delta$ , on introduit  $\delta_1$  l'épaisseur de déplacement et  $\delta_2$  l'épaisseur de quantité de mouvement, grandeurs utilisées dans les équations dynamiques intégrées.

Epaisseur de déplacement  $\delta_1$  :

Elle correspond au déficit de débit lié à la présence de la couche limite. On écrit, par définition :

$$\delta_1 U_e = \int_0^{\infty} (U_e - u) dy \tag{131}$$



*Figure 24 : Epaisseur de déplacement de la couche limite*

Comme  $u$  ne varie pratiquement plus à partir de  $\delta$ , la relation (131) permet de calculer  $\delta_1$  suivant la forme :

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \tag{132}$$

Epaisseur de quantité de mouvement  $\delta_2$  :

On définit de la même façon l'épaisseur  $\delta_2$  correspondant du bord d'attaque jusqu'à l'abscisse  $x$ , la variation de quantité de mouvement :

$$\rho U_e^2 \delta_2 = \int_0^{\infty} \rho u (U_e - u) dy \tag{133}$$

d'où la valeur de  $\delta_2$  :

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (134)$$

qui représente la perte de quantité de mouvement associée à la couche limite.

On observe toujours l'inégalité :

$$\delta > \delta_1 > \delta_2$$

### Equation intégrale de Von Karman :

Von Karman a intégré l'équation de Navier-Stokes de la paroi  $y = 0$  jusqu'à l'épaisseur  $y = \delta$ , on obtient ainsi une équation différentielle ordinaire en  $\delta_2$  [réf. 105-1985].

$$\frac{d}{dx} (U_e^2 \cdot \delta_2) + U_e \frac{dU_e}{dx} \cdot \delta_1 = \frac{\tau_p}{\rho} \quad (135)$$

En divisant par  $U_e^2$ , on fait apparaître le coefficient de frottement  $C_f$  et on obtient :

$$\frac{d \delta_2}{dx} = \frac{C_f}{2} - \frac{\delta_2}{U_e} (H + 2) \frac{dU_e}{dx} \quad (136)$$

où  $H$  représente le paramètre de forme :

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (137)$$

Polhausen a introduit un deuxième paramètre de forme  $K$  :

$$K = \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$$

qui permet d'écrire l'équation intégrale de la couche limite sous la forme (138) :

$$U_e \frac{d}{dx} \left( \frac{\delta_2^2}{\nu} \right) = F(K) \quad (138)$$

Walz et Thwaites ont enfin proposé une forme très simple pour  $F(K)$  permettant l'intégration de (138) :

$$F(K) = 0,45 - 6K \quad (139)$$

donnant l'expression générale :

$$\frac{\delta_2^2}{\nu} = 0,45 \cdot Ue^{-6} \int_0^x Ue^5 \cdot dx \quad (140)$$

Thwaites a proposé un tableau numérique permettant de traiter avec une excellente précision les principaux cas lorsque la fonction  $Ue(x)$  est connue.

Ce tableau numérique reporté en Annexe R18 permet, comme au chapitre précédent, de calculer les différentes épaisseurs de couche limite et les valeurs de la contrainte de paroi sans pour autant définir le profil de vitesse. Le décollement de la couche limite s'effectue pour  $K = -0,09$ .

Dans le cas de la plaque plane où  $\frac{dUe}{dx} = 0$ , l'équation de Von Karman s'écrit d'après (136) :

$$\delta_2 = \int_0^x \frac{Cf}{2} dx$$

En retenant l'expression (109) pour  $Cf$ , on obtient finalement :

$$\frac{\delta_2}{x} = \frac{0,664}{\sqrt{R_x}} \quad (141)$$

### 5.4. Couche limite turbulente

La couche limite laminaire est caractérisée par un écoulement sans fluctuations de vitesse locale. Lorsque le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_x$  prend une valeur suffisante, on observe l'apparition de bouffées turbulentes de faible durée et de faible amplitude longitudinale.

En introduisant un facteur d'intermittence  $\gamma$  qui est la fraction du temps correspondant au régime turbulent, on peut définir la zone de transition par le critère suivant :

Elle débute lorsque  $\gamma = 2\%$  et se termine lorsque  $\gamma$  vaut 90%. La couche limite est alors considérée comme turbulente. Le début et la fin de cette zone de transition dépendent beaucoup de la turbulence de l'écoulement hors couche limite mais également de la courbure et de la rugosité de la paroi.

Dans de nombreux cas, on néglige la longueur de la zone de transition en supposant que la couche limite change brutalement de régime en passant du laminaire au turbulent.

Plusieurs corrélations de prévision de transition sont disponibles, la plus simple concerne la plaque plane pour laquelle on observe :

$$\mathcal{R}_x = 3 \cdot 10^5 \text{ à } 3 \cdot 10^6 \quad (142)$$

Du début à la fin de la transition, une forte variation du gradient de vitesse de paroi est constaté. Il se traduit par une chute du facteur de forme et un accroissement tout aussi brutal du coefficient de frottement  $C_f$  (figure 25).

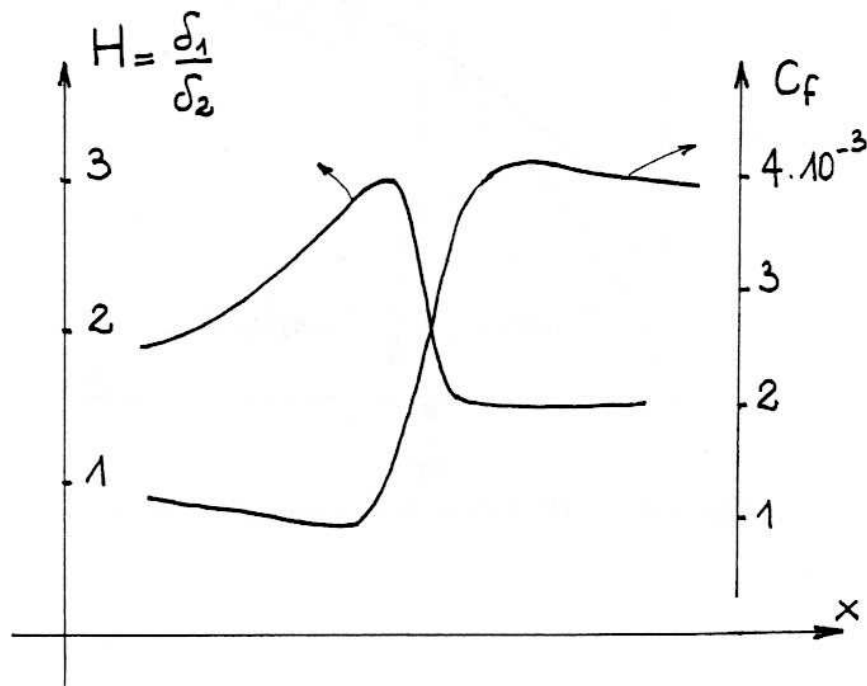


Figure 25 : Evolution de  $H$  et  $C_f$  au voisinage dans la zone de transition

Les travaux de Smith concluent sur une zone de transition définie par la démarche suivante :

A chaque étape du calcul de la couche limite,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont accessibles ainsi que le nombre de Reynolds associé à  $\delta_2$  :

$$\mathcal{R}_{\delta_2} = \frac{Ue \delta_2}{\nu} \quad (143)$$

La zone stable (laminaire) est définie par :

$$\mathcal{R}_{\delta_2} < (\mathcal{R}_{\delta_2})_{tr} \quad (144)$$

avec  $(\mathcal{R}_{\delta_2})_{tr} = 1,174 \left[ 1 + \frac{22400}{\mathcal{R}_x} \right] \mathcal{R}_x^{0,46}$  (145)

La transition  $x_T$  apparaît à l'intersection des deux nombres de Reynolds en fonction de l'abscisse  $x$  :

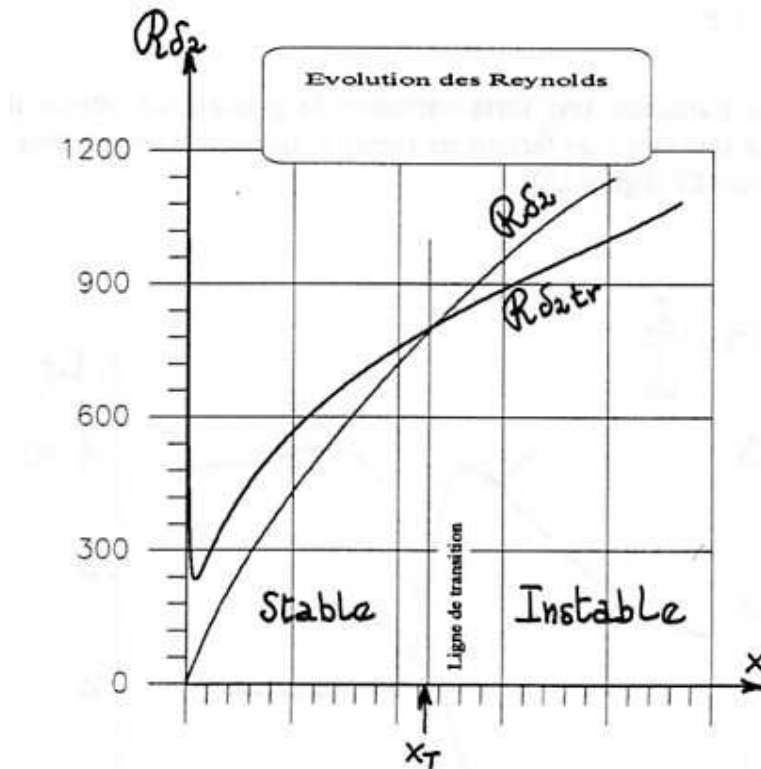


Figure 26 : Définition de la transition selon Smith

### Equation de la couche limite en régime turbulent

Les équations de la couche limite turbulente bidimensionnelle incompressible se réduisent à des expressions comparables à (98) dans lesquelles apparaissent les tensions turbulentes jusqu'ici absentes. Elles s'écrivent à partir des moyennes temporelles des composantes de la vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) \end{aligned} \quad (146)$$

Les tensions turbulentes difficilement modélisables sont maintenant prépondérantes sauf au voisinage immédiat de la paroi.

La contrainte de cisaillement au sein du fluide est, d'après (146), formée de deux termes :

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \quad (147)$$

### Profils de vitesses associés à la plaque plane

Sous-couche laminaire :

A la paroi, le terme  $\overline{\rho u'v'}$  est nul et l'on retrouve :

$$\tau_p = \mu \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{y=0} \quad (148)$$

L'influence de la viscosité ne se fait sentir que dans une zone appelée sous-couche laminaire inférieure à 5% de l'épaisseur de la couche limite  $\delta$ .

Dans cette zone, on définit la vitesse de paroi  $u^*$  ou vitesse de frottement :

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad (149)$$

La combinaison de (148) et (149) permet d'écrire :

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{u^* y}{\nu} \quad (150)$$

On effectue souvent un changement de variables en introduisant les paramètres adimensionnels suivants :

$$u_+ = \frac{\bar{u}}{u^*}, \quad y_+ = \frac{y u^*}{\nu} \quad (151)$$

L'équation du profil de vitesse s'écrira alors :

$$\boxed{u_+ = y_+} \quad (152)$$

Ce profil de vitesse est valable pour la sous-couche laminaire délimitée par :

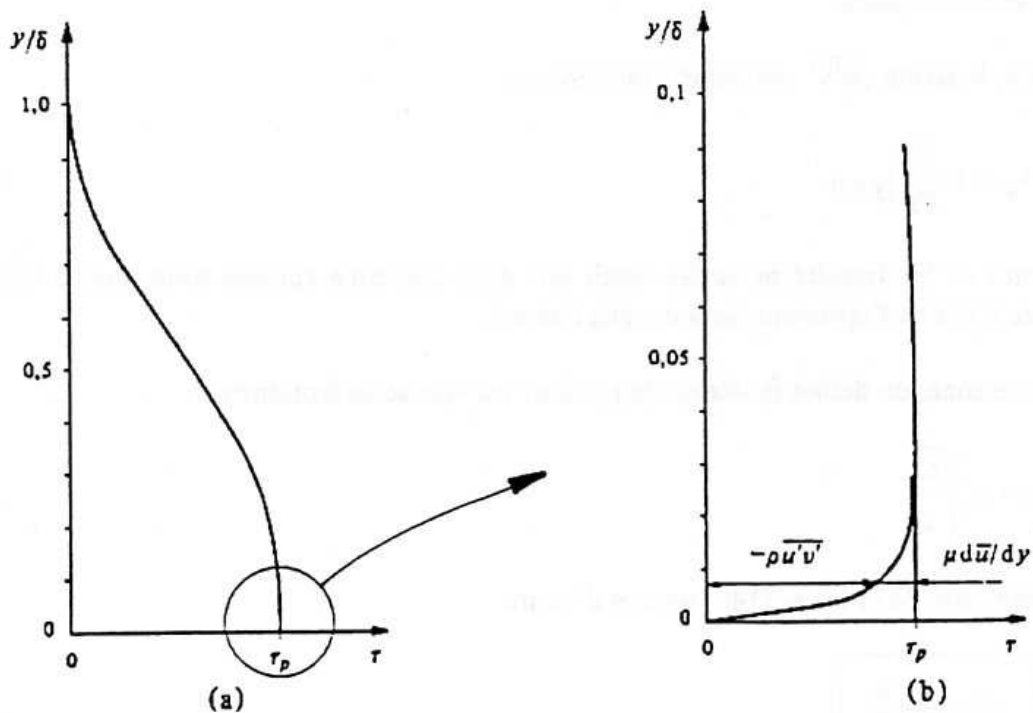
$$\boxed{y_+ < 10} \quad (153)$$

Région proche de la paroi :  $\frac{\delta}{98} < y < \frac{\delta}{10}$

Par extension, on adoptera dans cette zone une autre loi de paroi de la forme :

$$\boxed{u_+ = f(y_+)} \quad (154)$$

La fonction f sera établie en partant des ordres de grandeur des contraintes visqueuses et turbulentes dans la couche limite (figure 27).



**Figure 27** : Evolution de la contrainte de cisailment dans la couche limite

Dans la zone de paroi, la valeur de  $\tau$  ne diffère pratiquement pas de  $\tau_p$ .

En introduisant la longueur du mélange de Prandtl, on obtient la forme établie en (91) :

$$\tau_p = \rho k^2 y^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \quad (155)$$

Soit en introduisant la vitesse de paroi  $u^*$  et les termes adimensionnels  $u_+ = \frac{\bar{u}}{u^*}$  et  $y_+ = \frac{u^* y}{\nu}$  :

$$du_+ = \frac{1}{k} \frac{dy_+}{y_+} \quad (156)$$

Soit, après intégration, la première loi logarithmique :

$$u_+ = A \log_{10} y_+ + B \quad (157)$$

A et B sont des constantes introduites d'après l'expérience. La forme finale de la loi de paroi s'écrira finalement :

$$u_+ = 5,85 \log y_+ + 5,56 \quad (158)$$

Elle est utilisable dans l'intervalle :

$$30 < y_+ < 500 \quad (159)$$

On utilise aussi la forme (160), issue également de l'expérimentation :

$$u_+ = 8,74 \cdot y_+^{1/7} \quad (160)$$

Reste de la couche limite :

Dans la zone restante comprise entre  $\delta/10$  et  $\delta$ , on introduit un profil de vitesse appelé loi déficitaire et dépendant cette fois du gradient de pression extérieur  $dp/dx$ .

$$\frac{Ue - \bar{u}}{u^*} = A \log \frac{y}{\delta} + C \quad (161)$$

$$\text{pour } 30 < y_+ < 1000 \quad (162)$$

La relation (161) se superpose pratiquement à (158).

Au-delà, on utilise :

$$\frac{Ue - \bar{u}}{u^*} = a \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^b \quad (163)$$

où a et b sont des constantes dépendant du gradient de pression extérieure (b est voisin de 2).

Pour  $y = \delta$ , la forme (163) satisfait la condition à la limite  $\bar{u} = U_e$ .

On formule souvent, sous la forme simplifiée d'une loi en puissance, l'ensemble de la distribution de vitesse dans la couche limite turbulente :

$$\boxed{\frac{\bar{u}}{U_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \text{ avec } n \approx 7} \quad (164)$$

**Relations relatives à la plaque plane :**

Les relations établies dans la zone de paroi permettent d'introduire un certain nombre de relations importantes.

La définition de la vitesse de frottement permet de faire apparaître  $C_f$  :

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$$

et 
$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho U_e^2}$$

Soit en éliminant  $\tau_p$  :

$$\boxed{\frac{u^*}{U_e} = \sqrt{\frac{C_f}{2}}} \quad (165)$$

Introduisons cette expression dans les différentes lois de paroi en puissance (160) et (164) :

$$\begin{cases} u_+ = 8,74 \cdot y_+^{1/7} \\ \frac{\bar{u}}{U_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \end{cases}$$

Développons (160) :

$$\frac{\bar{u}}{U_e} \cdot \frac{U_e}{u^*} = 8,74 \cdot \left[ \frac{y \cdot u^*}{\nu} \right]^{1/7}$$

En remplaçant  $u^*$  par sa valeur issue de (165), on peut introduire le coefficient  $C_f$  :

$$\frac{\bar{u}}{U_e} = \left(\frac{C_f}{2}\right)^{+1/2} \cdot 8,74 \left[ \frac{y}{\nu} U_e \cdot \left(\frac{C_f}{2}\right)^{1/2} \right]^{1/7}$$

En identifiant cette valeur avec celle issue de (164), pour  $n = 7$ , on obtient :

$$C_f = \frac{2}{(8,74)^{7/4}} \left( \frac{v}{U_e \cdot \delta} \right)^{1/4}$$

soit

$$\boxed{C_f = 0,045 \cdot \left( \frac{v}{U_e \cdot \delta} \right)^{1/4}} \quad (166)$$

**Epaisseur de quantité de mouvement  $\delta_2$  :**

Comme en laminaire, l'expression de  $\delta_2$  se calcule à partir de (134) :

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{\bar{u}}{U_e} \left( 1 - \frac{\bar{u}}{U_e} \right) dy$$

qui donne, d'après (164) :

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \quad (167)$$

et pour  $n = 7$  :

$$\boxed{\frac{\delta_2}{\delta} = 0,0972} \quad (168)$$

On démontre que l'équation intégrale de Von Karman conserve son expression dans le cadre de la couche limite turbulente, les termes de fluctuation de vitesse apparaissant sous la forme d'une différence pratiquement négligeable :

$$d \left( \delta_2 U_e^2 \right) + \delta_1 U_e dU_e = C_f \frac{U_e^2}{2} dx + d \left[ \int_0^{\delta} \left( \overline{u^2} - \overline{v^2} \right) dy \right]$$

Ainsi, pour la plaque plane où  $dU_e = 0$  :

$$\frac{d \delta_2}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2} = \frac{C_f}{2}$$

En remplaçant  $\delta_2$  par sa valeur issue de (168) et  $C_f$  issu de (166), on obtient :

$$\frac{d\delta}{dx} = 0,231 \cdot \left( \frac{U_e \delta}{v} \right)^{-1/4}$$

En intégrant de 0 à x :

$$\frac{\delta}{x} = 0,370 \cdot \left( \frac{Ue x}{\nu} \right)^{-1/5} \quad (169)$$

soit finalement, pour l'écoulement turbulent :

$$C_f = \frac{0,058}{(\mathcal{R}_x)^{1/5}} \quad (170)$$

### 5.5. Couche limite turbulente sur une surface quelconque

#### A) Méthode générale

La définition complète des paramètres de la couche limite dépend comme en régime laminaire du gradient de pression. Cette influence s'exerce sur le profil de vitesse et les conditions de décollement.

