

**UEE PA6 – IFMAT et MASTER IMCE**

**UNITE D'ENSEIGNEMENT  
AERO-HYDRODYNAMIQUE INTERNE DES MACHINES**

**TOME II**

**PROFILS, GRILLES D'AUBES ET MACHINES AXIALES**

**Novembre 2008**

**R. REY – Professeur  
R. NOGUERA – Mdc**

- A -

ETUDE THEORIQUE  
ET EXPERIMENTALE DU PROFIL  
PORTANT

<b>I) TRANSFORMATION CONFORME</b>	<b>p. 4</b>
1.1. Ecoulement autour d'un cylindre de section circulaire	
1.2. Transformation de Joukovski	
<b>II) TRANSFORMATION GENERALE CERCLE PROFIL</b>	<b>p. 15</b>
<b>III) AEODYNAMIQUE DU PROFIL JOUKOWSKI</b>	<b>p. 20</b>
<b>IV) METHODE DES SINGULARITES</b>	<b>p. 23</b>
4.1. Superposition d'un écoulement uniforme et d'un ensemble des singularités	
4.2. Superposition d'un écoulement uniforme et d'une succession de doublets	
4.3. Création de la portance	
<b>V) TRAITEMENT DU PROBLEME DIRECT</b>	<b>p. 33</b>
<b>VI) COMPORTEMENT ET OPTIMISATION EN FLUIDE REEL</b>	<b>p. 39</b>
6.1. Efforts aérodynamiques	
6.2. Evolution de la couche limite	
6.3. Séries de profils	
6.4. Résultats expérimentaux	

## **ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DU PROFIL PORTANT**

Cette étude est abordée en fluide parfait par le biais de la transformation conforme et plus particulièrement de la transformation de Joukovski. Elle est développée ensuite sur la base de la méthode des singularités source-puits ou doublets associés à une nappe tourbillonnaire.

Dans ces deux méthodes très générales, l'objectif est double. Il s'agit de traiter le problème direct, à savoir déterminer le champ de vitesses et de pression autour d'un profil de forme donnée ou, inversement, de définir le profil le mieux adapté (au sens des pertes) à une portance ou une distribution de vitesses fixée à l'avance.

On abordera ensuite une méthode d'évaluation des couches limites et des pertes de frottement à la paroi du profil, méthode basée sur les résultats du chapitre précédent.

On décrira enfin les résultats obtenus en soufflerie et notamment les régimes de décollement intrados et extrados.

## I - TRANSFORMATION CONFORME

La transformation conforme permet de résoudre l'écoulement autour d'une forme quelconque à partir de l'écoulement connu autour d'une forme simple.

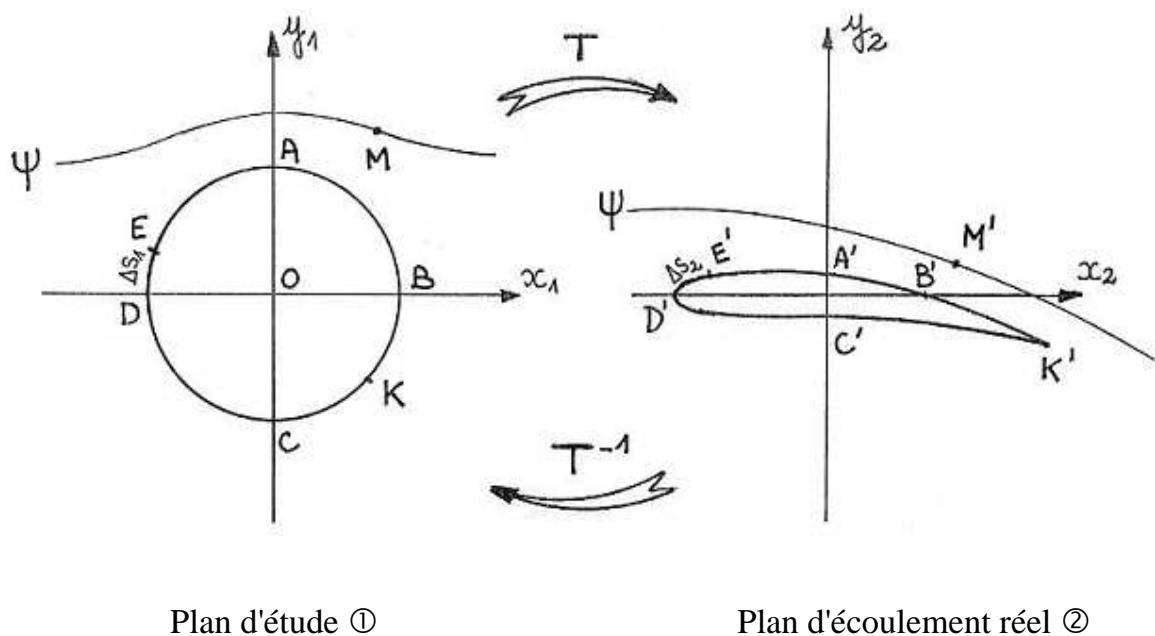
Au plan complexe d'étude  $(x_1, y_1)$  dans lequel est décrit l'écoulement connu, on va faire correspondre le plan complexe  $(x_2, y_2)$  ou  $(\xi, \eta)$  dans lequel sera décrit l'écoulement inconnu. Cette transformation s'effectuera suivant les principes et les règles de la transformation conforme qui transformera à la fois la géométrie de l'obstacle et la géométrie des lignes de courant et des équipotentielles.

Cette transformation  $T$  s'effectuera à partir de la fonction  $f$  qui reste à définir à chaque application :

$$z_2 = f(z_1) \quad (1)$$

On utilisera également la transformation inverse  $T^{-1}$  définie par la fonction  $f^{-1}$  :

$$z_1 = f^{-1}(z_2) \quad (2)$$



**Figure 1 : Transformation conforme  $T$**

La figure 1 traduit cette propriété, elle montre la correspondance entre les points A, B, C, D, K et A', B', C', D', K' appartenant respectivement à l'obstacle étudié ainsi que la correspondance entre le point M appartenant à la ligne de courant  $\psi$  et le point M' appartenant à la ligne de courant homologue.

Le plan d'étude est ainsi entièrement transformé pour constituer le plan d'écoulement réel.

On démontre que dans l'espace complexe servant de base à la transformation conforme, les propriétés suivantes sont observées :

### **Propriétés de la transformation conforme**

- La transformation conforme conserve les angles : si deux vecteurs forment dans le plan ① un angle  $\alpha$  donné, cet angle sera conservé pour les deux vecteurs homologues du plan d'écoulement ②.
- Les lignes de courant et les équipotentiels étant orthogonales en un point du plan d'étude, elles conserveront cette propriété dans le plan ② (en dehors des points singuliers de la transformation).
- Les cotes des équipotentiels et des lignes de courant se conserveront respectivement au cours de la transformation. La forme du profil réel correspond à la ligne de courant  $\psi = 0$  de l'écoulement de référence.
- La circulation du vecteur vitesse entre deux points du plan ① sera conservée entre les deux points homologues du plan ②.
- Partant dans le plan d'étude d'un cercle, à chaque fonction transformation  $f$  correspondra une forme, et une seule, de l'obstacle dans le plan réel. Inversement, pour définir à partir de la transformation conforme un profil déterminé il faudra procéder à diverses retouches successives de la fonction  $f$ . C'est la difficulté majeure rencontrée au cours de cette application.
- Pour reconstituer l'écoulement réel, il est possible d'utiliser plusieurs transformations conformes successives.

Si  $F(z_1)$  représente le potentiel complexe dans le plan d'écoulement ①, on peut remplacer  $z_1$  grâce à la transformation inverse  $f^{-1}(z_2)$ , on obtient ainsi :

$$F(z_1) = F(f^{-1}(z_2)) = G(z_2) \quad (3)$$

Le second membre est une fonction de  $z_2$  que l'on peut écrire  $G(z_2)$ , c'est le potentiel complexe de l'écoulement ②.

Utilisant cette égalité, on peut faire apparaître les vitesses complexes (vitesses conjuguées) :

$$C'_1 = \frac{dF}{dz_1} \quad \text{et} \quad C'_2 = \frac{dG}{dz_2} \quad (4)$$

On écrira successivement :

$$C'_2 = \frac{dG}{dz_2} = \frac{dF}{dz_2} = \frac{dF}{dz_1} \cdot \frac{dz_1}{dz_2} = C'_1 \cdot \frac{dz_1}{dz_2}$$

En utilisant l'équation de définition (1), on peut écrire :

$$dz_2 = \frac{df}{dz_1} \cdot dz_1$$

Soit finalement la relation entre les vitesses complexes :

$$C'_2 = \frac{C'_1}{\frac{df}{dz_1}} \quad (5)$$

Rappelons les expressions des vitesses complexes (A-73) :

$$\begin{cases} C'_2 = u_2 - iv_2 = (Cr_2 - i Cu_2) \exp(-i\theta_2) \\ C'_1 = u_1 - iv_1 = (Cr_1 - i Vu_1) \exp(-i\theta_1) \end{cases} \quad (5b)$$

La vitesse est également calculable par la propriété de conservation du potentiel :

$$\Delta\phi = C_1 \cdot \Delta S_1 = C_2 \cdot \Delta S_2 \quad (5c)$$

## 1.1. Écoulement autour d'un cylindre de section circulaire

Les transformations les plus courantes permettent, à partir de l'écoulement avec circulation autour d'un cylindre, de reconstituer l'écoulement autour d'un profil aérodynamique.

La fonction de courant est obtenue par superposition de l'écoulement autour d'un cylindre (A-115) avec un écoulement à circulation de vitesse centré en O :

$$F(z_1) = Co \left( z_1 + \frac{a^2}{z_1} \right) + \frac{i}{2\pi} \Gamma \ln \frac{z_1}{a} \quad (6)$$

La constante  $a$  représente le rayon du cercle, la vitesse  $Co$  représente la vitesse de l'écoulement à l'infini amont et  $\Gamma$  la circulation de vitesse.

Si l'on souhaite étudier le même écoulement sous l'angle d'incidence  $\alpha$ , l'affixe  $z_1$  sera transformée en  $z_1 \cdot \exp(-i\alpha)$  correspondant à une rotation de  $\alpha$  dans le sens trigonométrique ; d'où le potentiel complexe :

$$F(z_1) = Co \left[ z_1 \exp(-i\alpha) + \frac{a^2}{z_1} \exp(i\alpha) \right] + \frac{i}{2\pi} \Gamma \ln \left[ \frac{z_1}{a} \exp(-i\alpha) \right]$$

En posant  $z_1 = r_1 \exp(i\theta_1)$ , la fonction potentiel  $F(z_1)$  s'écrira :

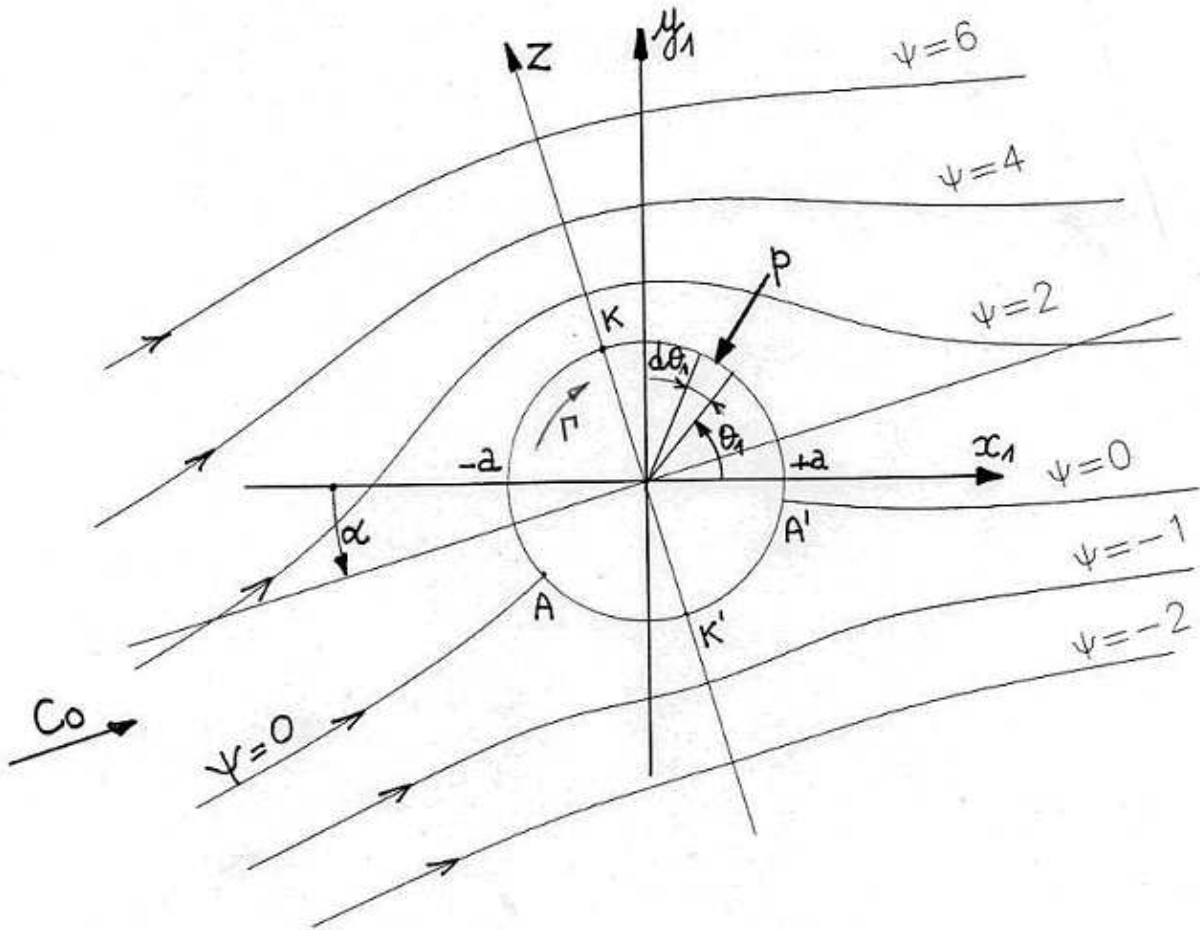
$$F(z_1) = Co \left[ r_1 \exp(i(\theta_1 - \alpha)) + \frac{a^2}{r_1} \exp(-i(\theta_1 - \alpha)) \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left[ \frac{r_1}{a} \exp(i(\theta_1 - \alpha)) \right] \quad (7)$$

D'où l'on tire par identification avec  $F(z_1) = \phi_1 + i\psi_1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 = Co \left( r_1 + \frac{a^2}{r_1} \right) \cos(\theta_1 - \alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta_1 - \alpha) \\ \psi_1 = Co \left( r_1 - \frac{a^2}{r_1} \right) \sin(\theta_1 - \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r_1}{a} \end{array} \right. \quad (8)$$

La ligne de courant  $\psi_1 = 0$  est composée du cercle de rayon  $a$  ( $r_1 = a$ ) et de la courbe définie par :

$$\sin(\theta_1 - \alpha) = -\frac{\Gamma}{2\pi Co r_1} \frac{\ln \frac{r_1}{a}}{1 - \frac{a^2}{r_1^2}} \quad (9)$$



**Figure 2 :** *Ecoulement avec circulation autour d'un cylindre de rayon a*

Le champ de vitesses est défini à partir des relations classiques :

$$\begin{cases} C_{r_1} = \frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} = \frac{\partial \psi_1}{r_1 \partial \theta_1} = Co \left( 1 - \frac{a^2}{r_1^2} \right) \cos(\theta_1 - \alpha) \\ C_{u_1} = \frac{\partial \phi_1}{r_1 \partial \theta_1} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial r_1} = -Co \left( 1 + \frac{a^2}{r_1^2} \right) \sin(\theta_1 - \alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi r_1} \end{cases} \quad (10)$$

A la surface de l'obstacle, on aura ( $r_1 = a$ ) :

$$\left| \begin{array}{l} Cr_1 = 0 \\ Cu_1 = -2 V_0 \sin(\theta_1 - \alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{array} \right. \quad (11)$$

Les points d'arrêt A et A' sont obtenus pour  $V_1 = V\theta_1 = 0$ ,

$$\text{Soit pour : } \sin(\theta_1 - \alpha) = -\frac{\Gamma}{4\pi C_0 a} \quad (12)$$

D'où les valeurs de  $\theta_A$  et  $\theta_{A'}$  correspondant aux points d'arrêt :

$$\boxed{\begin{array}{l} \theta_A = \pi + \alpha + \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi a C_0} \\ \theta_{A'} = \alpha - \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi a C_0} \end{array}} \quad (13)$$

La vitesse maximale est obtenue pour  $\theta_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$  (point K) et la vitesse minimale pour

$\theta_1 = \alpha - \frac{\pi}{2}$  (point K').

$$C_{\max} = |Cu_1 \max| = 2 C_0 + \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (14)$$

$$C_{\min} = |Cu_1 \min| = 2 C_0 - \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

Cette valeur minimale est positive si  $V_0 > \frac{\Gamma}{4\pi a}$ , c'est la limite de l'écoulement réel pouvant être engendré par l'obstacle cylindrique.

### Portance :

La relation de Bernoulli entre l'infini amont et un point M quelconque appartenant au cercle permet d'écrire :

$$p^\infty + \rho \frac{C_0^2}{2} = p + \rho \frac{C^2}{2} \quad (15)$$

La partie supérieure du cercle contenant les points AKA' est en dépression (grande vitesse) tandis que l'arc AK'A' est en surpression.