Le point de départ est constitué de l'équation intégrale de quantité de mouvement qui s'écrit en régime turbulent :

$$d(\delta_2 Ue^2) + \delta_1 Ue dUe = Cf Ue^2 ds + d \left[ \int_0^{\delta} (\overline{u'^2} - \overline{v'^2}) dy \right] \quad (171)$$

Les termes  $\overline{u'^2}$  et  $\overline{v'^2}$  étant du même ordre de grandeur, le dernier terme est négligeable par rapport aux autres, réduisant ainsi l'équation intégrale à la même expression qu'en laminaire :

$$2 \delta_2 Ue dUe + Ue^2 d\delta_2 + \delta_1 Ue dUe = \frac{Cf}{2} Ue^2 ds$$

$$\boxed{\frac{d\delta_2}{ds} + (H + 2) \frac{\delta_2}{Ue} \frac{dUe}{ds} = \frac{Cf}{2}} \quad (172)$$

Cette équation contient trois inconnues :  $\delta_2$ ,  $H$  et  $Cf$ , le terme  $Ue(s)$  étant supposé connu par une étude en écoulement potentiel où  $s$  représente l'abscisse curviligne. La résolution sera possible en introduisant deux relations complémentaires, l'une évaluant  $Cf$  et l'autre la forme du profil de vitesse définissant  $H$  (cette forme dépend ici du gradient de pression).

#### Coefficient de frottement Cf :

Sous une forme simplifiée, on peut retenir la relation de Prandtl établie à partir de (166) et (168) pour la plaque plane, elle est indépendante de  $dp/ds$  :

$$\boxed{\frac{Cf}{2} = 0,0128 \left( \frac{Ue\delta_2}{\nu} \right)^{-1/4}} \quad (173)$$

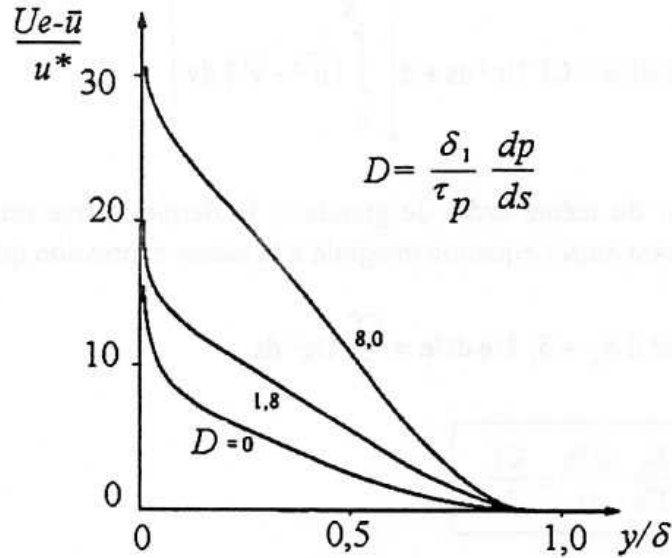
Pour plus de précision, on adoptera la relation de Ludwig-Tillmann basée sur des résultats expérimentaux en présence d'un gradient de pression non nul :

$$\boxed{Cf = 0,246 \cdot 10^{-0,678H} \left( \frac{Ue\delta_2}{\nu} \right)^{-0,268}} \quad (174)$$

D'autres méthodes couplent à la fois le profil de vitesse et le coefficient de frottement par le paramètre  $G$  de Rotta-Clausner.

**Profil de vitesse :**

L'influence du gradient de pression sur le profil de vitesse est très important comme le montrent les mesures de Clauser (1954).



**Figure 28 :** Influence du gradient de pression sur le profil de vitesse

Le gradient de pression est décrit par le paramètre D dont la valeur nulle correspond à la plaque plane :

$$D = \frac{\delta_1}{\tau_p} \frac{dp}{ds} \tag{175}$$

Deux formes sont utilisées pour décrire l'influence de D :

- la forme de Le Foll [réf. 209] retenant la loi déficitaire suivante :

$$\frac{Ue - \bar{u}}{u^*} = \frac{g_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + \lambda g_2\left(\frac{y}{\delta}\right)}{k} \tag{176}$$

avec :  $g_1\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - 1 \right] - \ln\left(\frac{y}{\delta}\right)$  ;  $g_2\left(\frac{y}{\delta}\right) = 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 - 3\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + 1$  ;  $k = 0,41$

et  $\lambda$  paramètre dépendant implicitement de D par les relations de Huo.

- La forme en puissance beaucoup plus simple :

$$\boxed{\frac{\bar{u}}{Ue} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}}} \quad (177)$$

pour laquelle le gradient de pression est pris en compte par le facteur n.

On a déjà examiné que  $n = 7$  pour  $D = 0$  (plaque plane). En reprenant les définitions classiques de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , on obtient :

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\bar{u}}{Ue}\right) dy = \frac{1}{n+1} = \frac{H-1}{H+1} \quad (178)$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\bar{u}}{Ue}\right) \frac{\bar{u}}{Ue} dy = \frac{n}{(n+1)(n+2)} = \frac{H-1}{H(H+1)} \quad (179)$$

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{n+2}{n} \quad \text{ou} \quad n = \frac{2}{H-1} \quad (180)$$

Equations donnant deux formes à la loi en puissance :

$$\frac{\bar{u}}{Ue} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{H-1}{2}} \quad (181)$$

et 
$$\frac{\bar{u}}{Ue} = \left[ \frac{y}{\delta_2} \frac{H-1}{H(H+1)} \right]^{\frac{H-1}{2}} \quad (182)$$

Equation définissant le paramètre de forme :

Le paramètre G de Rotta-Clausner est défini par le rapport suivant :

$$G = \frac{\int_0^{\delta} \left(\frac{Ue - \bar{u}}{u^*}\right)^2 dy}{\int_0^{\delta} \left(\frac{Ue - \bar{u}}{u^*}\right) dy} \quad (183)$$

Quel que soit le profil de vitesse retenu, on démontre qu'il peut se mettre sous la forme :

$$G = \frac{H-1}{H} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{Cf}{2}}} \quad (184)$$

Suivant la forme de profil retenu, il prendra aussi l'expression :

- Pour la forme de Le Foll :

$$G = \frac{1,244 + 1,15 \lambda + 0,3714 \lambda^2}{k \left( \frac{2}{3} + \frac{\lambda}{2} \right)} \quad (185)$$

- Pour la forme en puissance :

$$G = \frac{1}{\sqrt{\frac{Cf}{2}}} \frac{2}{n+2} \quad (186)$$

Huo a montré que G et D étaient reliés par la relation :

$$G = 7,55 \sqrt{D+1,8} - 3,55 \quad \text{pour } G \leq 13 \quad (187)$$

$$G = 6,10 \sqrt{D+1,8} - 0,40 \quad \text{pour } G > 13 \quad (188)$$

**Mode opératoire :**

A partir du point de transition, on connaît les valeurs de  $x_T$ ,  $R\delta_2$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_1$  et H. Partant de ces valeurs, on peut définir successivement :

Cf. par la relation (174)

D par la relation (175)

G par la relation (187) ou (188)

H par la relation (184)

$\lambda$  ou n par les relations (185) ou (186)

Le profil de vitesse est alors parfaitement défini par (176) ou (177). En se fixant un pas  $\Delta s$  suffisamment faible, on déduit la nouvelle valeur de  $\delta_2$  en utilisant l'équation (172) :

$$\frac{\Delta\delta_2}{\Delta s} + (H+2) \frac{\delta_2}{Ue} \cdot \frac{dUe}{ds} = \frac{Cf}{2}$$

soit  $\delta_2 = \delta_2 + \Delta\delta_2$

et ainsi de suite jusqu'à l'extrémité de la paroi ou jusqu'au point de décollement.

**B) Méthode de Head**

Head a intégré l'équation de continuité dans la direction y de 0 à  $\delta$  :

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dy = 0 \quad (189)$$

On développe d'abord le premier terme :

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\delta} \bar{u} dy = \frac{d}{ds} \int_0^{\delta} \frac{\bar{u}}{Ue} \cdot Ue dy = Ue \frac{d}{ds} (\delta - \delta_1) + \frac{dUe}{ds} (\delta - \delta_1) = \frac{d}{ds} [Ue (\delta - \delta_1)]$$

Par hypothèse, le second terme est défini comme une fonction de  $\left(\frac{\delta - \delta_1}{\delta_2}\right)$ , autre facteur de forme de la couche limite noté  $H_1$  :

$$H_1 = \frac{\delta - \delta_1}{\delta_2} \quad (190)$$

L'équation de continuité s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{d}{ds} (Ue \delta_2 H_1) = Ue \cdot F(H_1)} \quad (191)$$

On lui associe l'équation de Von Karman :

$$\boxed{\frac{d\delta_2}{ds} = \frac{Cf}{2} - \frac{\delta_2}{Ue} (H + 2) \frac{dUe}{dx}} \quad (192)$$

En précisant la forme des fonctions F,  $H_1$  et Cf en fonction de H, le système (191) - (192) se ramène à deux équations différentielles en  $\delta_2$  et H qui peut s'intégrer numériquement avec pour conditions initiales les valeurs données par la transition.

Les formes retenues sont les suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} H_1 &= 0,8234 (H - 1,1)^{-1,287} + 3,3 \quad ; \quad H < 1,6 \\ H_1 &= 1,5501 (H - 0,6778)^{-3,064} + 3,3 \quad ; \quad H > 1,6 \\ F &= 0,0306 (H_1 - 3)^{-0,6169} \\ Cf &= 0,246 \left(\frac{Ue\delta_2}{\nu}\right)^{-0,268} \cdot 10^{-0,678.H} \end{aligned}} \quad (193)$$

### C) Décollement de la couche limite turbulente

La valeur moyenne correspondant au décollement de la couche est donnée par  $H = 3$  au lieu de 3,55 pour la couche limite laminaire. Le décollement ne se produit pas précisément pour  $C_f = 0$  mais pour un  $C_f$  décroissant très rapidement.

La couche limite turbulente décolle plus difficilement de la paroi que la couche limite laminaire à cause du fort échange énergétique existant avec l'écoulement extérieur.

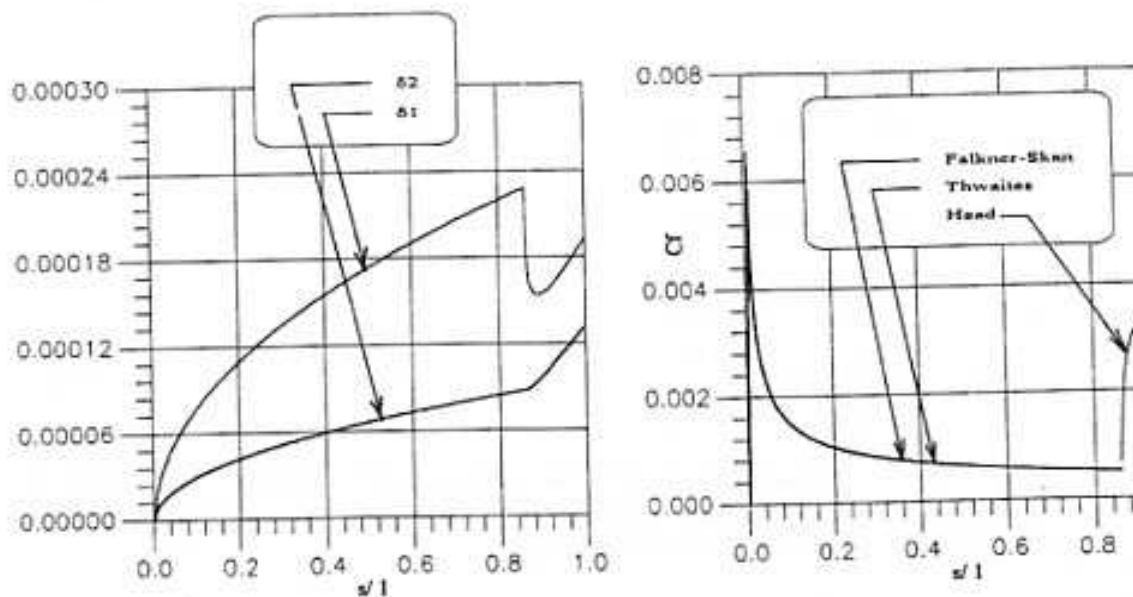
### 5.6. Ordre de grandeur des caractéristiques de la couche limite sur une plaque plane

A titre d'application et d'illustration, on retient une plaque plane de largeur infinie et de longueur égale à 200 mm, soumise à un écoulement d'air ( $\nu = 15 \text{ E-6 m}^2/\text{s}$  et  $\mu = 18 \text{ E-6 kg/m.s}$ ) de vitesse  $U_e = 150 \text{ m/s}$ .

Les résultats des différents modèles proposés en laminaire par Thwaites ou déduits des travaux de Falkner et Skan, et en turbulent par Head sont présentés ci-dessous.

Arbitrairement le critère de transition retenu est ici :  $\mathcal{R}_x = 1,72 \cdot 10^6$

Comme on l'a déjà noté en figure 25, le passage du régime laminaire au régime turbulent s'effectue avec un accroissement important du coefficient de frottement  $C_f$ .



*Caractéristiques de la couche limite sur une plaque plane.*

## VI) ÉCOULEMENTS EN CONDUITE

Il s'agit d'un écoulement interne par excellence où la couche limite sur les parois occupe pratiquement toute la section d'écoulement.

L'écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes et sont conditionnées, en fluide incompressible newtonien, par deux nombres caractéristiques : le nombre de Reynolds et le nombre de Froude.

Étudions le cas général en disposant l'axe  $z$  vertical, les forces du volume étant supposées réduites à l'action de la pesanteur. Exprimées par unité de masse, elles se réduisent à leur seule composante verticale (équation 7) :

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (200)$$

Pour éviter d'alourdir la démonstration, considérons dans un premier temps les termes convectifs négligeables.

Le système d'équation de Navier-Stokes (47) se ramène alors à :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \nabla^2 w \end{cases} \quad (201)$$

On peut adimensionnaliser les variables en utilisant comme précédemment les grandeurs de référence suivantes.

$C$  : La vitesse de référence correspondant par exemple à la vitesse débitante dans la section de conduite.

$D$  : La longueur de référence correspondant à une dimension géométrique caractéristique, soit le diamètre de la conduite ou son diamètre hydraulique (relation 65).

$D/C$  : le temps de référence

$\rho C^2$  : la pression de référence

Les variables réduites s'écriront alors :

$$\begin{aligned} u^+ &= \frac{u}{C} & v^+ &= \frac{v}{c} & w^+ &= \frac{w}{C} \\ x^+ &= \frac{x}{D} & y^+ &= \frac{y}{D} & z^+ &= \frac{z}{D} \end{aligned}$$

$$t^+ = \frac{t}{D} = \frac{C \cdot t}{D}, p^+ = \frac{p}{\rho C^2}$$

Les différents termes aisément calculables :

$$\frac{du}{dt} = \frac{C^2}{D} \frac{du^+}{dt^+}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{C^2}{D} \frac{\partial p^+}{\partial x^+}$$

$$\nu \nabla^2 u = \nu \cdot \frac{C}{D^2} \nabla^2 u^+$$

En multipliant tous les termes par  $\frac{D}{C^2}$ , on obtiendra le système en variables réduites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du^+}{dt^+} = -\frac{\partial p^+}{\partial x^+} + \frac{\nu}{CD} \nabla^2 u^+ \\ \frac{dv^+}{dt^+} = -\frac{\partial p^+}{\partial y^+} + \frac{\nu}{CD} \nabla^2 v^+ \\ \frac{dw^+}{dt^+} = -\frac{\partial p^+}{\partial z^+} + \frac{gD}{C^2} + \frac{\nu}{CD} \nabla^2 w^+ \end{array} \right. \quad (202)$$

système dans lequel apparaît le nombre de Reynolds de l'écoulement :

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{C \cdot D}{\nu}} \quad (203)$$

qui représente le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité.

et le nombre de Froude :

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{C^2}{gD}} \quad (204)$$

qui représente le rapport des forces d'inertie aux forces de pesanteur.

Pour les fluides non newtoniens dont la loi de comportement est de la forme :

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

où  $\tau_0$  correspond aux tensions interfaciales prenant naissance par exemple dans un mélange de fluides non miscibles ou d'une émulsion, un terme complémentaire figurera dans l'équation de Navier-Stokes (relation 49b) :

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } H$$

En introduisant la tension interfaciale  $\sigma$  comme contrainte de référence, l'équation de Navier-Stokes contiendra en plus le nombre de Weber :

$$\boxed{\mathcal{W} = \rho \frac{C^2}{\sigma}} \quad (205)$$

Les nombres de Reynolds et de Froude servent de base aux règles de similitude des écoulements. L'influence du nombre de Froude n'est sensible que dans les écoulements à surface libre. Par contre, pour les écoulements en charge, c'est le nombre de Reynolds qui est prépondérant puisqu'il fixe à la fois le régime d'écoulement mais également les gradients de vitesse à la paroi, la forme de la distribution de vitesse, etc...

### 6.1. Régime laminaire

Nous étudions dans ce chapitre l'écoulement laminaire dans un tube de section circulaire en régime incompressible et permanent (écoulement de Poiseuille).

Reprenons l'équation de continuité et l'équation de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (A-18) et (B-48) en retenant les points suivants :

- les forces de pesanteur sont supposées négligeables,
- les composantes  $C_r$  et  $C_u$  de l'écoulement sont nulles,
- l'écoulement est axisymétrique et les termes de vitesse en  $\partial/\partial\theta$  sont nuls,
- le régime d'écoulement est établi, ce qui signifie que si l'on se trouve loin de l'entrée du tube, ou des phénomènes de mise en vitesse se produisent [réf. 101].

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial C_a}{\partial z} = 0 \quad \text{soit } C_a = C_a(r)$$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 C_a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_a}{\partial r} \right] \end{cases}$$

Les deux premières équations indiquent que la pression ne dépend que de  $z$ , d'où :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz}$$

L'équation dynamique se réduit à :

$$\boxed{\nu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dC_a}{dr} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}} \quad (206)$$

La composante  $C_a$  ne dépendant que de  $r$  et la pression ne dépendant que de  $z$ , l'équation (206) indique que  $dp/dz$  ne peut être que constant (fluide en mouvement avec  $C_a \neq 0$ ) ou nul (fluide au repos avec  $C_a = 0$ ).

$$\text{En posant} \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta p}{l} \quad (207)$$

avec  $l$  : longueur de la conduite et  $\Delta p$  la chute de pression ou perte de charge sur la longueur  $l$ .