L'écoulement étant symétrique par rapport à l'axe OZ, la résultante globale aérodynamique ou hydrodynamique  $F_z$  sera de même direction et de même sens que

OZ. On la calculera par la projection de l'effort élémentaire associé à la pression p sur la surface a dθ<sub>1</sub> :

$$F_z = - \int_0^{2\pi} p \sin(\theta_1 - \alpha) a d\theta_1 \quad (16)$$

Soit d'après (15) :

$$F_z = - \int_0^{2\pi} \left[ p_\infty - \frac{1}{2} \rho (C_o^2 - C^2) \right] \sin(\theta_1 - \alpha) a d\theta_1$$

En remplaçant C<sup>2</sup> par la valeur issue du système (11) et en remarquant que les termes en exposant impair de sin(θ<sub>1</sub> - α) s'annulent sur le domaine d'intégration, la portance F<sub>z</sub> s'écrira :

$$F_z = \rho \frac{C_o \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta_1 - \alpha) d\theta_1$$

soit

$$F_z = \rho V_o \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \frac{1}{2} (\theta_1 - \alpha) - \frac{1}{4} \sin 2(\theta_1 - \alpha) \right]_0^{2\pi}$$

et soit finalement :

$$F_z = \rho C_o \Gamma \quad (17)$$

Cette dernière relation est la loi de Joukovski exprimant la portance exercée sur un obstacle par unité de longueur. On peut noter que F<sub>z</sub> est dirigée perpendiculairement à la direction de l'écoulement. On démontre également que l'expression de la portance est identique quelle que soit la section du cylindre (circulaire ou quelconque).

### Traînée :

La traînée est la résultante des efforts de pression sur l'axe  $\vec{OX}$  de même direction que  $\vec{V}_o$ . Compte tenu de la symétrie de l'écoulement par rapport à  $\vec{OZ}$ , cette résultante est nulle en fluide parfait.

## 1.2. Transformation de Joukowski

La transformation de Joukowski est définie de la façon suivante :

A tout point d'affixe  $z_1$  du plan d'étude ① est associé le point d'affixe  $z_2$  du plan réel ② par la transformation définie par la fonction :

$$z_2 = f(z_1) = \left( z_1 + \frac{b^2}{z_1} \right) \quad (18)$$

### Transformation cercle - plaque plane

Les points situés sur le cercle de rayon  $a$  défini sur la figure 2 ont pour affixe :

$$z_1 = a(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

En portant cette valeur dans (18), on obtiendra :

$$z_2 = \left( a + \frac{b^2}{a} \right) \cos \theta_1 + i \left( a - \frac{b^2}{a} \right) \sin \theta_1$$

En identifiant avec  $z_2 = x_2 + i y_2$ , on aura :

$$\begin{cases} x_2 = \left( a + \frac{b^2}{a} \right) \cos \theta_1 \\ y_2 = \left( a - \frac{b^2}{a} \right) \sin \theta_1 \end{cases} \quad (19)$$

Partant du système (19), on peut éliminer  $\cos \theta_1$  et  $\sin \theta_1$  et définir l'équation de la courbe transformée :

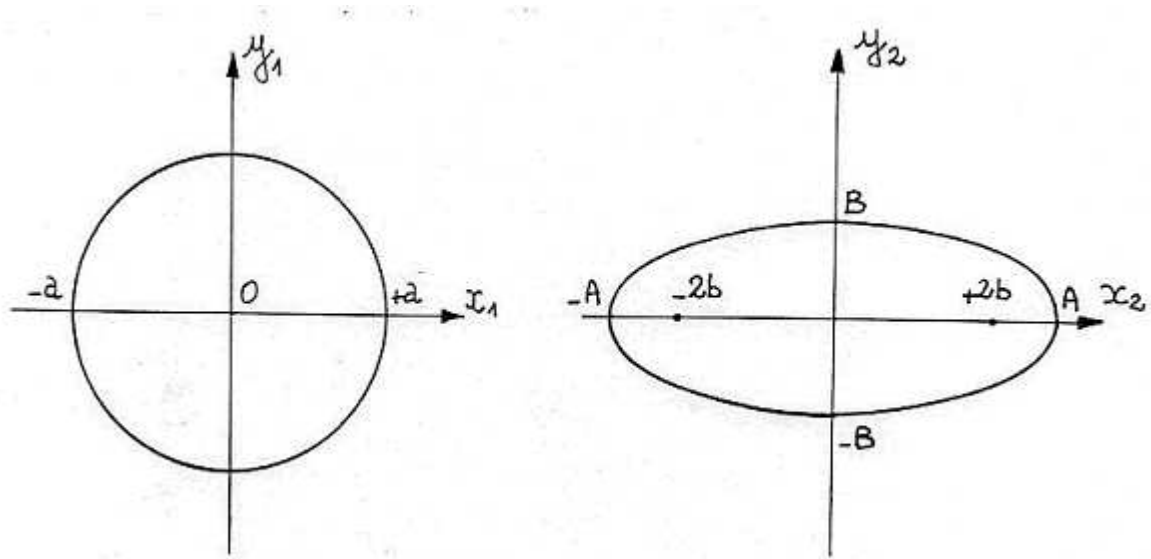
$$\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 = 1 = \frac{x_2^2}{\left( a + \frac{b^2}{a} \right)^2} + \frac{y_2^2}{\left( a - \frac{b^2}{a} \right)^2} \quad (20)$$

équation correspondant à une ellipse de grand axe :

$$A = \left( a + \frac{b^2}{a} \right)$$

et de petit axe :

$$B = \left( a - \frac{b^2}{a} \right)$$



**Figure 3 : Transformation cercle-ellipse**

Le cylindre de section circulaire est transformé en un cylindre de section elliptique de grand axe et petit axe variables en fonction de  $b/a$ .

Dans le cas particulier où  $b = a$ , le système (19) se réduit à :

$$\begin{cases} x_2 = 2a \cos \theta_1 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

Le cercle de rayon  $a$  est transformé en un segment de droite de longueur  $4a$  (figure 4). La même transformation (18) appliquée aux lignes de courant du plan ① permet de tracer les lignes de courant dans le plan ②.

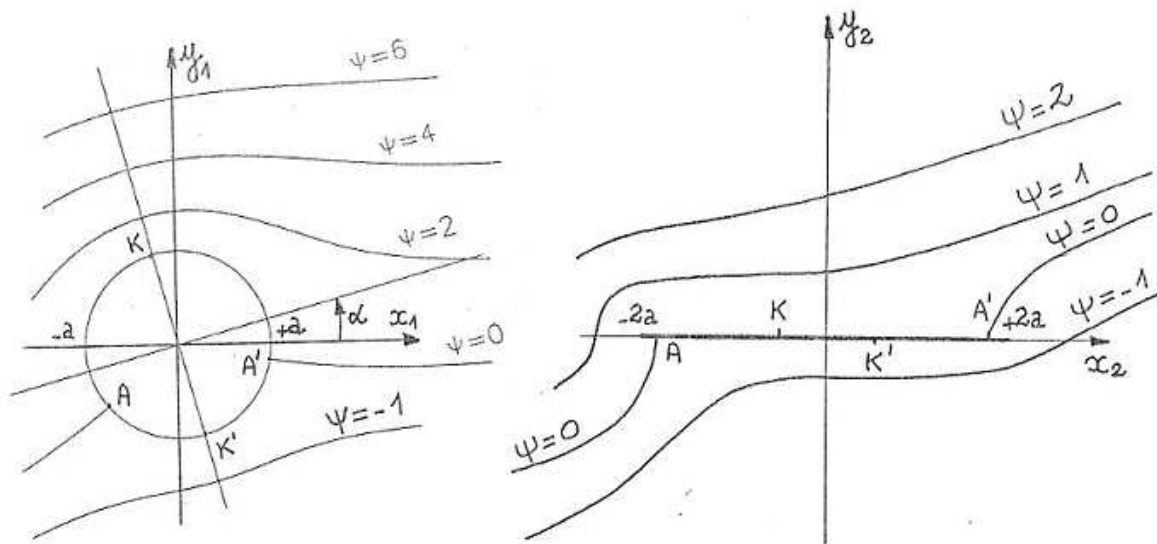


Figure 4 : Transformation cercle-plaque plane

### Condition de Kutta-Joukowski :

Toutes les conditions d'incidence et de circulation sont possibles concernant l'écoulement sur le cylindre. S'appuyant sur l'expérience et la physique des écoulements réels, Kutta puis Joukowski ont montré qu'à chaque incidence  $\alpha$  correspond une circulation  $\Gamma$  donnée. Cette relation est établie sur la base de l'égalité des vitesses intrados et extrados au bord de fuite du profil.

Sur la figure 4, cette condition implique, sur le cercle, que A' se situe à l'abscisse  $x_1 = a$  et donc que  $\theta'_A$  (relation 13) soit nul.