L'équation (206) s'intègre en donnant :

$$\frac{d}{dr} \left[ r \frac{dCa}{dr} \right] = - \frac{\Delta p}{\mu l} r$$

$$r \frac{dCa}{dr} = - \frac{\Delta p}{2\mu l} \cdot r^2 + C_1$$

$$\frac{dCa}{dr} = - \frac{\Delta p}{2\mu l} \cdot r + \frac{C_1}{r}$$

$$\boxed{Ca(r) = - \frac{\Delta p}{2\mu l} \frac{r^2}{2} + C_1 \cdot \ln r + C_2} \quad (208)$$

$C_1$  et  $C_2$  sont des constantes d'intégration permettant de satisfaire les conditions aux limites qui sont ici ramenées à une seule condition : la vitesse est nulle à la paroi du tube.

Pour obtenir une valeur finie sur l'axe du tube, il faut nécessairement  $C_1 = 0$ .

La condition de paroi s'écrit alors pour un tube de rayon  $R$  :

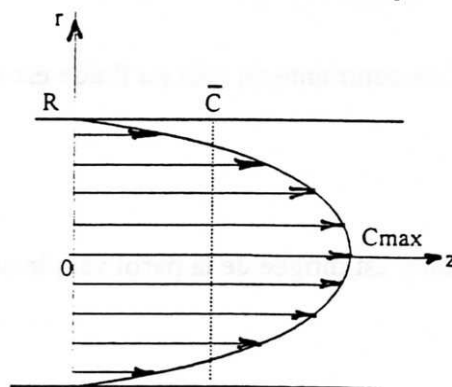
$$Ca (r = R) = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2 + C_2 = 0$$

D'où l'équation finale :

$$\boxed{Ca(r) = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2)} \quad (209)$$

Le profil de vitesse est donc parabolique et symétrique par rapport à l'axe de la canalisation.

Par la suite, pour simplifier, nous noterons la vitesse axiale par  $C$  au lieu de  $Ca$ .



**Figure 29** : Distribution de vitesse en régime laminaire

**Propriétés de la distribution de vitesse :**

La vitesse maximale est obtenue sur l'axe de la canalisation :

$$C_{\max} = \frac{\Delta p \cdot R^2}{4 \mu l} \quad (210)$$

Le débit volume est calculé par l'intégrale suivante :

$$q_v = \int_0^R C \cdot dS = \int_0^R \frac{\Delta p}{4 \mu l} (R^2 - r^2) 2\pi r \, dr \quad (211)$$

soit 
$$q_v = \frac{\Delta p}{4 \mu l} \pi \frac{R^4}{2} \quad (212)$$

On observe donc que le débit dans la canalisation est proportionnel à la différence de pression s'exerçant entre l'entrée et la sortie.

Le débit s'écrivant aussi sous la forme du produit de la vitesse moyenne (ou vitesse débitante) par la section de passage, nous aurons par définition :

$$q_v = \bar{C} \cdot \pi R^2 \quad (213)$$

donnant comme vitesse moyenne par identification de (212) et (213) :

$$\bar{C} = \frac{1}{2} \frac{\Delta p \cdot R^2}{4 \mu l} \quad (214)$$

La vitesse moyenne est donc égale à la moitié de la vitesse au centre de la conduite.

**Contrainte au sein du fluide :**

Pour un fluide Newtonien, l'état de contrainte au sein du fluide est donné par l'équation :

$$\tau = \mu \frac{dC}{dy} = -\mu \frac{dC}{dr} \quad (215)$$

Equation dans laquelle la direction y est dirigée de la paroi vers le centre de l'écoulement.

Soit : 
$$\tau = \frac{\Delta p \, r}{2l} \quad (216)$$

La contrainte est donc nulle au centre de la conduite et varie linéairement jusqu'à la paroi où elle atteint la valeur maximale  $\tau_p$  :

$$\tau_p = \frac{\Delta p \cdot R}{2l} \quad (217)$$

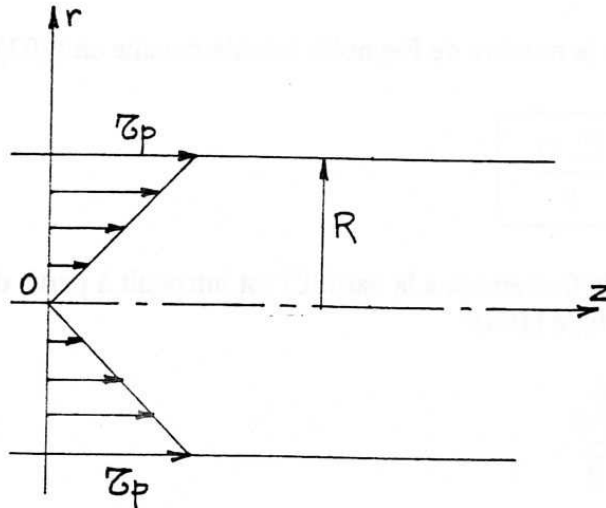


Figure 30 : Distribution de contrainte au sein du fluide

**Coefficient de perte de charge :**

La pression motrice totale à mettre en jeu pour assurer l'écoulement est ramenée à la pression dynamique engendrée pour définir le coefficient de perte de charge.

$$\Delta p_t = \lambda \cdot \rho \frac{C^2}{2} \quad (218)$$

$\Delta p_t$  représente la différence de pression totale entre l'entrée et la sortie de la conduite :

$$\Delta p_t = \left( p_e + \rho \frac{\overline{C_e^2}}{2} \right) - \left( p_s + \rho \frac{\overline{C_s^2}}{2} \right) \quad (219)$$

Dans le cas particulier qui nous intéresse ici, la section est constante et la pression motrice totale se ramène à la différence de pression.

On introduit également le coefficient de perte de charge unitaire  $\Lambda$  sous la forme :

$$\Delta p = \Lambda \frac{1}{D} \rho \frac{\overline{C}^2}{2}$$

où D est le diamètre de la canalisation.

En remplaçant  $\bar{C}$  par sa valeur issue de (214), on obtient pour  $\Lambda$  :

$$\Lambda = \frac{64}{\mathcal{R}} \quad (220)$$

où  $\mathcal{R}$  représente le nombre de Reynolds calculé comme en (203) par la relation :

$$\mathcal{R} = \frac{\bar{C} D}{\nu} \quad (221)$$

Le coefficient de frottement à la paroi  $C_f$  est introduit à partir de la contrainte de paroi et de la pression dynamique (108) :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\rho \frac{\bar{C}^2}{2}} \quad (222)$$

En remplaçant  $\tau_p$  et  $\bar{C}$  par leurs valeurs issues de (217) et (214), on obtient :

$$C_f = \frac{\Lambda}{4} \quad (223)$$

Comme nous l'avons examiné au § 4.1., l'écoulement laminaire dans une conduite de section circulaire se maintient jusqu'à un nombre de Reynolds de 2300. Au-delà s'établit, suivant les conditions d'écoulement, le régime turbulent.

## 6.2. Régime turbulent lisse

La surface du tube est lisse et on se référera dans cette partie à un certain nombre de résultats obtenus pour la plaque plane (§ 5.4.).

On démontre que la distribution de contrainte radiale reste proportionnelle au rayon comme indiqué sur la Figure 30. Compte tenu du modèle proposé pour décrire l'écoulement turbulent, la contrainte en tout point s'exprime à partir de la longueur de mélange de Prandtl :

$$\tau = \mu \frac{dC}{dr} + \rho l^2 \left| \frac{dC}{dr} \right| \frac{dC}{dr} \quad (224)$$

Suivant que l'on est proche ou éloigné de la paroi, c'est le premier terme ou le second qui est prépondérant.

Dans la sous-couche laminaire, on obtiendra en référence à l'équation (155) une équation de la forme :

$$\boxed{C_+ = y_+} \quad (225)$$

avec  $C_+ = \frac{C}{u^*}$  ;  $y_+ = \frac{y \cdot u^*}{\nu}$

et où  $u^*$  est la vitesse de frottement donnée par :

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad (226)$$

La valeur de  $\tau_p$  est toujours calculable par (217). L'équation (225) est valable pour  $y_+ < 10$ .

Hors de cette zone et toujours au voisinage de la paroi, on observe la loi logarithmique donnée pour (157) où les constantes A et B sont légèrement différentes :

$$\boxed{C_+ = 5,65 \log y_+ + 5,00} \quad (227)$$

Cette relation est valable pour  $\frac{y}{R} < 0,2$ .

Dans la zone centrale de la conduite, on fait appel à une loi de type déficitaire :

$$\boxed{\frac{C_{\max} - C}{u^*} = 7,2 \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^2} \quad (228)$$

$C_{\max}$  représentant la vitesse au centre de la conduite.

D'autres auteurs utilisent les lois en puissance déjà examinées pour la plaque plane (164) :

$$\boxed{\frac{C}{C_{\max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n}} \quad (229)$$

Elle est en principe utilisable sur toute la section de la conduite mais n varie avec le nombre de Reynolds moyen :

$\mathcal{R} = \frac{\bar{C} \cdot D}{\nu}$	$4 \cdot 10^3$	$10^5$	$2 \cdot 10^6$
n	6	7	10

Calcul du débit et de la vitesse moyenne

Le débit se calcule par la relation d'intégration classique :

$$qv = \bar{C} \cdot \pi R^2 = \int_0^R C \cdot 2 \pi r \, dr$$

Les zones de paroi étant relativement réduites, on retient pour C la relation (228) sur toute la section et on remplace y par (R - r).

On obtient la relation :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = 5,65 \log \mathcal{R}_* + 2} \quad (230)$$

avec  $\mathcal{R}_* = \frac{u_* \cdot R}{\nu}$  (231)

Coefficient de perte de charge

Le coefficient  $\Lambda$  peut se déterminer en utilisant les relations précédentes :

$$\Lambda = 4 Cf$$

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} = \bar{C} \sqrt{\frac{Cf}{2}} = \bar{C} \sqrt{\frac{\Lambda}{8}}$$

soit  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{\bar{C}}{u^*}$

En remplaçant  $\frac{\bar{C}}{u^*}$  par sa valeur issue de (230), on obtient la relation :

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = 2 \log \mathcal{R}_* + \frac{2}{\sqrt{8}}$$

Le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_*$  peut être développé :

$$\mathcal{R}_* = \frac{u^* R}{\nu} = \frac{\bar{C} \cdot D}{\nu} \cdot \frac{u^*}{2\bar{C}} = \mathcal{R} \frac{\sqrt{\Lambda}}{4\sqrt{2}}$$

soit finalement :

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = 2 \log (\mathcal{R} \sqrt{\Lambda}) - 0,8 \quad (232)$$

C'est l'équation de Von Karman, forme à résoudre par itération en partant par exemple de 0,02.

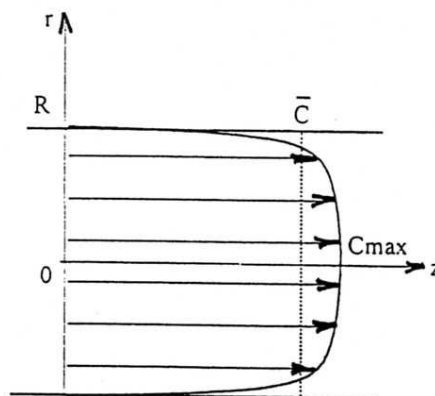
Blasius a établi une forme explicite en calculant l'intégrale définissant le débit à partir de la forme (160) donnée pour la plaque plane :

$$\Lambda = \frac{0,316}{(\mathcal{R})^{1/4}} \quad (233)$$

Elle n'est valable que pour des nombres de Reynolds inférieurs à  $10^5$ .

Forme de la distribution de vitesse :

Comme l'indique l'ensemble des relations, le profil de vitesse est continûment variable avec le nombre de Reynolds. Il est de forme beaucoup plus aplatie que dans le cas de l'écoulement laminaire.



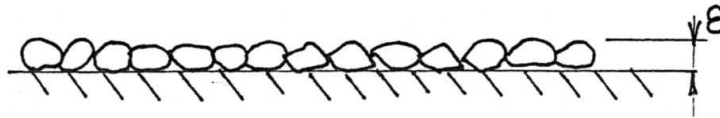
**Figure 31 : Distribution de vitesse en régime turbulent**

Le rapport entre  $\bar{C}$  et  $C_{\max}$  dépend également du nombre de Reynolds, on le calcule par la relation de Coantic :

$$\frac{\bar{C}}{C_{\max}} = 0,71 + 0,1 \sqrt{\log \left( \frac{\mathcal{R}}{4200} \right)} \quad (234)$$

### 6.3. Influence de la rugosité

L'influence de la rugosité a été étudiée expérimentalement par Nikuradse qui a disposé à la surface d'un tube de paroi lisse une rugosité standard constituée de grains de sable de granulométrie déterminée (rugosité uniformément répartie de hauteur  $\varepsilon$  petite par rapport au diamètre de la conduite).



Partant de cette rugosité, on peut construire deux termes :

. la rugosité relative  $\frac{\varepsilon}{D}$

. le nombre de Reynolds associé  $\varepsilon_+ = \frac{\varepsilon \cdot u^*}{\nu}$

Lorsque  $\varepsilon_+$  est inférieur à 5, les distributions de vitesses ne sont pas perturbées par la rugosité. Au-delà, la distribution proche de la paroi est affectée et la relation (227) devient :

$$C_+ = 5,65 \log y_+ + 5 - \frac{\Delta u}{u^*} \quad (235)$$

où  $\frac{\Delta u}{u^*}$  est une fonction de la rugosité.

Pour  $\varepsilon_+ > 70$ , on vérifie les relations :

$$\frac{\Delta u}{u^*} = 5,65 \log \varepsilon_+ - 3,2$$

D'où la relation en régime hydrauliquement rugueux :

$$C_+ = 5,65 \log \frac{y}{\varepsilon} + 8,2 \quad (236)$$

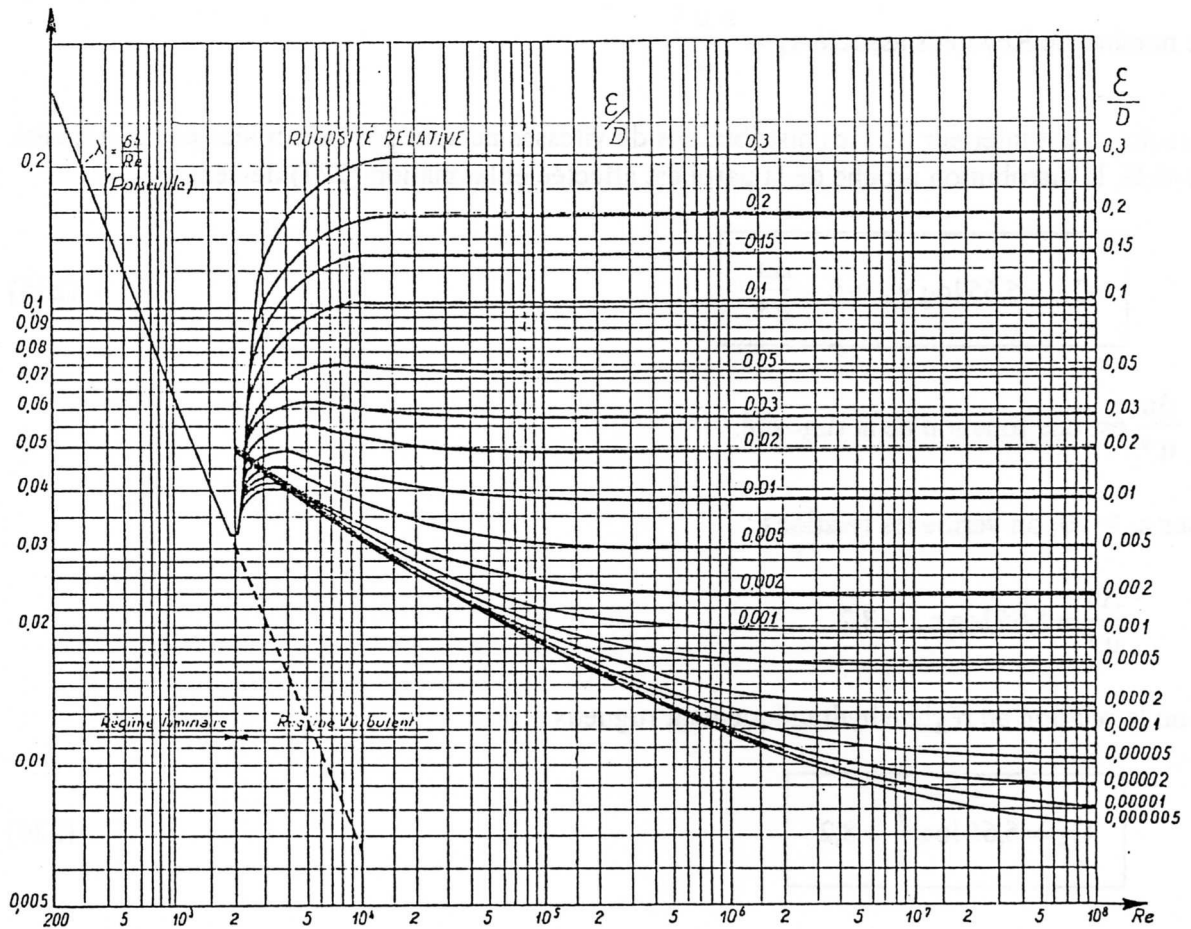
Quelle que soit la rugosité, la zone centrale n'est pas affectée par la rugosité.

#### **Coefficient de perte de charge :**

En régime laminaire,  $\Lambda$  est inchangé. En régime turbulent, on peut utiliser la relation de Colebrook :

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = -2 \log \left[ \frac{2,51}{\mathcal{R} \sqrt{\Lambda}} + \frac{\varepsilon}{3,71 D} \right] \quad (237)$$

Pour  $\varepsilon = 0$ , on retrouve l'équation de Prandtl (232). L'évolution de  $\Lambda$  est donnée sur la Figure 32.



**Figure 32 :** Evolution de  $\Lambda$  en fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité de la paroi

Dissipation énergétique :

La puissance hydraulique  $Phy$  dégradée sous forme de perte de charge se transforme intégralement en chaleur et correspond à une élévation de température  $\Delta T$  calculable par :

$$\boxed{Phy = \Delta p \cdot qv = \rho Cp qv \Delta T} \quad (238)$$

Chapitre C

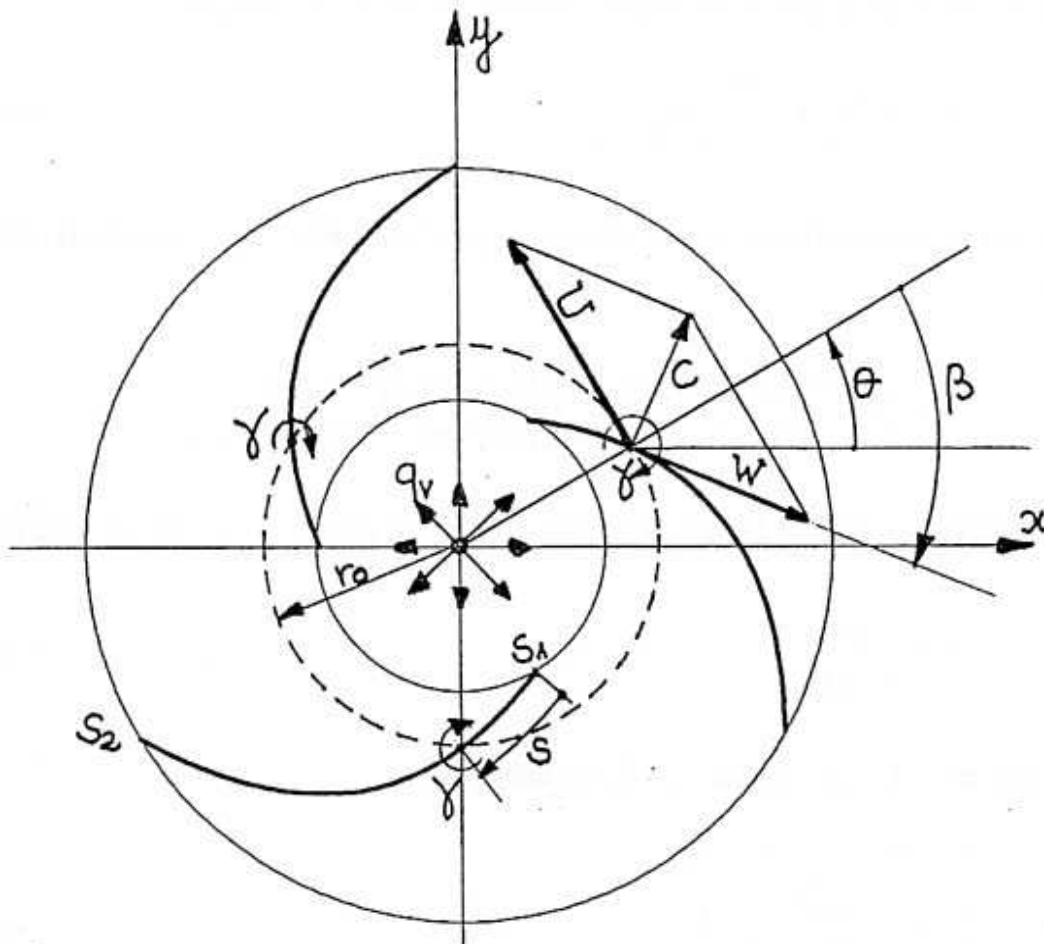
**DEVELOPPEMENTS  
COMPLEMENTAIRES**

## I) GRILLE PLANE CIRCULAIRE EN ROTATION

L'écoulement inter-aubages, déjà abordé, est repris ici dans le cadre de la méthode des singularités.

Dans cette modélisation, on superposera une distribution de tourbillons à la surface des aubages avec une source centrée en 0 et assurant le débit.

Examinons d'abord la fonction d'influence obtenue par l'existence de trois vortex de même intensité  $\gamma$  centrés au rayon  $r_0$  et décalés angulairement de  $\frac{2\pi}{3}$  (figure 1).



*Figure 1 : Définitions*

La vitesse complexe  $C'$  sera donnée par la sommation suivante (relation A-73) :

$$C' = u - iv = \frac{i\gamma}{2\pi} \sum_{n=1}^3 \frac{1}{z - z_n} \quad (1)$$

avec  $z$  affixe d'un point quelconque  $M$

$$z_1 = r_0 \exp(i\theta)$$

$$z_2 = r_0 \exp\left[i\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_3 = r_0 \exp\left[i\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

L'expression de C' passe par le développement de la somme algébrique :

$$A = \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3} \quad (2)$$

En réduisant au même dénominateur et en groupant les termes, on obtient la fonction complexe :

$$A = \frac{3z^2 - 2z(z_1 + z_2 + z_3) + z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3}{z^3 - z^2(z_1 + z_2 + z_3) + z(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3) - z_1z_2z_3}$$

On démontre en annexe R.15 que la fonction A se réduit pour trois vortex à la relation :

$$A = \frac{3z^2}{z^3 - z_1^3} \quad (3)$$

qui peut être étendue aisément au cas de Na aubages :

$$A = \frac{Na z^{Na-1}}{z^{Na} - z_1^{Na}} \quad (4)$$

Si l'on dispose le long de chaque aubage, supposé infiniment mince, la distribution de tourbillon  $\gamma(s)$ , la vitesse conjuguée sera donnée par :

$$C' = u - iv = \frac{i}{2\pi} \int_{S_1}^{S_2} \gamma(s) \frac{Na z^{Na-1}}{z^{Na} - z_s^{Na}} ds \quad (5)$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne le long de l'aubage et  $z_s$  l'affixe du centre de chacun des vortex  $\gamma(s)$ .

On superposera à cette distribution de singularité une source de débit  $qv$  centrée en 0, caractérisée par le potentiel complexe :

$$F(z) = \frac{qv}{2\pi} \ln z$$

et de vitesse conjuguée :

$$\frac{dF}{dz} = \frac{qv}{2\pi z}$$

Cette superposition conduit à l'expression :

$$C' = u - iv = \frac{qv}{2\pi z} + \frac{i}{2\pi} \int_{S_1}^{S_2} \frac{Na z^{Na-1}}{z^{Na} - z_s^{Na}} \gamma(s) ds \quad (6)$$

La vitesse d'entraînement sera représentée par un tourbillon forcé d'intensité  $\omega$  centré en 0 :

$$\boxed{U = i\omega z} \quad (7)$$

avec  $\omega$  : vitesse angulaire de la roue

On accédera à la vitesse relative en appliquant les règles de composition des vitesses :

$$\vec{W} = \vec{C} - \vec{U}$$

d'où les composantes sur  $x$  et  $y$  de  $\vec{W}$  :

$$\vec{W} \begin{cases} \text{Re}(C') + \omega r \sin \theta \\ -\text{Im}(C') - \omega r \cos \theta \end{cases} \quad (8)$$

### Condition de glissement :

La distribution  $\gamma(s)$  sera définie en écrivant la condition de glissement à la surface des aubes (figure 1) :

$$\text{tg}(\theta - \beta) = \frac{-\text{Im}(C') - \omega r \cos \theta}{\text{Re}(C') + \omega r \sin \theta} \quad (9)$$

avec  $\beta$  : angle d'aubage

L'annexe 15 donne les valeurs de  $\text{Re}(C')$  et  $\text{Im}(C')$  et la condition de glissement (9) s'écrit :

$$\text{tg}(\theta - \beta) = \frac{\frac{qV}{2\pi r} \sin \theta - \omega r \cos \theta - \int_{S_1}^{S_2} \frac{\left( r \cos \theta - \frac{R^{Na}}{r^{Na-1}} \cos \zeta \right)}{r^2 + \frac{R^{2Na}}{r^{2(Na-1)}} - 2 \frac{R^{Na}}{r^{Na-2}} \cos(\theta + \zeta)} \gamma(s) ds}{\frac{qV}{2\pi r} \cos \theta + \omega r \sin \theta + \int_{S_1}^{S_2} \frac{\left( r \sin \theta - \frac{R^{Na}}{r^{Na-1}} \cos \zeta \right)}{r^2 + \frac{R^{2Na}}{r^{2(Na-1)}} - 2 \frac{R^{Na}}{r^{Na-2}} \cos(\theta + \zeta)} \gamma(s) ds} \quad (10)$$

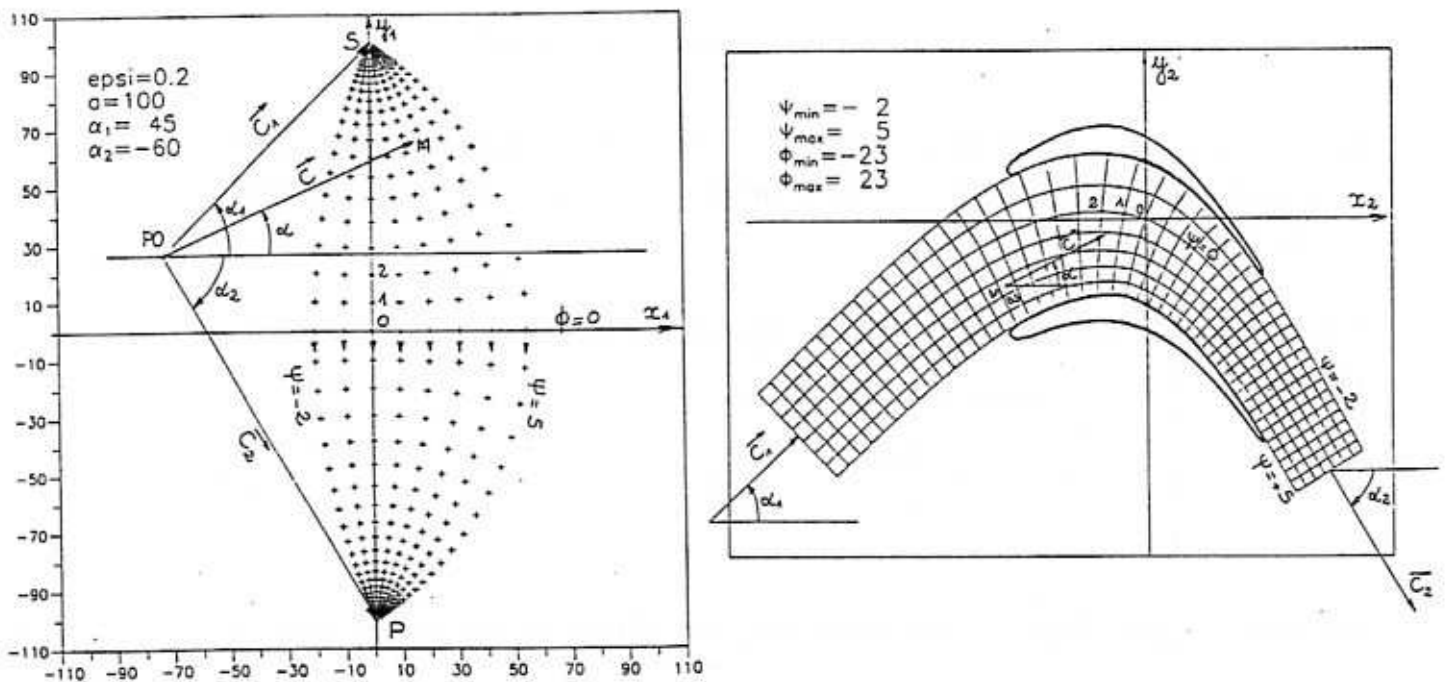
$$\text{avec} \begin{cases} z = r \exp(i\theta) \\ z_s = R \exp(i\theta') \\ \zeta = Na\theta' - (Na - 1)\theta \end{cases}$$

## II) METHODE DE L'HODOGRAPHE

Cette méthode tombée en désuétude mérite une attention particulière dans le cadre de l'avant-projet. C'est une des rares méthodes inverses qui contrôle, au stade de la conception, le champ de vitesses en tout point d'un écoulement bidimensionnel incompressible : écoulement inter-aubages ou entre parois solides.

Son handicap majeur est qu'elle est inopérante dans les zones à fort gradient proches du bord d'attaque et du bord de fuite, particulièrement importantes au demeurant.

La méthode de l'hodographe est une transformation conforme qui repose sur l'écoulement potentiel source-puits reprenant pour l'écoulement en projet, la même organisation, à savoir les mêmes fonctions de courant et potentiel. [réf.227]



a - plan d'étude

b - plan réel

**Figure 2 : Principe de la méthode**

A la source est associé l'écoulement à l'infini amont et au puits l'écoulement à l'infini aval.

La figure 2 illustre cette démarche.

Comme pour la transformation conforme, on définit le plan d'étude où l'on trace d'abord les lignes de courant et les équipotentielles de l'écoulement général source-puits (figures 13 et 14 du chapitre A).

Dans le cadre du problème inverse, les directions des vitesses d'entrée  $C_1$  et de sortie  $C_2$  d'un écoulement à définir sont des données. On connaît donc les angles  $\alpha_1$  d'entrée à l'infini amont et  $\alpha_2$  de sortie à l'infini aval. On notera (sur la figure 2) la présence d'un pôle PO et le respect de l'équation de continuité s'écrivant en fluide incompressible :

$$C_1 \cos \alpha_1 = C_2 \cos \alpha_2$$

La vitesse  $\vec{C}_1$  est associée à la source S et la vitesse  $\vec{C}_2$  au puits P.

En un point quelconque M de l'écoulement, la vitesse  $\vec{C}$  sera définie par son module C et sa direction  $\alpha$  ; d'autre part, ce même point M est associé à une ligne de courant  $\psi = \text{cte}$  et à un potentiel  $\phi = \text{cte}$ .

En se déplaçant sur une même ligne de courant, on pourra écrire pour le plan réel (relation A - 52) :

$$\Delta\phi = C \cdot \Delta s = C \frac{\Delta x_2}{\cos \alpha} = C \cdot \frac{\Delta y_2}{\sin \alpha} \quad (11)$$

De même, en se déplaçant sur une même équipotentielle, on pourra écrire également :

$$\Delta\psi = C \cdot \Delta n = C \cdot \frac{\Delta x_2}{\sin \alpha} = -C \cdot \frac{\Delta y_2}{\cos \alpha} \quad (12)$$

La construction des lignes de courant et des équipotentielles du plan réel s'effectue dans l'ordre suivant :

- On se déplace sur la ligne de courant principale  $\psi = 0$  en partant du point O, centre du repère qui est un point double de la transformation :

$$\text{point O} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{array} \right.$$

- Suivant le maillage retenu pour le plan d'étude, on lit directement le  $\Delta\phi$  correspondant à un déplacement vers S par exemple.

Pour ce même point O, on relève également les valeurs du module C et de la direction  $\alpha$  de la vitesse.

- On calcule grâce à la relation (11) les valeurs de  $\Delta x_2$  et  $\Delta y_2$  :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta x_2 = \frac{\Delta\phi \cos \alpha}{C} \\ \Delta y_2 = \frac{\Delta\phi \sin \alpha}{C} \end{array} \right. \quad (13)$$

Les coordonnées du point 1 de la ligne de courant  $\psi = 0$  sont alors définie.

- On se déplace d'un pas sur la même ligne de courant et on procède de même en relevant  $\Delta\phi$ , C et  $\alpha$ . Les relations (13) permettent de définir les coordonnées du point 2 et ainsi de suite jusqu'à la source S.
- On procède de même en se déplaçant du point O vers le point P et l'on obtient dans le plan réel les coordonnées des points allant du point O vers l'infini aval.
- La ligne de courant  $\psi = 0$  étant construite, on décrit, toujours à partir de O, les points correspondant à l'équipotentielle  $\phi = 0$ .

En se déplaçant d'abord vers les  $\psi$  croissants, on relève la valeur de  $\Delta\psi$  et la relation (12) permet de calculer les coordonnées du premier point de l'équipotentielle :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta x_2 = \Delta\psi \cdot \frac{\sin \alpha}{C} \\ \Delta y_2 = - \Delta\psi \cdot \frac{\cos \alpha}{C} \end{array} \right. \quad (14)$$

On observe facilement que, dans le déplacement en  $\psi$  croissants, la vitesse  $C$  associée est continuellement croissante. En limitant cette vitesse à une valeur maximale, on obtiendra la valeur maximale admissible pour  $\psi$ , constituant ainsi l'une des limites de l'écoulement (extrados de l'aubage dans le plan réel).

Inversement, le déplacement en  $\psi$  décroissant fera apparaître des vitesses de plus en plus faibles. En s'imposant une vitesse minimale, on définira ainsi la seconde frontière de l'écoulement constituant l'intrados de l'aubage dans le plan réel.

- On construit l'ensemble des points correspondant à une autre ligne de courant ou à une autre équipotentielle en ajoutant les valeurs correspondantes de  $\Delta x_2$  et  $\Delta y_2$  aux coordonnées des points précédemment définis.

En chacun des points du maillage  $\psi - \phi$ , le module et la direction des vitesses sont parfaitement définis. On peut alors accéder au champ de pression et aux efforts sur les aubages.

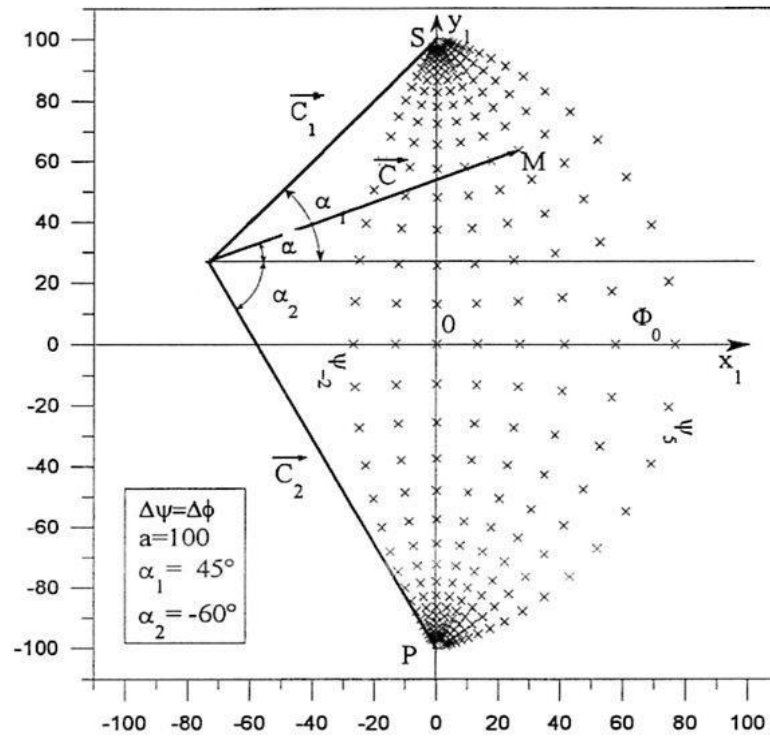
Suivant les valeurs maximales et minimales admissibles pour la vitesse, on peut noter que la forme de l'extrados et de l'intrados de l'aubage sont légèrement modifiés et que les aubages se rapprochent ou s'écartent.

On remarquera enfin que la forme du bord d'attaque et du bord de fuite ne sont pas définis et restent à l'initiative du concepteur.