La condition de Kutta-Joukowski se traduit donc par la relation :

$$\Gamma = 4\pi a C_o \sin \alpha \quad (22)$$

Relation correspondant d'après (17) à la portance par unité de longueur :

$$F_Z = 4\pi a \rho C_o^2 \sin \alpha \quad (23)$$

En introduisant le coefficient de portance  $C_z$  du profil plan, défini par la relation :

$$C_z = \frac{F_z}{\rho \frac{Co^2}{2} L} \quad (24)$$

et en observant que la corde L du profil transformé est égale à 4a, les relations (23) et (24) donnent la forme :

$$\boxed{C_z = 2\pi \sin \alpha} \quad (25)$$

Relation montrant que la pente du coefficient de portance en fonction de l'incidence est constante et égale à  $2\pi$  (si l'incidence  $\alpha$  reste modérée).

## II - TRANSFORMATION GENERALE CERCLE-PROFIL

Dans cette transformation, le cercle étudié est centré au point O d'affixe  $z_0$ . Le potentiel complexe (6) exprimé dans le repère  $(x_1, y_1)$  devient alors :

$$F(z_1) = Co \left[ (z_1 - z_0) \exp(-i\alpha) + \frac{a^2}{(z_1 - z_0)} \exp(i\alpha) \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left[ \frac{(z_1 - z_0)}{a} \exp(-i\alpha) \right] \quad (29)$$

La figure 5 permet de définir l'affixe complexe  $z_0$  égale à :

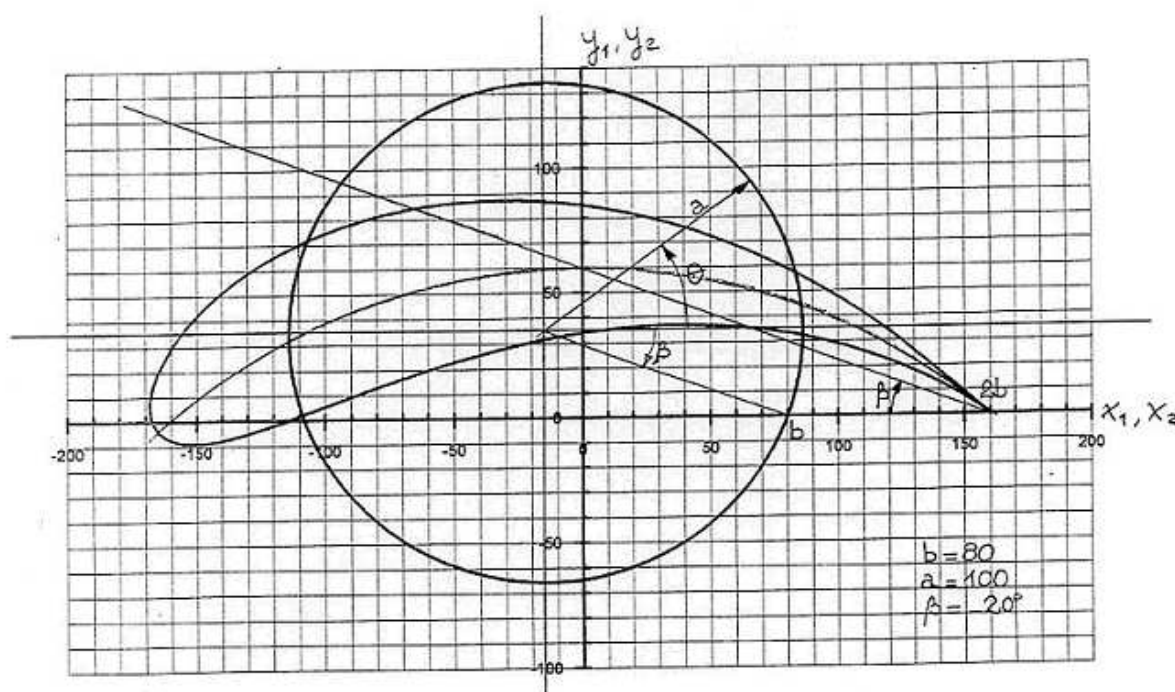
$$z_0 = x_0 + i y_0$$

En introduisant  $b$ , l'abscisse du point d'arrêt A' ainsi que  $\beta$  l'angle formé entre l'axe Ox et le segment OA', on aura respectivement ( $\beta$  est négatif) :

$$\begin{cases} x_0 = b - a \cos \beta \\ y_0 = a \sin \beta \end{cases} \quad (30)$$

soit :

$$z_0 = b - a \exp(+i\beta) \quad (31)$$



**Figure 5 : Transformation de Joukowski ( $\beta = -20^\circ$ ,  $\frac{b}{a} = 0,8$ )**

Les points situés sur le cercle ont pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_1 = a \cos \theta + x_0 \\ y_1 = a \sin \theta + y_0 \end{cases} \quad (32)$$

Utilisant la transformation de Joukovski définie en (18) :

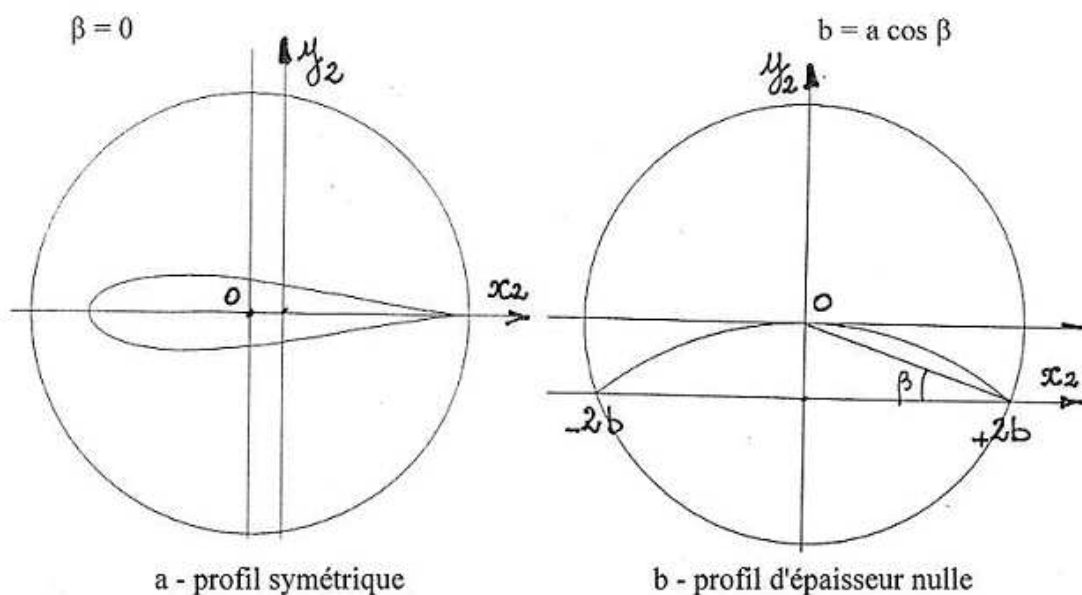
$$z_2 = z_1 + \frac{b^2}{z_1} = x_2 + iy_2$$

avec :  $z_1 = x_1 + iy_1$

Les points transformés auront pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{b^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2} \\ y_2 = y_1 - \frac{b^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \end{cases} \quad (33)$$

Les systèmes (30), (32) et (33) donnent l'équation du profil Joukovski à deux paramètres libres : l'angle  $\beta$  fixant la cambrure du profil et le rapport  $b / a \cos \beta$  fixant l'épaisseur relative. La ligne moyenne est pratiquement circulaire (figure 5) et on démontre que le bord de fuite est un point de rebroussement.