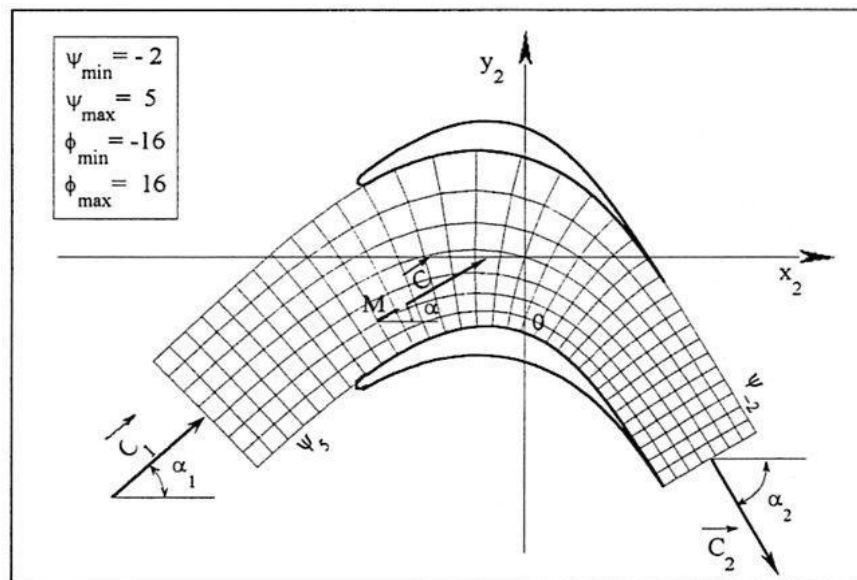
La condition de périodicité n'étant pas respectée au bord de fuite, ceci impliquera un recalage de la direction  $\alpha_2$  imposée en sortie (écart angulaire réduisant la déflexion).

Cet écart angulaire, pouvant atteindre plusieurs degrés, rend par trop imprécise cette méthode en cas de faible déflexion.

## Méthode de l'hodographe



(a) - Plan de l'étude



(b) - Plan réel

Chapitre D

**EXERCICES D'APPLICATION  
ET PROBLEMES**

**EXERCICES SE RAPPORTANT AU CHAPITRE A****Exercice 1 :**

On donne le champ de vitesse suivant :

$$\vec{C} \left| \begin{array}{l} u = x^2 y + y^2 \\ v = x^2 - y^2 x \end{array} \right.$$

- 1 - Vérifier l'équation de continuité.
- 2 - L'écoulement est-il irrotationnel ?
- 3 - Déterminer la fonction de courant.

**Exercice 2 :**

Le vecteur  $\vec{C}$  décrit un écoulement cylindrique tournant (sortie d'une grille d'aubes tournante) :

$$\vec{C} \left| \begin{array}{l} Cr = 0 \\ Cu = K_2 + \frac{K_3}{r} \\ Ca = g(r) \end{array} \right.$$

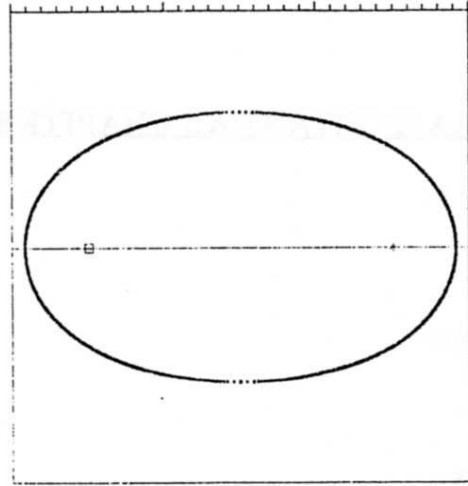
$K_2$  et  $K_3$  sont des constantes et  $g(r)$  est une fonction à définir.

- 1 - Examiner les conditions nécessaires pour que l'écoulement soit irrotationnel.
- 2 - Exprimer le potentiel  $\phi$ .

**Exercice 3 :**

Un écoulement plan incompressible et irrotationnel est engendré par une source de débit  $Q$  située en  $(-a, 0)$ , d'un puit de même débit disposé en  $(+a, 0)$  et d'un écoulement uniforme de vitesse  $C_0$ .

- 1 - Définir le potentiel complexe  $F(z)$ .
- 2 - Déterminer le potentiel  $\phi$  et la fonction de courant  $\psi$ .
- 3 - Quelle est la forme de l'obstacle ainsi constitué.
- 4 - Calculer et localiser la vitesse maximale sur l'obstacle.

**Exercice 4 :**

Le champ de vitesse d'un écoulement hélicoïdal est donné par le vecteur :

$$\vec{C} \begin{cases} C_r = 0 \\ C_u = \frac{K_1}{r} \\ C_a = K_2 \end{cases}$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont des constantes.

1 - Parmi les propositions suivantes, encadrer celles qui vous paraissent justifiées :

Écoulement permanent

Axisymétrique

Incompressible

Irrotationnel

2 - Définir le vecteur accélération  $\vec{\Gamma}$

$$\vec{\Gamma} \begin{cases} \Gamma_r = -\frac{K_1^2}{r^3} \\ \Gamma_\theta = 0 \\ \Gamma_z = 0 \end{cases}$$

3 - En déduire la distribution de pression radiale en supposant les forces de volume.

$$p(r) = -\rho \frac{K_1^2}{2r^2} + \text{cte} \quad \text{pour } \rho = \text{cte}$$

**Exercice 5 :**

1 - Ecrire le potentiel complexe correspondant à l'association d'un écoulement plan infini  $C_0$  parallèle à  $\vec{Ox}$  et d'un vortex d'intensité  $\Gamma$  centré en  $(0, 0)$

$$F(z) =$$

2 - Calculer la vitesse conjuguée  $\vec{C}'$  et en déduire  $u$  et  $v$  du champ de vitesses :

$$u =$$

$$v =$$

3 - Définir les coordonnées du point d'arrêt A :

$$x_A =$$

$$y_A =$$

**EXERCICES SE RAPPORTANT AU CHAPITRE B****Problème 1 : Caractéristiques de la couche limite à la surface de la plaque plane**

- Caractéristiques du fluide :  $\nu = 15.10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$   
 $\mu = 18.10^{-6} \text{ kg} / \text{m.s}$
- Vitesse de l'écoulement :  $U_e = 150 \text{ m} / \text{s}$
- Longueur de la plaque plane :  $l = 200 \text{ mm}$

1 - Définir l'abscisse de la transition en retenant pour critère :  $R_{xcr} = 1.72 \cdot 10^6$

2 - Dresser le tableau suivant, sur la base de travaux de Blasius.

x (mm)	$R_x$	$\delta$ (mm)	$\tau_p$ (N/mm <sup>2</sup> )	$C_f$
1				
50				
100				
150				

3 - Comparer ces valeurs avec celles données par la méthode de Thwaites (R17) :

x (mm)	$\delta_2$ (mm)	$\delta_1$ (mm)	$\tau_p$ (N/mm <sup>2</sup> )	$C_f$
1				
50				
100				
150				

4 - Calculer, dans la zone turbulente, en adoptant la distribution de vitesse en puissance ( $n=7$ ) les valeurs de  $\delta$ ,  $\delta_2$  et  $C_f$  pour  $x = l$ .

**Problème 2 : Définition de la couche limite à la surface d'un cylindre**

Le calcul proposé correspond à l'écoulement bidimensionnel d'un fluide autour d'un cylindre de rayon  $R$ . la couche limite sera supposée entièrement laminaire du point d'arrêt jusqu'au décollement. On retiendra pour ce calcul les méthodes simplifiées consistant à utiliser les relations de la plaque plane étendues au dièdre.

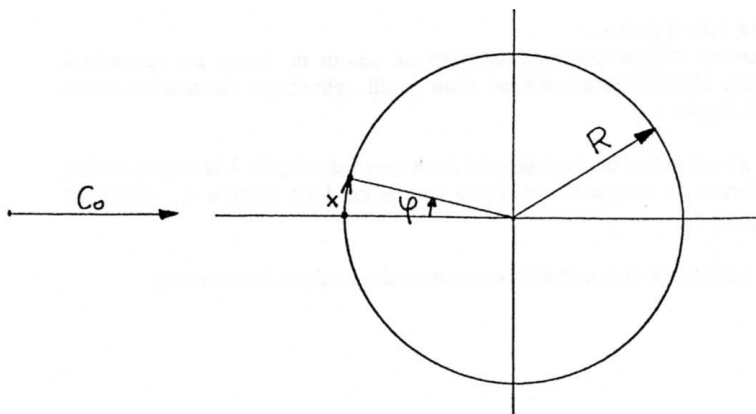
- 1- Dans le cadre de l'écoulement potentiel, définir la vitesse  $U_e$  à la surface du cylindre en fonction de  $C_0$  la vitesse à l'infini amont et de l'angle  $\varphi$  défini sur la figure ci-dessous.
- 2- L'abscisse  $X$ , abscisse curviligne à la surface du cylindre, est une fonction de  $R$  et de  $\varphi$ . Montrer que l'expression du coefficient  $\beta$  de l'angle de dièdre, en fonction de l'angle  $\varphi$ , est donnée par la relation

$$\beta = \frac{2 \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

- 3- Dresser le tableau ci-dessous dans les conditions suivantes :  $C_0 = 10 \text{ m/s}$   
 $R = 100 \text{ mm}$   
 $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (air)

$\varphi$ (°)	$\beta$	m	$U_e$ m/s	X mm	$\mathcal{R}_x$	$\Delta$ mm	$C_f$
0							
20							
40							
60							
80							
$\varphi_{\max} =$							

- 4- Préciser la valeur de  $\varphi_{\max}$  correspondant au décollement de la couche limite ( Rappeler la définition de ce phénomène ). Vérifier l'hypothèse selon laquelle la couche limite est entièrement laminaire.



**Problème N°3 : Etude d'un ballon géostationnaire**

L'étude proposée concerne le projet d'un ballon géostationnaire de moyenne altitude destiné au marché des télécommunications locales.

Placé dans la stratosphère, le ballon sera soumis aux vents locaux et devra garder une position pratiquement stationnaire pour remplir correctement sa mission. Un système de propulsion, à définir, permettra de réaliser cet objectif.

Nous nous proposons de modéliser l'action du vent sur un tel ballon.

**Définition géométrique :**

Le ballon gonflé à l'hélium, est un corps ovoïde de révolution présentant une longueur  $L$  de 71 m et un diamètre maximal de 25 m pour un volume total de  $43\,500\text{ m}^3$ . Les deux extrémités I et II sont raccordées, respectivement, sur des sphères de diamètre 8 m et 22 m ( figure 1 ).

**Conditions de vol :**

L'altitude nominale est égale à 20 000 m, altitude où la pression absolue est égale à 0,05466 bars et où les caractéristiques physiques de l'air sont :

$$\rho = 0,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\nu = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$$

La vitesse maximale du vent local est égal à 25m/s ( quelques heures par an). C'est cette vitesse, supposée dirigée suivant l'axe Ox, que l'on retiendra comme valeur dimensionnante pour le propulseur.

**I – Etude en fluide parfait**

Dans un premier temps, au stade de l'avant-projet, on retiendra les hypothèses suivantes :

- Le fluide est supposé non visqueux.
- L'étude de l'écoulement tridimensionnel axisymétrique autour du ballon est ramenée à celle d'un écoulement bidimensionnel autour d'un profil cylindrique de section droite identique à celle de la figure 1.

L'écoulement au voisinage de l'extrémité I du ballon est assimilé à la superposition d'un écoulement uniforme de vitesse  $C_0$  et d'une source unitaire  $Q_v$  centrée à l'origine du repère (figure 2).

1-Rappeler la forme analytique des potentiels complexes de ces deux écoulements.

2 – Calculer la fonction de courant. Montrer que l'équation du ballon dans cette partie peut s'écrire ( avec  $\theta$  en radian ) :

$$\left| \begin{array}{l} y = -\frac{q_v}{2\pi C_0} \theta \\ x = \frac{y}{\operatorname{tg}\theta} \end{array} \right.$$

3- Montrer que l'expression littérale des composantes de la vitesse à la surface du ballon est donnée par :

$$\left| \begin{array}{l} u = C_0 + \frac{q_v}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = \frac{q_v}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2} \end{array} \right.$$

En déduire les composantes du point d'arrêt.

4 – En identifiant ce point d'arrêt avec celui de la figure 2, calculer la valeur numérique du rapport  $\frac{q_v}{2\pi C_0}$ .

**II – Calcul de la couche limite :**

La couche limite sera calculée à partir des données de la figure 2 où l'on relèvera directement, pour les divers points allant de A à 4, les valeurs de l'angle du dièdre équivalent ainsi que l'abscisse curviligne depuis le point d'arrêt.

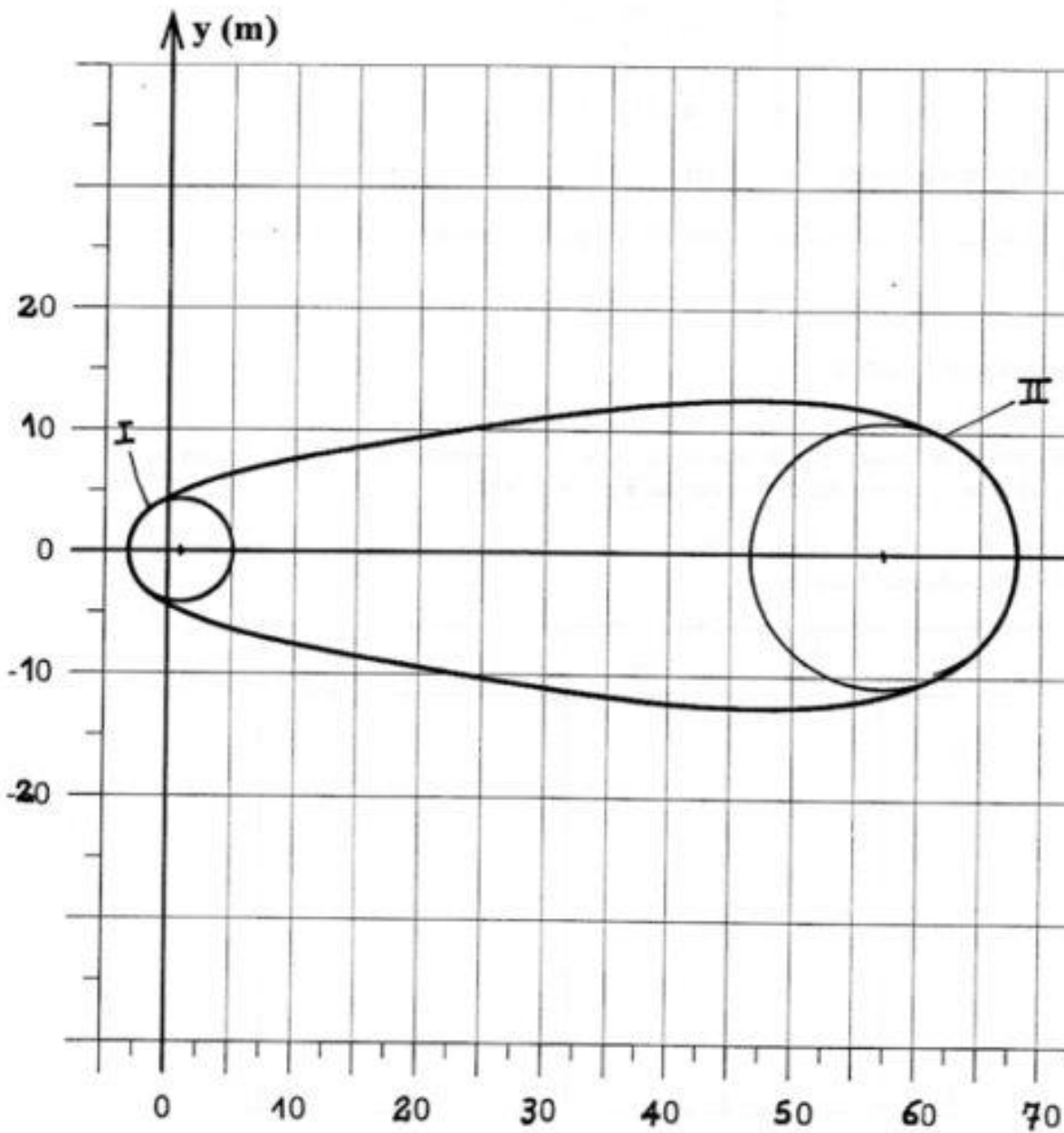
5- Déterminer l'ensemble des éléments du tableau suivant en précisant le principe général du calcul et les hypothèses retenues.

pts	$\Theta$ rd	Ue m/s	$\mathcal{R}_x$	$\beta$	m	$C_f$
A	0					
1	$-\frac{\pi}{4}$					
2	$-\frac{\pi}{2}$					
3	$-\frac{2\pi}{3}$					
4	$-\frac{3\pi}{4}$					

6- Commenter l'allure générale de la figure 3 issue d'un calcul complet. Préciser la position de la transition dans le tableau précédent et en déduire la valeur de Reynolds critique retenu ici.

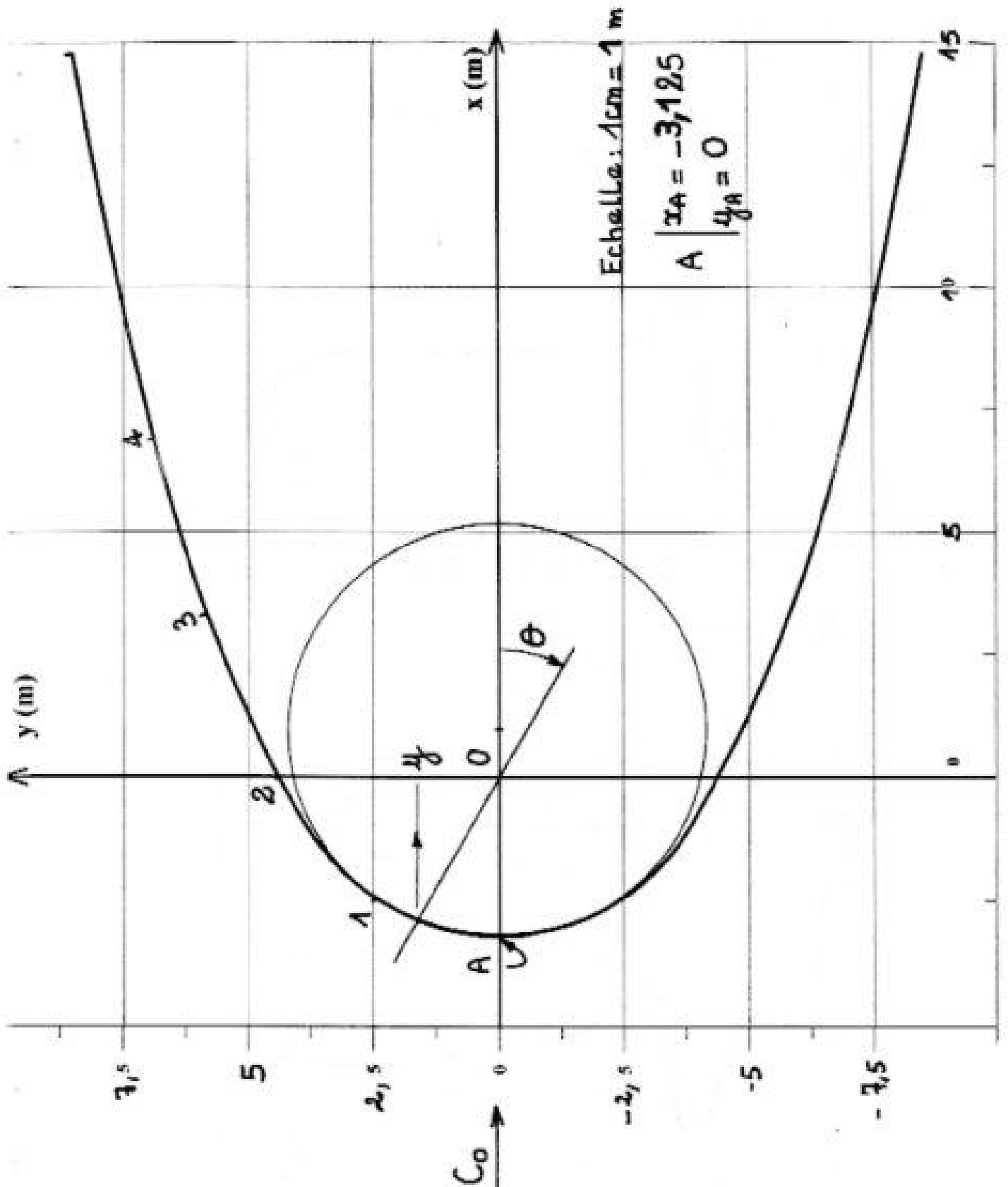
Déduire de la même figure le point de décollement, quelle est sa position dans la région II du ballon.

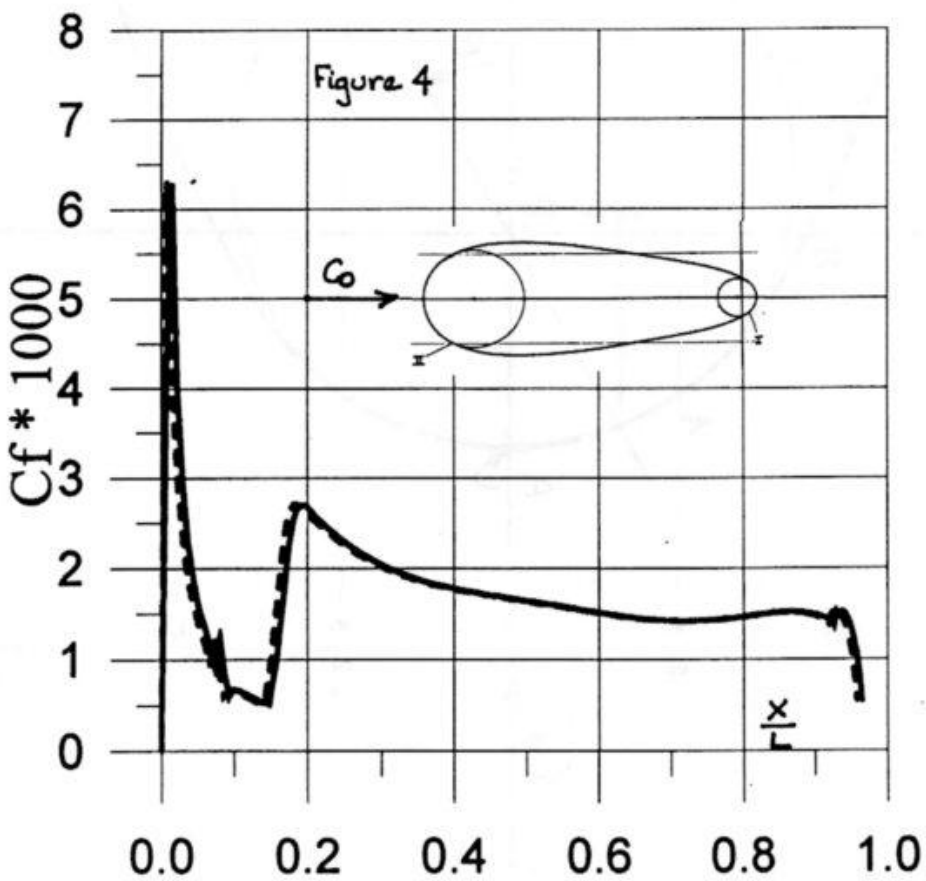
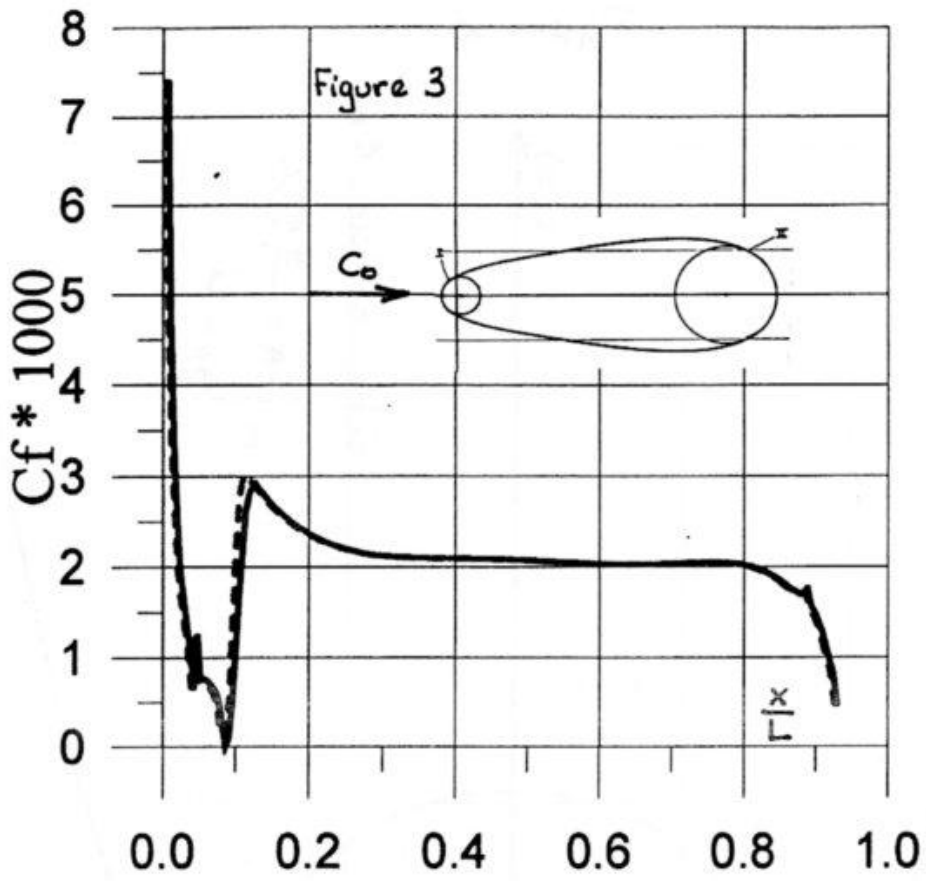
7- Le ballon est placé en position inverse de manière à présenter l'extrémité II au vent. La figure 4 donne l'évolution du coefficient de frottement. Quels sont vos commentaires sur cette figure et quelle conclusion en tirez-vous.



*Figure 1 : Définition géométrique du ballon.*

Figure 2

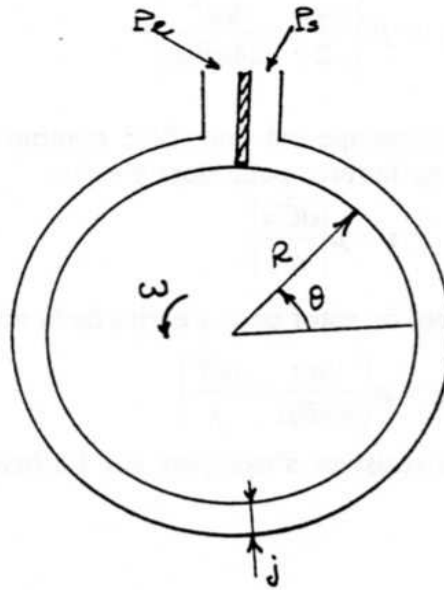




**Problème N° 4 - Pompe périphérique à viscosité :**

Considérons une pompe de modestes caractéristiques dont les propriétés seront définies à partir des équations de Navier Stokes en écoulement unidimensionnel ( figure 1).

La machine est constituée d'un rotor lisse de rayon  $R$ , tournant à la vitesse angulaire  $\omega$ . Le canal d'écoulement est constitué d'une section annulaire de hauteur  $j$  et de largeur  $l$ . un secteur de largeur négligeable assure l'étanchéité entre l'entrée à la pression  $P_e$  et la sortie à la pression  $P_s$ .



**Figure 1** : pompe périphérique à viscosité

Le fluide compris entre le rotor et l'enveloppe extérieure est régi par l'équation de continuité et l'équation de Navier Stokes écrite en coordonnées cylindriques. Le fluide est supposé incompressible, l'écoulement permanent, les composantes axiales et radiale de l'écoulement nulles et les forces de pesanteur négligeables.

Questions :

- 1- Ecrire l'équation de continuité.
- 2- Ecrire les projections de l'équation de Navier Stokes en  $r, \theta, z$ .
- 3- En admettant, dans l'hypothèse où  $j$  est petit devant  $R$ , que l'équation du mouvement se ramène à :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{R \partial \theta} = \nu \frac{d^2 C u}{dr^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\Delta p}{2\pi R} \quad \Delta p = P_s - P_e$$

Montrer que  $C_u$  peut s'écrire sous la forme :

$$C_u = \frac{\Delta p}{4\pi R \mu} r^2 + C_1 r + C_2$$

- 4- En considérant les conditions aux limites en  $r = R$  et  $r = R+j$ , déterminer les constantes  $C_1$  et  $C_2$
- 5- Montrer que, par intégration, le débit peut s'écrire sous la forme :

$$q_v = jL \left[ \frac{\omega R}{2} - \frac{\Delta p j^2}{24\pi R \mu} \right]$$

- 6- Le fluide traversant la pompe est considéré comme fluide Newtonien, la contrainte visqueuse, s'exerçant sur le rotor peut alors s'écrire

$$\tau = \mu \left| \frac{dC_u}{dr} \right|$$

Montrer que la contrainte à la paroi du rotor peut s'écrire de la manière suivante :

$$\tau_p = \mu \left[ \frac{\Delta p j}{4\pi R \mu} + \frac{\omega R}{j} \right]$$

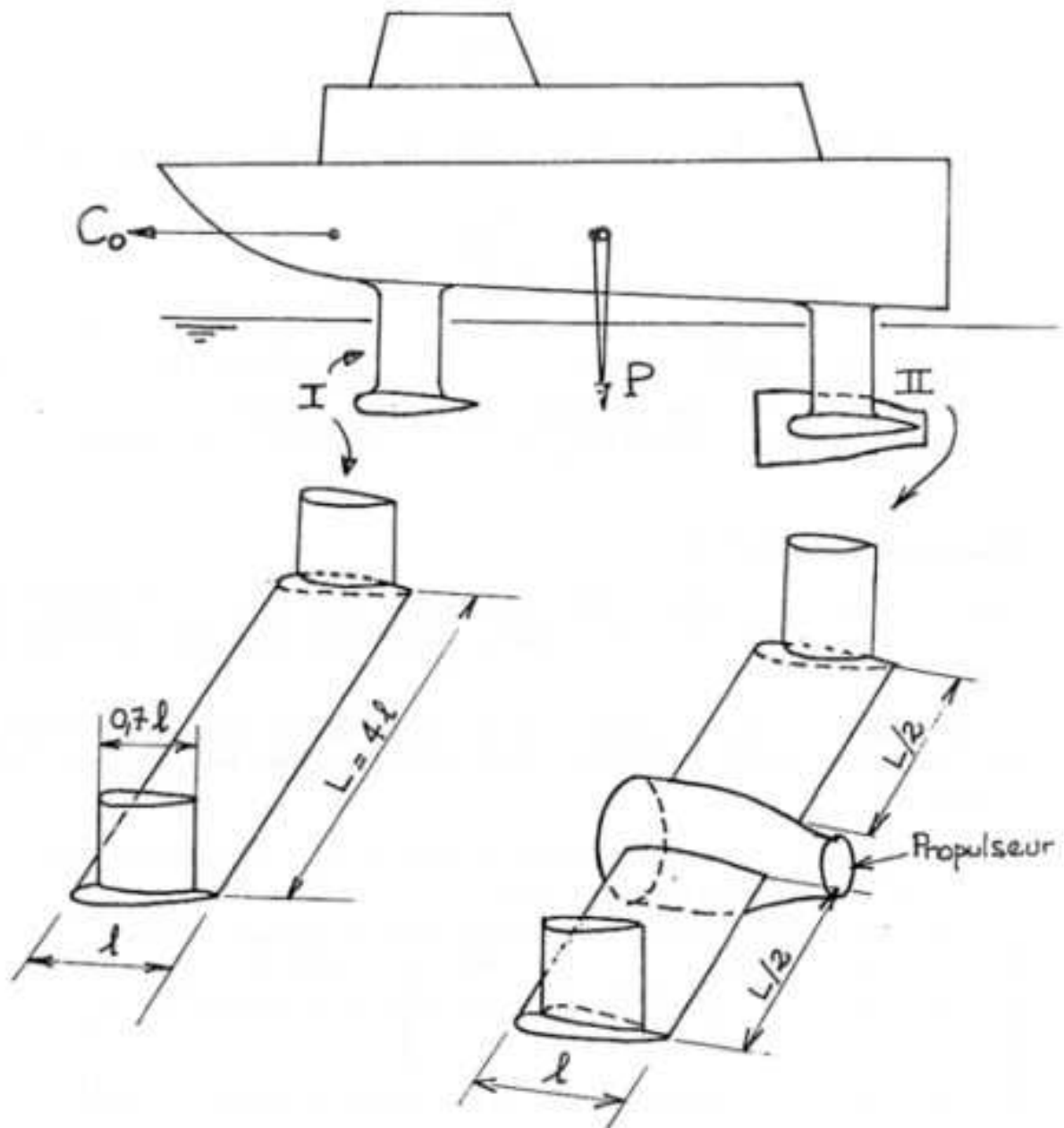
- 7- En déduire le couple résistant s'exerçant sur l'arbre moteur et la puissance correspondante.
- 8- Donner l'expression du rendement en fonction du coefficient de débit :

$$\varphi = \frac{q_v}{jLR\omega}$$

### Problème 5 - Comportement d'un hydrofoil orientable

On se propose de réaliser la première étape du dimensionnement d'un ensemble portant et propulsif destiné à l'équipement d'une vedette de transport rapide.

Deux dispositifs sont mis en place : le dispositif avant I est constitué d'une aile hydrodynamique de corde  $I$  et d'envergure  $L$  permettant de supporter sensiblement **la moitié du poids  $P$**  du bateau et le dispositif arrière II, intégrant le même dispositif qu'à l'avant avec le propulseur (figure 1). L'objectif poursuivi est d'obtenir, pour la vitesse de croisière, le déjaugeage (\*) du bateau. La résistance à l'avancement dans l'eau (majoritaire), est alors réduite à la seule traînée des dispositifs I et II.



**Figure 1 :** Dispositif portant et système de propulsion.

(\*) Elévation du bateau au-dessus de la surface de l'eau.

**I-Dimensionnement global du dispositif portant.**

L'aile hydrodynamique orientable est constituée d'un profil Joukowski dont les caractéristiques géométriques sont les suivantes :

$$\text{Angle de Cambrure } \beta = -10^\circ$$

$$\text{Coefficient d'épaisseur } K = \frac{b}{a \cos \beta} = 0,9$$

On néglige les effets d'extrémité et l'on suppose que l'envergure de chaque aile est 4 fois supérieure à la corde ( $L=4l$ ).

Les caractéristiques physiques adoptées pour l'eau sont données par :

$$\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

- 1- En fluide parfait, définir la corde « $l$ » du profil pour les conditions nominales suivantes :

$$\begin{aligned} &\text{Incidence nulle} \\ &P = 280\,000 \text{ N} \\ &C_0 = 8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

- 2-Définir l'angle d'incidence à adopter pour supporter un poids total égal à  $\frac{P}{2}$  à la vitesse d'avance  $C_0 = 3,56 \text{ m/s}$  ( fonctionnement à vide en vitesse réduite ).

**II – Approche en fluide réel.**

La figure 2 donne le champ de vitesse à la surface du profil en écoulement potentiel pour l'incidence nulle et l'incidence de  $16^\circ$ . La figure 3 détaille, pour une échelle  $\frac{1}{2}$ , la forme de la première moitié du profil.

On se propose de calculer la couche limite à la surface du profil pour deux configurations d'écoulement. On retiendra comme critère de transition **la valeur supérieure** généralement admise.

- 3- Pour l'incidence nulle et la vitesse d'avance de  $8 \text{ m/s}$ , établir le tableau suivant pour les points 1, 2 et 3 définis sur les figures 2 et 3.

pt	X m	Ue m/s	$\mathcal{R}_x$	Régime	$\delta$	$C_f$

Pour simplifier, on adoptera pour ce calcul les relations établies pour le dièdre tangent et on relèvera directement sur les figures 2 et 3 les éléments nécessaires. Commenter les résultats numériques obtenus.

4- Montrer que sous certaines hypothèses à définir, le décollement de la couche limite s'effectue au point 4 pour  $\alpha = 16^\circ$ .