**Figure 6** : Transformation cercle-profil

### Cas particuliers :

- Lorsque l'angle  $\beta = 0$ , la cambrure est nulle et on obtient un profil symétrique (figure 6a).
- Lorsque  $b = a \cos \beta$ , l'épaisseur du profil est nulle, l'intrados et l'extrados sont confondus avec la ligne moyenne (figure 6b). La corde est alors égale à  $4b$  et la cambrure géométrique à :

$$\frac{|f_{\max}|}{L} = \frac{2|y_0|}{4b} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} |\beta| \quad (34)$$

### Champ de vitesses à la surface du cylindre circulaire et condition de KUTTA

Reprenons le potentiel complexe défini en (29) et calculons la vitesse complexe autour du cylindre :

$$C'_1 = \frac{dF}{dz_1} = \operatorname{Co} \left[ \exp(-i\alpha) - \frac{a^2 \exp(i\alpha)}{(z_1 - z_0)^2} \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi(z_1 - z_0)} \quad (35)$$

En remarquant qu'à la surface du cylindre de rayon  $a$ , le terme  $(z_1 - z_0)$  est égal à :

$$(z_1 - z_0) = a \exp(i\theta) \quad (36)$$

La vitesse complexe se réduira à :

$$C'_1 = \operatorname{Co} \left[ \exp(-i\alpha) - \exp(i\alpha) \exp(-2i\theta) \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi a} \exp(-i\theta)$$

ou encore :

$$C'_1 = \operatorname{Co} \left[ \exp(-i\alpha) - \exp(i(\alpha - 2\theta)) \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi a} \exp(-i\theta) \quad (37)$$

Notons qu'au point d'arrêt  $A'$  ( $\theta = \beta$ ), la vitesse est nulle. La relation (37) donnera alors la condition de Kutta-Joukowski fixant la circulation :

$$C'_1(\theta = \beta) = 0$$

qui s'écrit également :

$$\text{Co} [\exp (-i\alpha) - \exp (i(\alpha - 2\beta))] + \frac{i\Gamma}{2\pi a} \exp (-i\beta) = 0$$

En développant cette relation et en annulant les parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Co} [\cos \alpha - \cos (\alpha - 2\beta)] = -\sin \beta \frac{\Gamma}{2\pi a} \\ \text{Co} [\sin \alpha + \sin (\alpha - 2\beta)] = \cos \beta \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{array} \right.$$

Ces deux équations sont en fait identiques (annexe R.13) et se ramènent à :

$$\boxed{\Gamma = 4\pi a \text{ Co} \sin (\alpha + \beta)} \quad (38)$$

conduisant d'après (17) et (24) au coefficient de portance  $C_z$  :

$$\boxed{C_z = 2 \pi \sin (\alpha - \beta)} \quad (39)$$

montrant que la portance, pour une incidence donnée, est proportionnelle à la cambrure.

Cette relation est à rapprocher de la relation (25) en remarquant que pour la plaque plane  $\beta = 0$ .

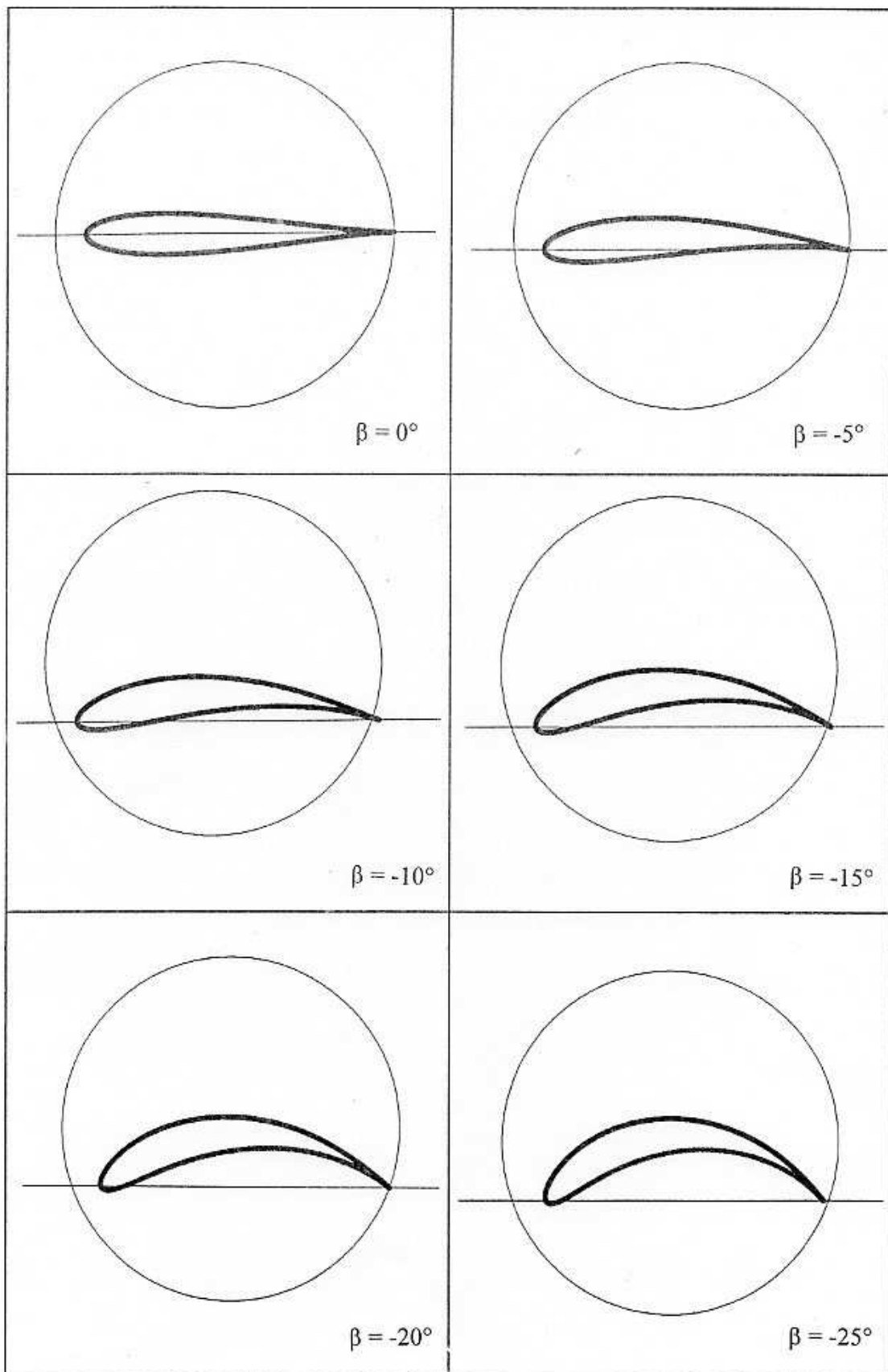
Lorsque l'angle d'incidence est égal à  $\beta$ , la circulation est nulle. Pour la même raison, la portance calculée à partir de la relation de Joukovski (17) :

$$F_z = \rho \text{Co} \Gamma$$

est également nulle.

L'incidence  $\alpha = \beta$  est ainsi qualifiée de direction de portance nulle.

La page suivante donne quelques profils de la série Joukovski de cambrure croissante.



*Série de profils Joukovski pour  $b/a \cos \beta = 0,900$*

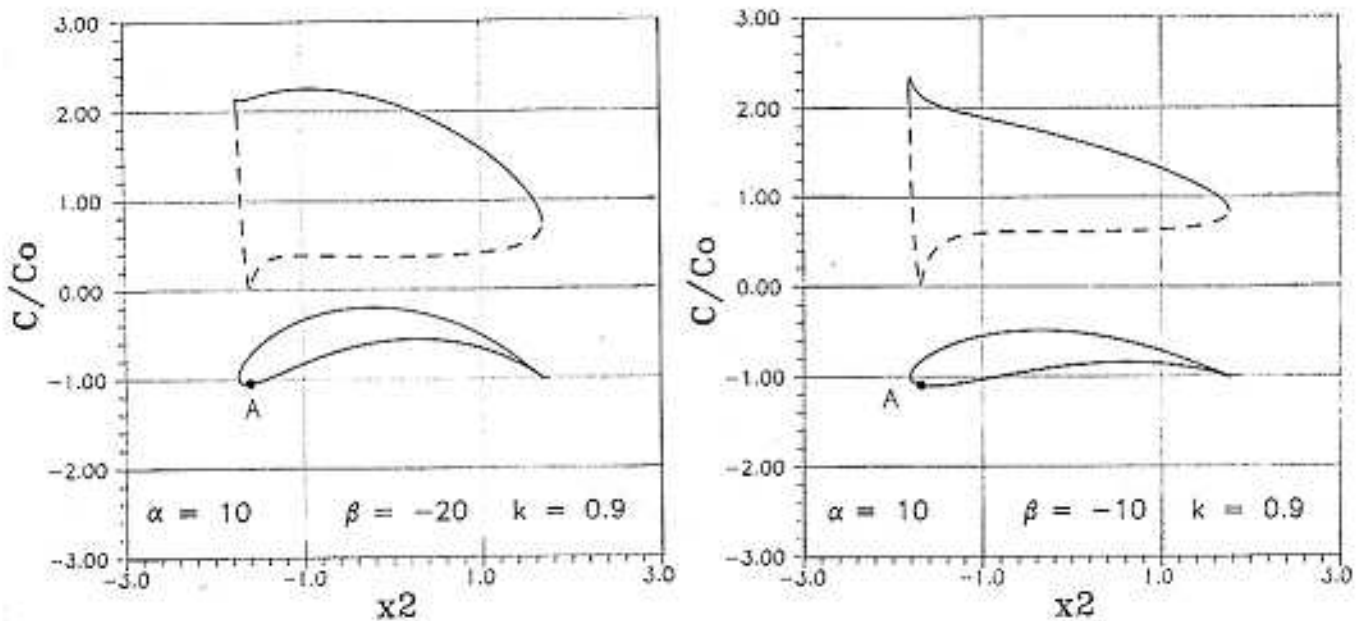
### III - AERODYNAMIQUE DU PROFIL JOUKOVSKI

Grâce aux propriétés de la transformation conforme, le champ de vitesses à la surface du profil Joukovski peut être déduit de l'écoulement autour du cylindre qui est parfaitement défini (voir §I).

Le champ de vitesses est obtenu par un développement assez lourd donné au chapitre G, §IV. Examinons quelques résultats intéressants issus de l'étude paramétrique suivante :

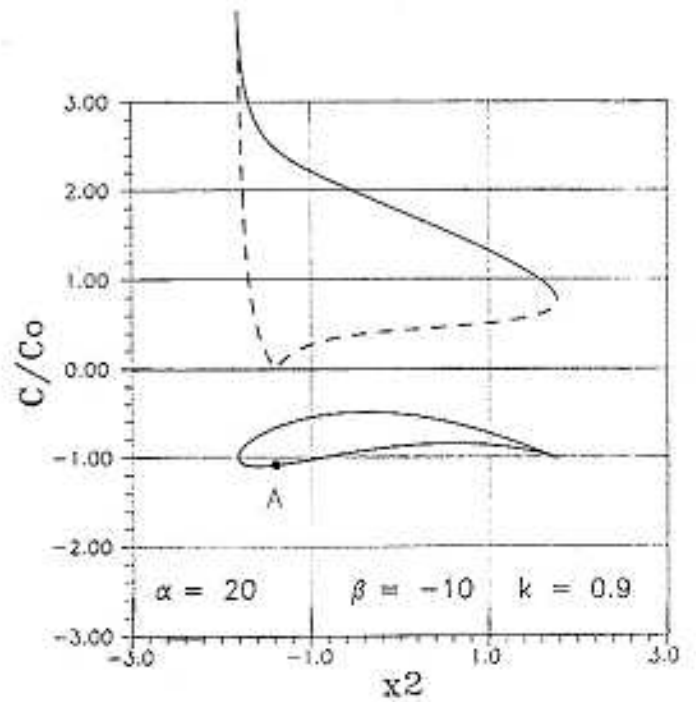
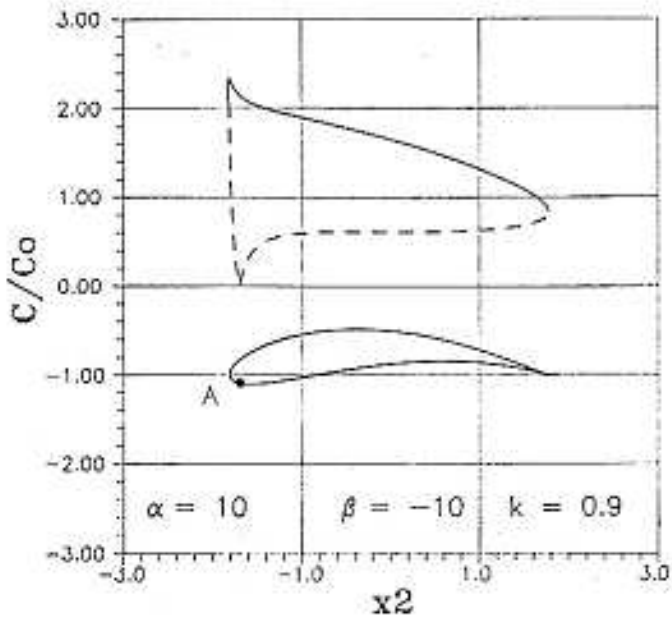
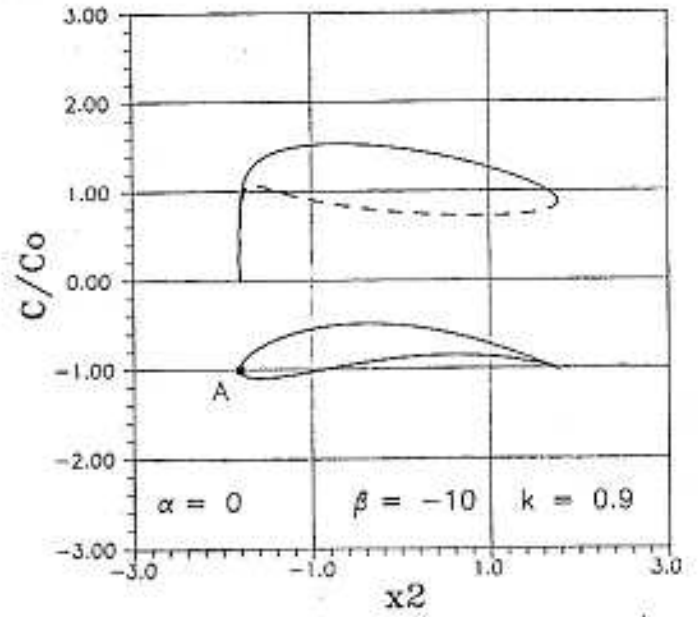
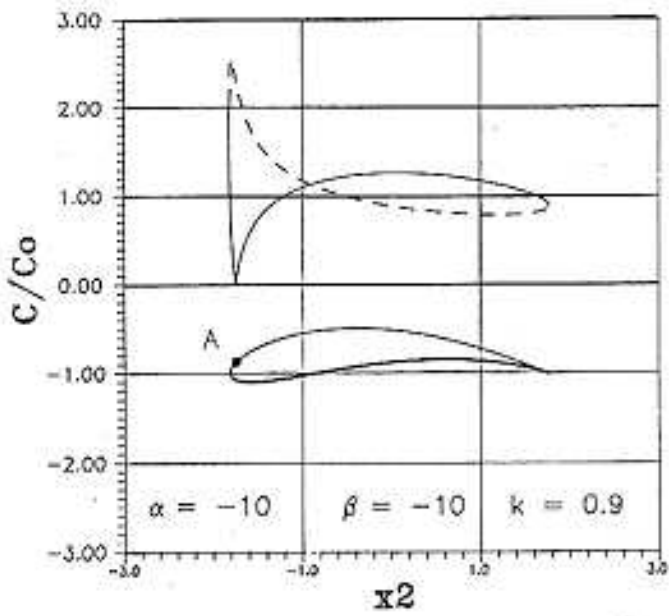
La figure 7a montre l'influence de la cambrure, caractérisée par l'angle  $\beta$ , pour une incidence et une épaisseur relative données :  $\alpha = 10^\circ$  et  $k = \frac{b}{a \cdot \cos \beta} = 0.9$

Le point A correspond au point d'arrêt et le terme  $C/C_0$  donne le rapport de la vitesse locale à la vitesse à l'infini amont. La partie en pointillé représente l'intrados tandis que la partie continue représente l'extrados.

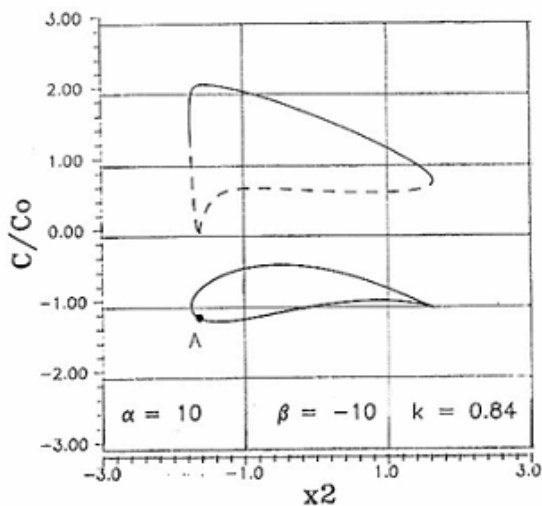
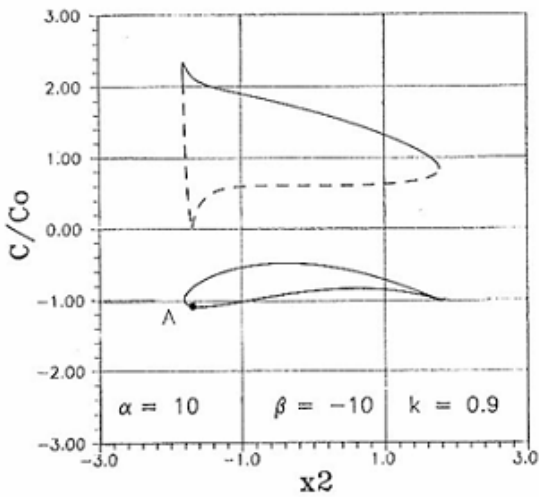
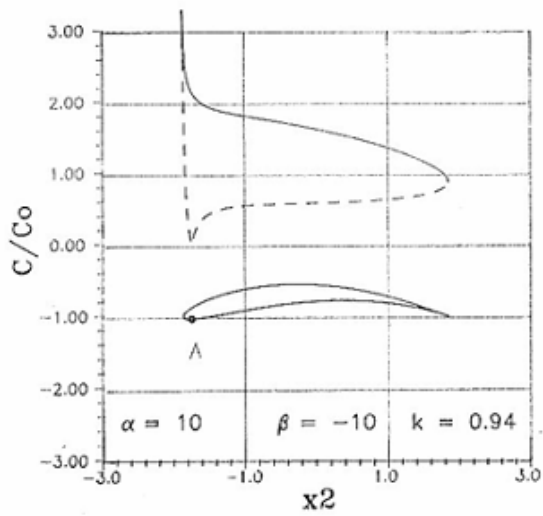


**Figure 7a :** Champ de vitesse en fonction de la cambrure

La figure 7b donne l'influence de l'incidence : depuis la portance nulle ( $\alpha = -10^\circ$ ) jusqu'à l'incidence nominale ( $\alpha = 20^\circ$ ). La portance augmente, le point d'arrêt se déplace de l'extrados à l'intrados. Les fortes incidences font apparaître une importante survitesse au voisinage du bord d'attaque. Ce point sera le siège, suivant la nature du fluide et les conditions d'écoulement, d'une onde de choc ou d'une poche de cavitation.