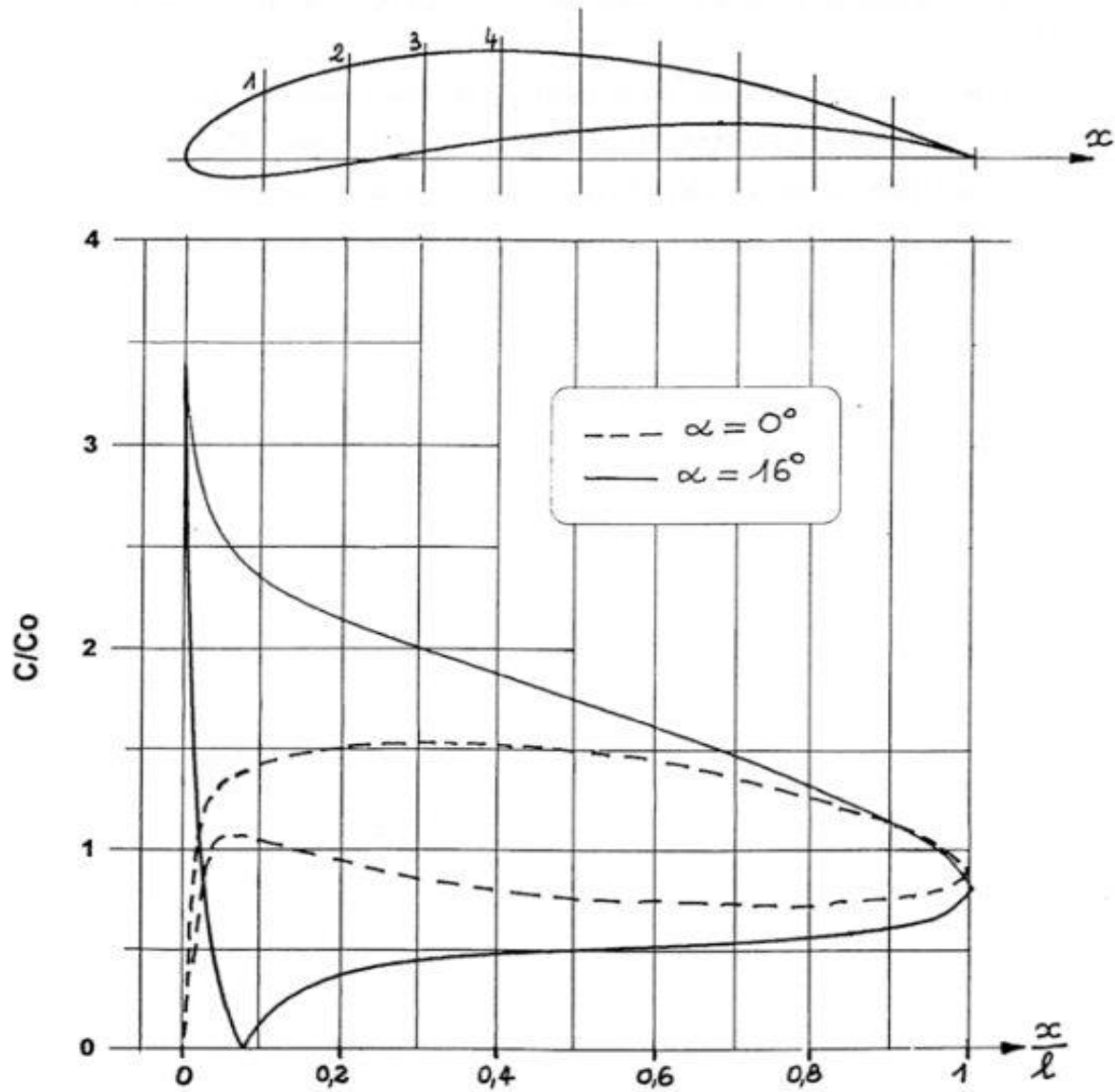
### **III – Cavitation du profil.**

Le profil est immergé à 2 m de profondeur. On se place dans l'hypothèse de l'écoulement potentiel.

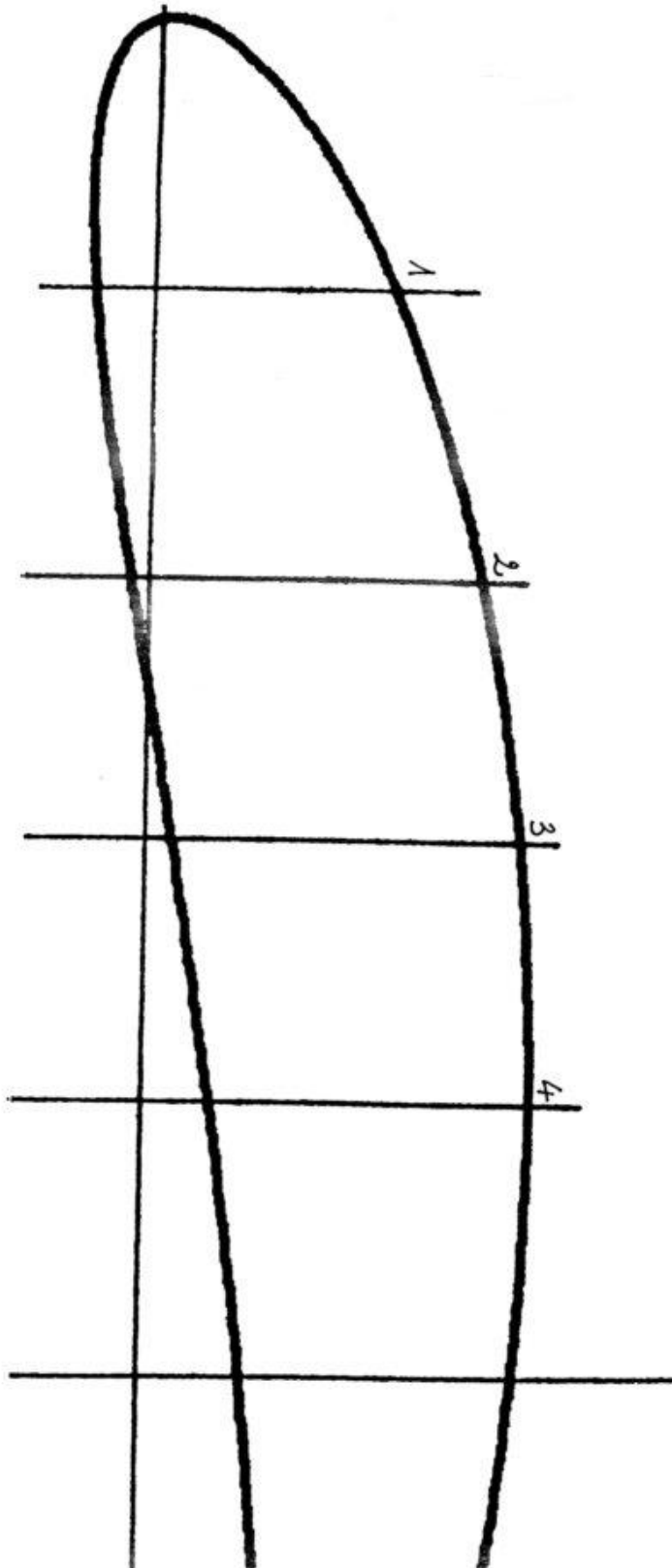
5- Expliciter la condition à respecter pour le rapport  $\frac{C}{C_0}$  afin d'éviter la cavitation au point de pression minimale de la surface au profil. Localiser ce point pour  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 16^\circ$ .

6-Vérifier la condition pour  $\alpha = 0$  et  $C_0 = 8 \text{ m/s}$  puis pour  $\alpha = 16^\circ$  et  $C_0 = 3,56 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

7-A partir de la figure 2, localiser la poche de cavitation lorsque  $C_0$  atteint 8 m/s pour  $\alpha = 16^\circ$ .



**Figure 2 :** Champs de vitesse à la surface du profil



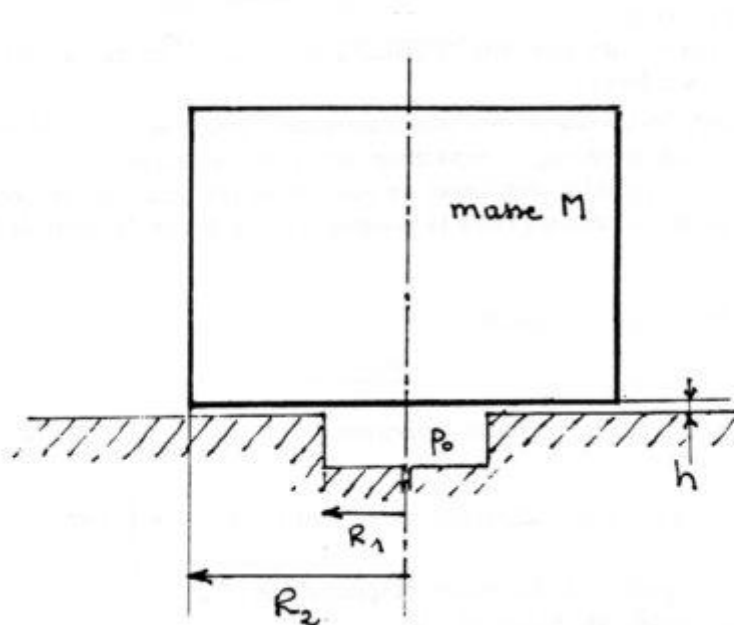
**Problème 6 – Mise en équilibre d'un cylindre**

Un cylindre de masse  $M$ , de rayon  $R_2$  dont la base est parfaitement plane, repose sur un plan horizontal par l'intermédiaire d'une couche fluide de viscosité dynamique  $\mu$  et d'épaisseur  $h$ . Sur ce plan horizontal est situé une cavité circulaire de rayon  $R_1$ , un orifice situé au fond de cette cavité permettra l'alimentation en fluide à une pression  $p_0$  ( voir figure ).

Nous vous proposons d'étudier m'équilibre dynamique en supposant que la base du cylindre reste constamment parallèle au plan horizontal.

Pour les applications numériques on prendra les valeurs suivantes :

$$M=1000 \text{ kg} \quad R_1 = 30 \text{ cm} \quad R_2 = 50 \text{ cm}$$



- 1) Dans un premier temps le cylindre repose sur le plan horizontal sans qu'il ait écoulement. Calculer la pression nécessaire pour soulever celui-ci.
- 2) On admet que l'écoulement reste partout en parallèle aux faces, qu'il est axisymétrique, stationnaire et sans rotation.
  - a) Quelles sont les conséquences de ces hypothèses sur les composantes des vitesses et leurs dérivées.
  - b) Ecrire l'équation de continuité ainsi simplifiée.
  - c) Montrer qu'elle se réduit à  $\frac{\partial(rCr)}{\partial r} = 0$  soit  $rCr = f(z)$

- 3) En tenant compte de ces hypothèses,  
 a) Ecrire les équations de Navier-Stokes.  
 b) Montrer que la pression qui règne dans la couche fluide ne dépend que du rayon.  
 c) Montrer que l'équation dynamique se réduit à la forme :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = -Cr \frac{\partial Cr}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 Cr}{\partial z^2} \right] \quad (1)$$

- 4) Dans cette partie, le fluide est supposé non visqueux.  
 a) Donner l'expression de  $p(r)$ .  
 b) Donner l'expression de la vitesse débitante moyenne  $\overline{Cr}$  en fonction du débit de fuite  $q_v$  à travers la levée  $h$ .  
 c) En utilisant les conditions aux limites suivantes ;  $p(R_1) = p_0$  ;  $Cr(R_1) = \overline{Cr}$   
 Ecrire l'équation qui régit la répartition radiale de la pression.  
 d) En écrivant l'équilibre des forces de poids et de pression dans la cavité et dans le canal, donner la relation entre la pression dans la cavité, le débit de fuite  $q_v$  et la levée  $h$ .
- 5) Etude de l'influence de la viscosité :

Dans l'équation (1) on pose :  $\frac{\partial^2 Cr}{\partial z^2} = A(r)$  (2)  
 Et on considère les conditions aux limites suivantes :

Conditions d'adhérence sur les parois et  $q_v = 2\pi r \int_0^h Cr \, dz$

- a) A partir de l'équation (2) déterminer l'expression de  $Cr(z)$   
 b) Donner la nouvelle expression de  $p(r)$ .

Chapitre E

**ANNEXES ET RAPPELS**

# ANNEXES

---

## R.1. - Produit vectoriel

Soient deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  définis par leurs composantes respectives (coordonnées cartésiennes) :

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

On définit le produit vectoriel par :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} v_1 w_2 - w_1 v_2 \\ w_1 u_2 - u_1 w_2 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix}$$

Si  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  sont colinéaires,  $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{O}$

## R.2. - Produit scalaire

Le produit scalaire de  $\vec{V}_1$  par  $\vec{V}_2$  est défini par :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 = V_1 V_2 \cos \alpha$$

Si  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  sont perpendiculaires,  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$

## R.3. - Gradient d'une fonction scalaire $\phi$

La fonction  $\phi(x, y, z)$  a pour gradient le vecteur suivant :

$$\vec{\text{grad}} \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

coordonnées cartésiennes

$$\vec{\text{grad}} \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ r \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

coordonnées cylindriques

#### **R.4. - Divergence**

Soit le vecteur  $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ , on définit sa divergence par le scalaire

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{coordonnées cartésiennes})$$

#### **R.5. - Rotationnel**

Le vecteur  $\vec{V}$  a pour rotationnel le vecteur :

$$\text{rot } \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

#### **R.6. - Laplacien**

Laplacien d'une fonction  $\varphi(x, y, z)$  :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

et en coordonnées cylindriques :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

**R.7. - Théorème de Green-Ostrogradski**

$$\iint_S \vec{n} \cdot \vec{A} dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV$$

**R.8. - Différentielle totale**

Soit  $\phi$  une fonction des coordonnées et du temps :

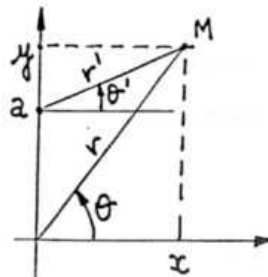
$$\phi = \phi(x, y, z, t)$$

La différentielle totale de  $\phi$  sera donnée par :

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt$$

Inversement, la fonction  $K = K_1 dx + K_2 dy + K_3 dz + K_4 dt$  est une différentielle totale exacte égale à  $dU$  si l'on a simultanément :

$$K_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad K_2 = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad K_3 = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad K_4 = \frac{\partial U}{\partial t}$$

**R.9. - Changement de repère**

$$r' = \sqrt{x^2 + (y - a)^2}$$

$$\theta' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y - a}{x}$$

**R.10. - Rappel**

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} a - \operatorname{arc} \operatorname{tg} b = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a - b}{1 + ab}$$

**R.11. - Rappel**

$$f = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u \quad df = \frac{du}{1 + u^2}$$

**R.12. – Autres rappels**

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2)$$

**R.13. - En utilisant les relations suivantes :**

$$\begin{cases} \cos(\alpha+2\beta) = \cos\alpha \cos 2\beta - \sin\alpha \sin 2\beta \\ \sin(\alpha+2\beta) = \sin\alpha \cos 2\beta + \cos\alpha \sin 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\beta = 2 \sin\beta \cos\beta \\ \cos 2\beta = 1 - 2 \sin^2\beta = 2 \cos^2\beta - 1 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \operatorname{Co} \left[ 2 \cos\alpha \sin^2\beta + 2 \sin\alpha \sin\beta \cos\beta \right] = \sin\beta \frac{\Gamma}{2\pi a} \\ \operatorname{Co} \left[ 2 \sin\alpha \cos^2\beta + 2 \cos\alpha \sin\beta \cos\beta \right] = \cos\beta \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{cases}$$

conduisant à la même relation :

$$2 \operatorname{Co} \sin(\alpha+\beta) = \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

soit :  $\Gamma = 4\pi a \operatorname{Co} \sin(\alpha+\beta)$

**R.14. - Mouvement relatif**

Ecrivons l'irrotationnalité de l'écoulement absolu :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{C}} = 0$$

En coordonnées cylindriques, cette relation vectorielle s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{C} = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial C_a}{\partial \theta} - \frac{\partial C_u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_a}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rC_u)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial C_r}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

En remplaçant chaque composante de la vitesse absolue par sa valeur en fonction des composantes relatives et d'entraînement :

$$\vec{C} = \vec{U} + \vec{W} = \begin{vmatrix} 0 \\ \omega r \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} W_r \\ W_u \\ W_a \end{vmatrix} = \begin{cases} C_r = W_r \\ C_u = \omega r + W_u \\ C_a = W_a \end{cases}$$

Le système (1) s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{C} = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial W_a}{\partial r} - \frac{\partial W_u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_a}{\partial r} = 0 \\ 2\omega + \frac{1}{r} \frac{\partial(rW_u)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

En observant que le rotationnel de  $\vec{U}$  s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{U} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{vmatrix}$$

Le système (2) peut s'écrire :

$$\vec{\text{rot}} \vec{C} = \vec{\text{rot}} \vec{W} + 2 \vec{\omega}$$

ou encore :

$$\vec{\text{rot}} \vec{W} = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial W_a}{\partial r} - \frac{\partial W_u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_a}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rW_u)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} = -2\omega \end{cases} \quad (3)$$

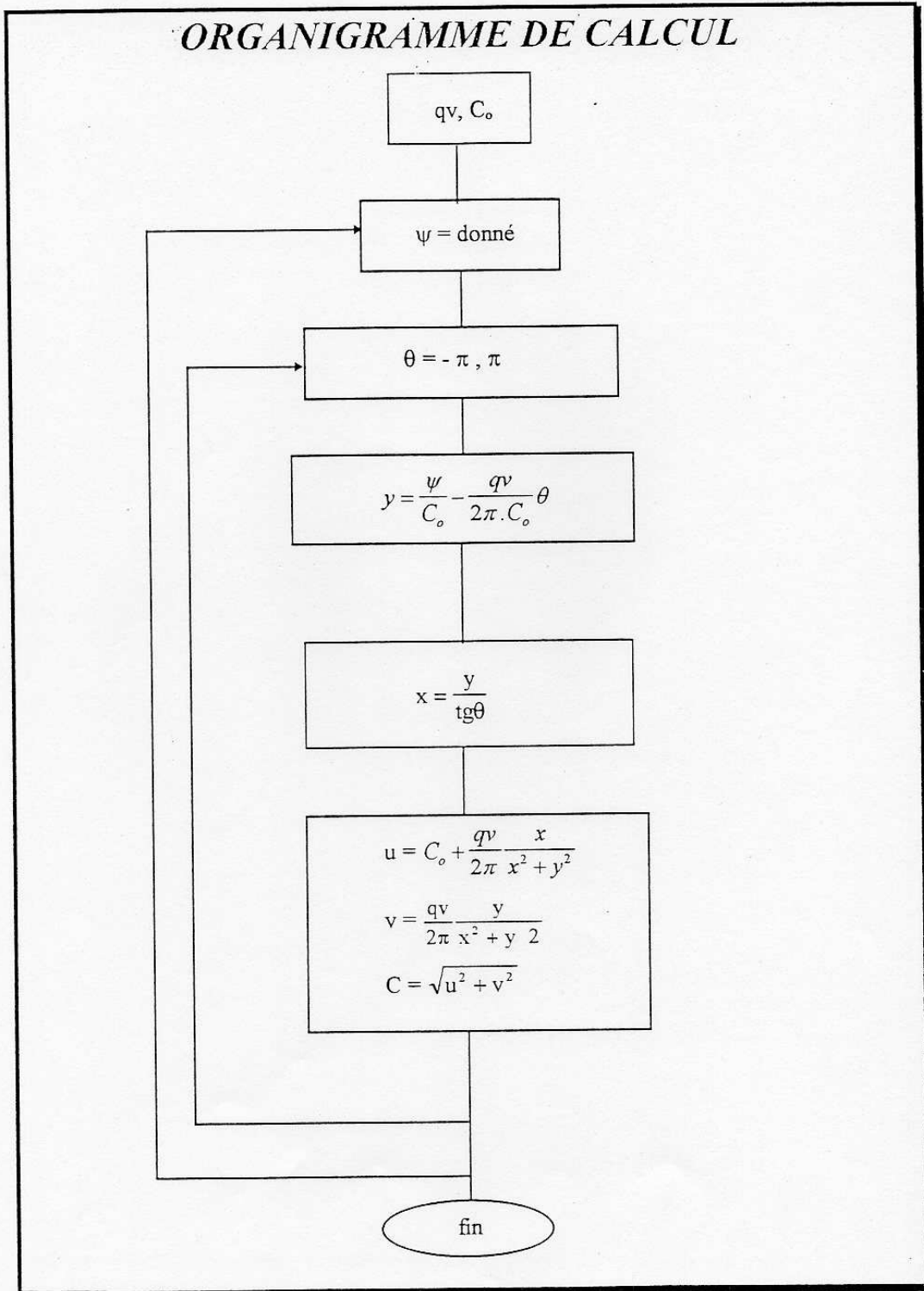
Le mouvement relatif est donc rotationnel.