*Figure 7b : Champ de vitesses en fonction de l'incidence.*



La figure 7c montre l'influence de l'épaisseur relative du profil. En dehors de la présence d'une survitesse vite amortie en présence du profil mince, la portance varie faiblement. Cette remarque est pratiquement généralisable à l'ensemble des profils aérodynamique.

**Figure 7c :** Champ de vitesses en fonction de l'épaisseur relative.

## IV - METHODE DES SINGULARITES

La méthode des singularités est particulièrement intéressante pour analyser, dans le cadre du problème direct, l'écoulement autour d'un profil aérodynamique. Introduite par Martensen en 1959, elle permet de trouver une solution particulière à l'équation de Laplace.

On dispose pour cela, dans le plan d'étude, une succession de singularités : sources, puits, tourbillons, tous centrés en des points convenablement choisis (à la surface des aubages notamment) que l'on superpose à un écoulement uniforme de module et de direction donnés à l'infini amont.

Les singularités joueront un rôle perturbateur de l'écoulement principal, imposant à celui-ci de respecter les conditions aux limites : en particulier condition de glissement selon laquelle, en fluide parfait, la vitesse du fluide est tangente à la surface des aubages.

### 4.1. Superposition d'un écoulement uniforme et d'un ensemble de singularités

On dispose sur l'axe Ox une succession de n sources de débit  $qvi$  centrés en  $ai$  et de m puits de débit  $qvj$  centrés en  $aj$  ( $ai$  et  $aj$  sont des réels). Cette succession de singularités est associée à un écoulement plan infini. En se référant aux relations (A74) et (A84), le potentiel complexe sera défini par :

$$F(z) = C_0 z + \sum_{i=1}^n \frac{qvi}{2\pi} \ln(z - ai) - \sum_{j=1}^m \frac{qvj}{2\pi} \ln(z - aj) \quad (50)$$

soit après développement (annexe R9) :

$$F(z) = C_0(x + iy) + \sum_{i=1}^n \frac{qvi}{2\pi} \left[ \ln \sqrt{(x - ai)^2 + y^2} + i \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x - ai} \right] - \sum_{j=1}^m \frac{qvj}{2\pi} \left[ \ln \sqrt{(x - aj)^2 + y^2} + i \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x - aj} \right] \quad (51)$$

Equation d'où l'on tire la fonction potentiel et la fonction de courant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = C_0 x + \sum_{i=1}^n \frac{qvi}{2\pi} \ln \sqrt{(x - ai)^2 + y^2} - \sum_{j=1}^m \frac{qvj}{2\pi} \ln \sqrt{(x - aj)^2 + y^2} \\ \psi = C_0 y + \sum_{i=1}^n \frac{qvi}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x - ai} - \sum_{j=1}^m \frac{qvj}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x - aj} \end{array} \right.$$

Le profil sera fermé si l'on respecte la condition :

$$\sum_{i=1}^n qv_i = \sum_{j=1}^m qv_j \quad (52)$$

Pour généraliser cette méthode, on adoptera une distribution continue de sources et de puits et l'on remplacera la sommation discrète par une intégrale [réf. 105]. Le débit sera noté  $q(\varepsilon)$  à l'abscisse  $\varepsilon$  comprise entre 0 et L la corde du profil (figures 8 et 9).

On obtiendra ainsi les équations intégrales définissant le potentiel et les lignes de courant :

$$\left| \begin{array}{l} \phi = C_0 x + \int_0^L \frac{q(\varepsilon)}{2\pi} \ln \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2} d\varepsilon \end{array} \right. \quad (53)$$

$$\left| \begin{array}{l} \psi = C_0 y + \int_0^L \frac{q(\varepsilon)}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x-\varepsilon} d\varepsilon \end{array} \right. \quad (54)$$

d'où l'on tire les composantes du champ de vitesse (Annexe R11) :

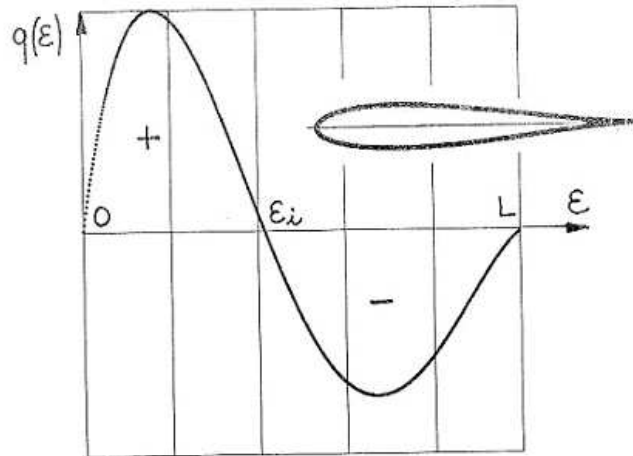
$$\left| \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = C_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{(x-\varepsilon)q(\varepsilon)}{(x-\varepsilon)^2 + y^2} d\varepsilon \end{array} \right. \quad (55)$$

$$\left| \begin{array}{l} v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{y}{2\pi} \int_0^L \frac{q(\varepsilon)}{(x-\varepsilon)^2 + y^2} d\varepsilon \end{array} \right. \quad (56)$$

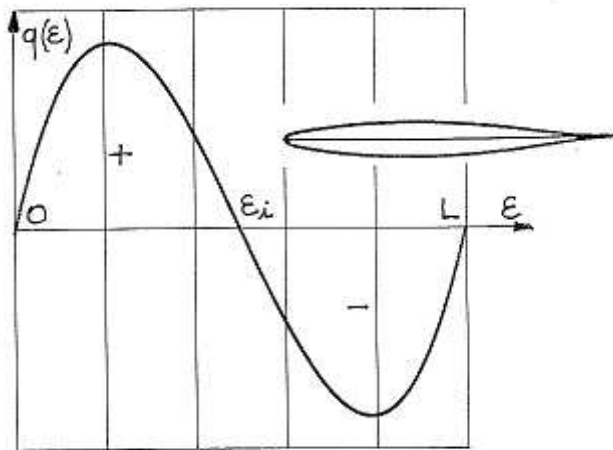
La relation (52) s'écrira maintenant :

$$\int_0^L q(\varepsilon) \cdot d\varepsilon = 0 \quad (57)$$

Elle indique que le débit total des sources est égal au débit total des puits. La forme du profil issue de  $\psi = 0$  sera obtenue par la forme de la fonction  $q(\varepsilon)$ . La position de l'épaisseur maximale est donnée directement par la valeur de  $\varepsilon_i$ .



**Figure 8 :** *Distribution de débit des singularités - épaisseur maximale vers l'avant*



**Figure 9 :** *Distribution de débit des singularités épaisseur maximale au centre*

Lorsque la fonction  $q(\varepsilon)$  est fixée, on obtient successivement :

- la forme du profil par l'équation  $\Psi = 0$
- le champ de vitesses grâce aux équations (55) et (56).

Dans le cas du problème direct où le profil est défini par son équation  $y = h(x)$ , il convient de retoucher successivement  $q(\varepsilon)$  jusqu'à satisfaction. Cette démarche fait évidemment appel aux méthodes numériques.