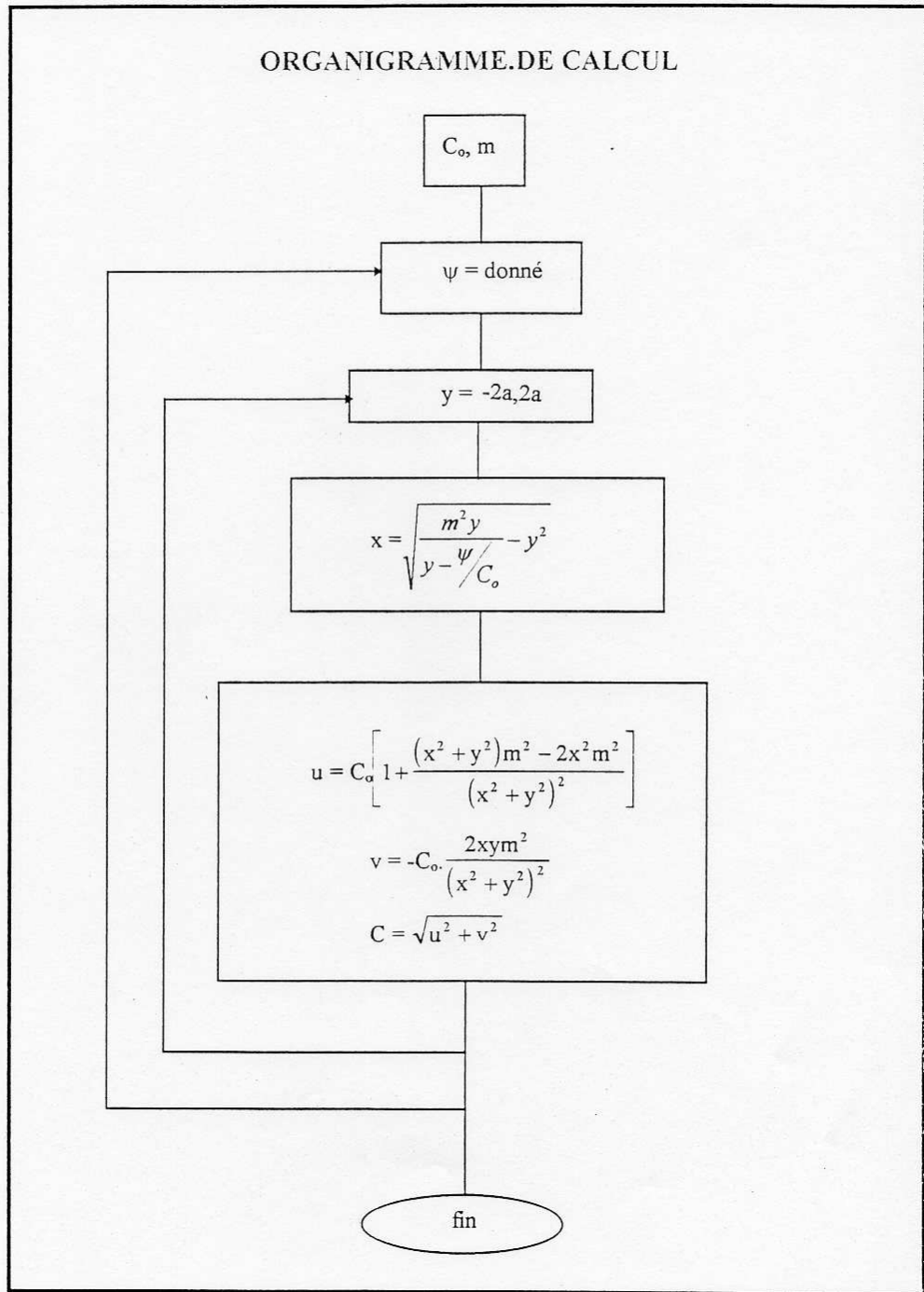
**R.17. - Fonction f de Blasius**

$s$	$f$	$f' = \frac{u}{U_e}$	$f''$
0	0	0	0,33206
0,2	0,00664	0,06641	0,33199
0,4	0,02656	0,13277	0,33147
0,6	0,05974	0,19894	0,33008
0,8	0,10611	0,26471	0,32739
1,0	0,16557	0,32979	0,32301
1,4	0,32298	0,45627	0,30787
1,8	0,52952	0,57477	0,28293
2,2	0,78120	0,68132	0,24835
2,6	1,07252	0,77246	0,20646
3,0	1,39682	0,84605	0,16136
4,0	2,30576	0,95552	0,06424
5,0	3,28329	0,99155	0,01591
6,0	4,27964	0,99898	0,00240
7,0	5,27926	0,99992	0,00022
8,0	6,27923	1,00000	0,00001
8,8	7,07923	1,00000	0,00000

**R.18. - Valeurs recommandées de Walz-Thwaites**

$K$	$H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$	$\frac{\tau_p \delta_2}{\mu U_e}$	$K$	$H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$	$\frac{\tau_p \delta_2}{\mu U_e}$
0,25	2,00	0,500	-0,040	2,81	0,153
0,20	2,07	0,463	-0,048	2,87	0,138
0,14	2,18	0,404	-0,056	2,94	0,122
0,12	2,23	0,382	-0,060	2,99	0,113
0,10	2,28	0,359	-0,064	3,04	0,104
0,080	2,34	0,333	-0,068	3,09	0,095
0,064	2,39	0,313	-0,072	3,15	0,085
0,048	2,44	0,291	-0,076	3,22	0,072
0,032	2,49	0,268	-0,080	3,30	0,056
0,016	2,55	0,244	-0,084	3,39	0,038
0	2,61	0,220	-0,086	3,44	0,027
-0,016	2,67	0,195	-0,088	3,49	0,015
-0,032	2,75	0,168	-0,090	3,55	0

**R.19. - Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source**

R.20. - Superposition d'un écoulement uniforme et d'un doublet

**R.21. - Euler 3 D**

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = W_m \sin \delta \left[ \frac{\partial W_m}{\partial r} \sin \delta + W_m \cos \delta \frac{\partial \delta}{\partial r} \right] + \left[ \frac{W_m}{r} \operatorname{tg} \beta + \omega \right] \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \sin \delta$$

$$+ W_m \cos \delta \left[ \frac{\partial W_m}{\partial z} \sin \delta + W_m \cos \delta \frac{\partial \delta}{\partial z} \right] - \frac{Cu^2}{r} + \frac{\partial W_m}{\partial t} \sin \delta - f_D \cos \beta \sin \delta$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} = W_m \sin \delta \left[ \frac{\partial W_m}{\partial r} \operatorname{tg} \beta + W_m (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] + \left[ \frac{W_m}{r} \operatorname{tg} \beta + \omega \right] \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \operatorname{tg} \beta$$

$$+ W_m \cos \delta \left[ \frac{\partial W_m}{\partial z} \operatorname{tg} \beta + W_m (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \frac{\partial \beta}{\partial z} \right] + \frac{Cu}{r} W_m \sin \delta + \frac{\partial W_m}{\partial t} \operatorname{tg} \beta + r \frac{d\omega}{dt} - f_D \sin \beta$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = W_m \sin \delta \left[ \frac{\partial W_m}{\partial r} \cos \delta - W_m \sin \delta \frac{\partial \delta}{\partial r} \right] + \left( \frac{W_m}{r} \operatorname{tg} \beta + \omega \right) \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \cos \delta$$

$$+ W_m \cos \delta \left[ \frac{\partial W_m}{\partial z} \cos \delta - W_m \sin \delta \frac{\partial \delta}{\partial z} \right] + \frac{\partial W_m}{\partial t} \cos \delta - f_D \cos \beta \cos \delta$$

En utilisant les propriétés géométriques de (28) et en remarquant que :

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = \frac{\partial W_m}{\partial t} \cdot \frac{dm}{dt} \frac{dt}{dm} = \frac{\partial W_m}{\partial t} W_m \frac{dt}{dm},$$

les composantes s'écrivent :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{W_m \sin \delta}{dm} \left[ \frac{\partial W_m}{\partial r} dr + \frac{\partial W_m}{r \partial \theta} r d\theta + \frac{\partial W_m}{\partial z} dz + \frac{\partial W_m}{\partial t} dt \right]$$

$$+ \frac{W_m^2}{dm} \cos \delta \left[ \frac{\partial \delta}{\partial r} dr + \frac{\partial \delta}{\partial z} dz \right] - \frac{Cu^2}{r} + \omega \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \sin \delta - f_D \cos \beta \sin \delta$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} = \frac{W_m \operatorname{tg} \beta}{dm} \left[ \frac{\partial W_m}{\partial r} dr + \frac{\partial W_m}{r \partial \theta} r d\theta + \frac{\partial W_m}{\partial z} dz + \frac{\partial W_m}{\partial t} dt \right]$$

$$+ \frac{W_m^2}{dm} (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \left[ \frac{\partial \beta}{\partial r} dr + \frac{\partial \beta}{\partial z} dz \right] + \frac{Cu}{r} W_m \sin \delta + r \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \operatorname{tg} \beta - f_D \sin \beta$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{W_m \cos \delta}{dm} \left[ \frac{\partial W_m}{\partial r} dr + \frac{\partial W_m}{r \partial \theta} r d\theta + \frac{\partial W_m}{\partial z} dz + \frac{\partial W_m}{\partial t} dt \right]$$

$$- \frac{W_m^2}{dm} \sin \delta \left[ \frac{\partial \delta}{\partial r} dr + \frac{\partial \delta}{\partial z} dz \right] + \omega \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \cos \delta$$

Les termes entre crochets sont des différentielles totales.

$$dW_m = \frac{\partial W_m}{\partial r} dr + \frac{\partial W_m}{r\partial\theta} r d\theta + \frac{\partial W_m}{\partial z} dz + \frac{\partial W_m}{\partial t} dt$$

$$d\delta = \frac{\partial\delta}{\partial r} dr + \frac{\partial\delta}{\partial z} dz$$

$$d\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r} dr + \frac{\partial\beta}{\partial z} dz$$

Chapitre F

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

**1) OUVRAGES GENERAUX**

- 101 - R. COMOLET : « Mécanique expérimentale des fluides »  
1982 - Ed. Masson - Paris
- 102 - R. OUZIAUX et J. PERRIER : « Mécanique des fluides appliquée »  
1972 - Ed. Dunod - Paris
- 103 - A. HOUBERECHT : « Les turbines »  
1972 - Ed. Vander - Louvain
- 104 - KARASSIK : « Pump Handbook »  
1976 - Ed. Mc Graw Hill Co - New York
- 105 - I. RYHMING : « Dynamique des fluides »  
1985 - Ed. Presses Polytechniques Romandes
- 106 - G.T. CSANADY : « Theory of turbomachinery »  
1964 - Ed. Mc Graw Hill Co - New York
- 107 - G. MEAUZE et A. CARRERE : « Etude aérodynamique de l'écoulement dans les aubages de machines tournantes »  
1984 - Cours à l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace
- 108 - F. LEOEUF, R. VOUILLARMET, P. FERRAND : « Aérothermodynamique des turbomachines »  
Cours de l'Ecole Centrale de Lyon
- 109 - B. LAKSHINARAYANA : « An assessment of computational fluid dynamic techniques in the analysis and design of turbomachinery »  
1991 - Journal of Fluid Engineering - ASME - Vol. 113
- 110 - D. ALTHAUS, F.X. WORTMANN : « Stuttgarter profilkatalog I »  
1981 - Ed. VIEWEG - Wiesbaden
- 111 - F.W. RIEGELS : « Results from wind-tunnel investigations »  
1961 - Ed. Butterworths - London

- 112 - F. GIRERT : « Aérodynamique B2 »  
1977 - Cours du CNAM
- 113 - D. ALTHAUS : « Profilpolaren für den modellflug »  
1980 - Ed Neckar - Verlag - Villingen

## **2) PUBLICATIONS ET COMMUNICATIONS**

- 201 - E. BONATAKI, P. CHAVIAROPOULOS, K.D. PAPAILIOU : « An inverse inviscid method for the design of quasi-three-dimensional turbomachinery cascade »  
ASME - journal of Fluids Engineering - March 1993 - Vol. 115
- 202 - Document CETIM - HYD/CD - 85 Ni049  
Mai 1985
- 203 - M.H. FAGARD : « Etude des écoulements décollés en grilles d'aubes en régime sous-sonique compressible »  
Thèse de Doctorat - LEMFI - Paris VI - 1993
- 204 - T.S. LUU, B. VINEY, L. BENCHERIF : « Inverse problem using S2-S1 approach for the design of the turbomachine with splitter blades »  
Revue Française de Mécanique - p. 209-224 - n° 1992.3 - FRANCE
- 205 - A.A. FAY : « Simple performance model for pumps »  
Pumping Machinery - ASME - FED. Vol. 154 - p. 119-125 - 1993
- 206 - M. JAREMCZAK : « Analyse théorique et expérimentale du bruit hydraulique des pompes centrifuges »  
Thèse de Doctorat - Université de Lille - FRANCE - 1992
- 207 - F.C. VISSER, J.J.H. BROUWERS : « Review of status of potential flow calculations in radially bladed pump impellers »  
Pumping machinery - ASME FED. Vol. 154 - p. 219-226 - 1993

- 208 - J. CHAUVIN, R.A. VAN DEN BRAEMBUSSCHE, P. LUBUNGA, C. LOUDET : « Calcul de l'écoulement dans le plan circonférentiel d'une roue mixte » Institut Von Karman - Rhodes - Belgique - 1973
- 209 - G. ASSASSA et K.D. PAPAILIOU : « An integral method for calculating turbulent boundary layers with separations »  
1979 - ASME - Journal of fluid engineering - Vol. 100 - p. 110-116
- 210 - WU C.H. : « A general theory of three dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial, radial and mixed-flow types »  
NACA - TN 2604 - 1952
- 211 - MARSH M. : « A digital computer program for the through flow fluid mechanics in an arbitrary turbomachine using a matrix method »  
Reports et Memoranda - N° 3509 - 1966
- 212 - BOSMAN C. et MARSH M. : « Improved method for calculating the flow in turbomachine, including a consistent loss model »  
JSME - Vol. 16 - N° 1 - 1974
- 213 - BOSMAN C. et EL SHAARAWI . : « Quasi three dimensional numerical solutions of flow in turbomachines »  
ASME - 1977
- 214 - DAVIS W.R. et MILLAR D. : « A comparison of the matrix and streamline curvative methods of axial flow turbomachinery analysis from a user's point of view »  
ASME - 1975
- 215 - RIBAUD Y. et SOVRANO R. : « Calculs théoriques d'écoulements dans les turbomachines radiales. Calcul de l'écoulement moyen »  
ONERA - NT N° 1/3086 - 1973
- 216 - NOVAK R.A. : « Streamline curvative computing procedures for fluid-flow problems »  
ASME - 1967
- 217 - SENOO Y. et NAKASE Y. : « An analysis of flow through a mixed flow impeller »

ASME - 1972

- 218 - FROST D. : « A streamline curvature through-flow computer program for analysing the flow through axial-flow turbomachines »  
Reports and Memoranda - N° 3687 - 1970
- 219 - WILKINSON D.H.
- 220 - NOVAK R.A. et HEARSEY R.H. : « A nearly three-dimensional intrablade computing system for turbomachinery »  
ASME - 1977
- 221 - HIRSCH C.H. et WARZEE G. : « A finite element method for the axisymmetric flow computation in a turbomachine »  
INJME - Vol. 10 - 1976
- 222 - HONG TUAN HA : « Etablissement d'un programme de calcul de l'écoulement méridien d'une turbomachine radiale par la méthode des éléments finis »  
Journal de Mécanique Appliquée - N° 4 - 1979
- 223 - DENTON J.D. et SINGH U.K. : « Time marching methods for turbomachinery flows calculation »  
VKI - Lectures series - 1979
- 224 - VEUILLOT J.P. : « Calculation of the quasi-three dimensional flow in a turbomachine blade row »  
ASME - N° 76- GT-56 - 1976
- 225 - CROCCO L. : « A suggestion for the numerical solution of the steady Navier-Stokes equations »  
AIAA - Vol. 3 - N° 10
- 226 - KATSANIS T. : « Computer program for calculating velocities and streamlines on a blade-to-blade surface of a turbomachine »  
NASA - TN 4525 - 1968  
NASA - TN 8430 - 1977

- 227 - WEISS P. : « Etude théorique et expérimentale de la compression diphasique. Application au pompage de liquides aérés »  
1996 - Thèse de Doctorat - LEMFI - ENSAM - Paris
- 228 - BELAMRI T. : « Modélisation des écoulements par la méthode des singularités »  
1994 - DEA Conversion de l'Energie - Filière I - LEMFI - ENSAM - Paris
- 229 - ROUBI M. : « Mise en oeuvre numérique et analyse critique de différents modèles de couche limite »  
1995 - DEA Conversion de l'Energie - Filière I - LEMFI - ENSAM - Paris
- 230 - KUS U. : « Contribution à la prédiction des performances globales et locales des grilles d'aubes »  
1995 - Thèse de Doctorat - LEMFI - ENSAM - Paris
- 231 - HERRIG L., EMERY C., ERWIN R. : « Systematic two dimensional cascade tests of NACA 65 - Series compressor blades at low speeds »  
1957 - NACA TN 3916
- 232 - REY R. : « Methode générale de détermination d'un étage de turbomachine axiale de compression »  
1981 - Thèse de Doctorat d'Etat - Paris VI
- 233 - NOGUERA R. : « Contribution à la maîtrise du dimensionnement et du fonctionnement des turbomachines axiales - Etude des débits partiels et de la cavitation »  
1987 - Thèse de Doctorat d'Etat - Paris VI
- 234 - BAKIR F. : « Méthode de dimensionnement et d'analyse des machines de compression hélico-centrifuges en régime incompressible »  
1992 - Thèse de Doctorat - LEMFI - ENSAM - Paris
- 235 - KOUIDRI S. : « Etude théorique et expérimentale de l'influence des paramètres constructifs sur les caractéristiques aéroacoustiques des ventilateurs axiaux »  
1993 - Thèse de Doctorat - LEMFI - ENSAM - Paris