## 4.2. Superposition d'un écoulement uniforme et d'une succession de doublets

Cette méthode est comparable à la précédente et permet d'obtenir des profils du même type. On dispose sur l'axe Ox une succession de n doublets d'intensité  $Co m_i^2$  centrés à l'abscisse  $ai$  que l'on associe à un écoulement uniforme. Les relations (A74) et (A112) permettent d'écrire le potentiel complexe :

$$F(z) = Co z + \sum_{i=1}^n \frac{Co m_i^2}{z - ai}$$

En remplaçant  $z$  par  $(x + iy)$  et en groupant les termes réels et imaginaires, on aura :

$$F(z) = Co (x + iy) + \sum_{i=1}^n \frac{Co m_i^2 [(x - ai) - iy]}{(x - ai)^2 + y^2} \quad (58)$$

d'où l'on déduit la fonction potentiel et la fonction de courant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = Co x + \sum_{i=1}^n \frac{Co m_i^2 (x - ai)}{(x - ai)^2 + y^2} \\ \psi = Co y - \sum_{i=1}^n \frac{Co m_i^2 y}{(x - ai)^2 + y^2} \end{array} \right. \quad (59)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = Co x + \sum_{i=1}^n \frac{Co m_i^2 (x - ai)}{(x - ai)^2 + y^2} \\ \psi = Co y - \sum_{i=1}^n \frac{Co m_i^2 y}{(x - ai)^2 + y^2} \end{array} \right. \quad (60)$$

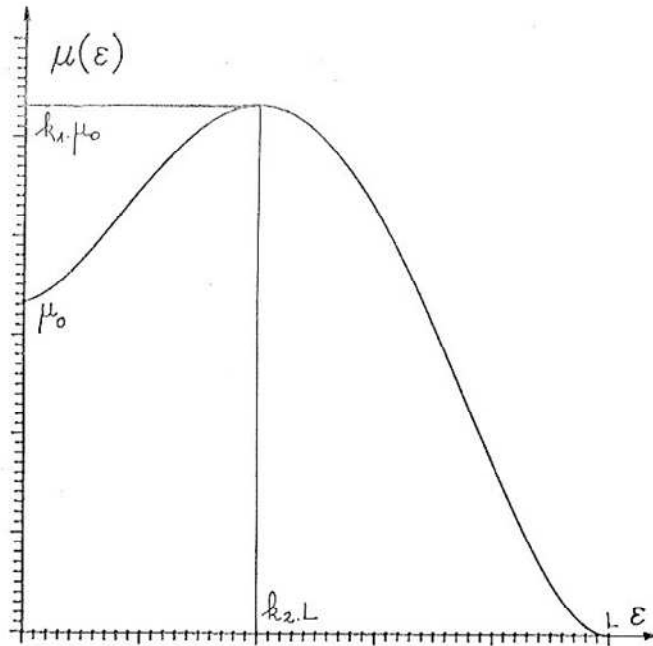
En adoptant comme précédemment une distribution continue d'intensité  $Co \cdot \mu(\epsilon)$  à l'abscisse  $\epsilon$  comprise entre 0 et L, la fonction de courant sera définie par l'équation intégrale suivante :

$$\psi = Co y - \int_0^L \frac{Co \mu(\epsilon) y}{(x - \epsilon)^2 + y^2} d\epsilon \quad (61)$$

L'équation du profil (loi d'épaisseur) sera définie par  $\Psi = 0$  et représentée par l'équation  $y = h(x)$  :

$$\int_0^L \frac{\mu(\epsilon) d\epsilon}{(x - \epsilon)^2 + h^2(x)} = 1 \quad (62)$$

A chaque distribution  $\mu(\epsilon)$  correspondra une forme de profil dont l'équation  $y = h(x)$  sera déduite de l'équation intégrale implicite (62).



**Figure 10 :** Distribution de l'intensité des singularités

La fonction du quatrième degré représentée sur la figure 10 permet, grâce aux paramètres  $\mu_0$ ,  $k_1$  et  $k_2$ , de modifier dans de bonnes conditions la forme du profil. Celle-ci est établie grâce à un maillage automatique en  $(x, y)$  pour lequel on calcule en chaque point la valeur de  $\psi$  (relation 61). La liste des points  $(x, y)$  pour lesquels  $\psi = 0 \pm \Delta\psi$  (avec  $\Delta\psi$  aussi faible que possible) constitue le profil recherché.

Le champ des vitesses est donné par le système d'équations :

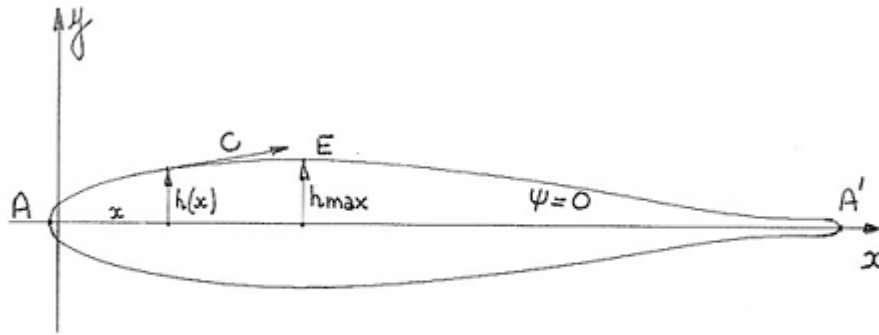
$$\left| \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = C_0 - C_0 \int_0^L \frac{(x - \varepsilon)^2 - y^2}{[(x - \varepsilon)^2 + y^2]^2} \mu(\varepsilon) d\varepsilon \end{array} \right. \quad (63)$$

$$\left| \begin{array}{l} v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -C_0 \int_0^L \frac{2y(x - \varepsilon)}{[(x - \varepsilon)^2 + y^2]^2} \mu(\varepsilon) d\varepsilon \end{array} \right. \quad (64)$$

### **Conditions aux limites**

En tout point du profil, correspondant à la ligne de courant  $\Psi = 0$ , la vitesse locale est tangente à la courbe  $y = h(x)$  ; propriété se traduisant par la relation (65) illustrée sur la figure 11.

$$\frac{dh}{dx} = h'(x) = \frac{v(x, h(x))}{u(x, h(x))} \quad (65)$$



**Figure 11 :** Disposition des points d'arrêt et de l'épaisseur maximale autour d'un profil symétrique  
 ( $\mu_0 = 100 L - K_1 = 3,4 - K_2 = 0,2 - L = 0,1 m$ )

Les points d'arrêt sont définis par les relations :

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

D'après les équations (63) et (64), A et A' sont obtenus pour  $y = 0$ , leur abscisse est calculable par la relation (62) :

$$\int_0^L \frac{\mu(\varepsilon)}{(x - \varepsilon)^2} d\varepsilon = 1$$

Dans le cas où la distribution  $\mu(\varepsilon)$  ne présente pas de point à tangente horizontale pour  $\varepsilon = L$ , le point A' n'est pas un point d'arrêt mais un point à vitesse finie dont la valeur dépend de l'angle solide formant le bord de fuite.

L'épaisseur maximale de profil est un point à tangente horizontale pour lequel la composante  $v$  s'annule (point E de la figure 11). Pour fixer les ordres de grandeur, la figure 12 donne l'évolution des composantes de la vitesse C.

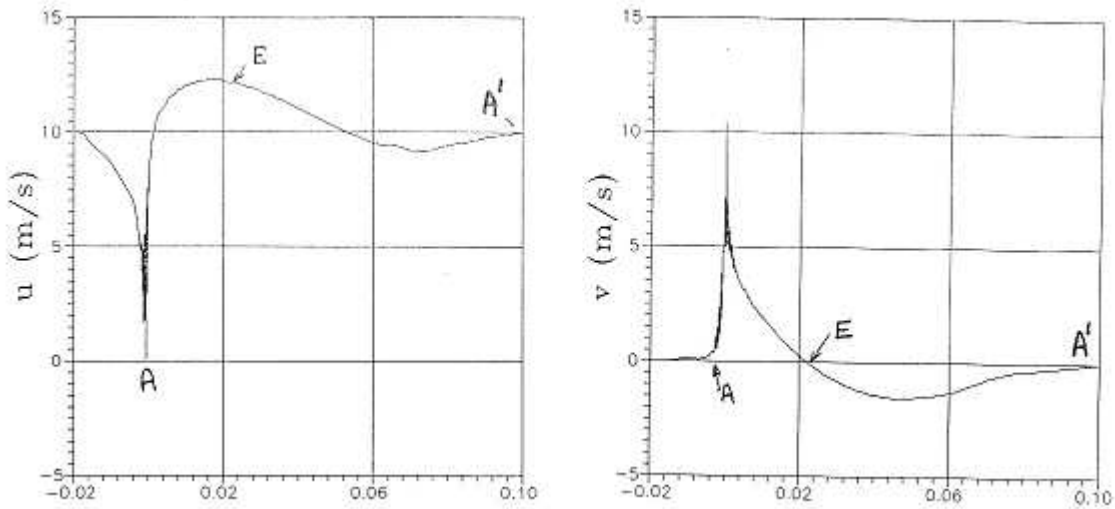


Figure 12 : Evolution des composantes de la vitesse C

### 4.3. Création de la portance

On peut créer une cambrure en disposant les doublets sur une courbe de forme quelconque  $y = f(x)$  définissant la ligne moyenne du profil (figure 13). On peut également diriger l'écoulement plan uniforme suivant une certaine incidence  $\alpha$  en utilisant l'opérateur  $\exp(-i\alpha)$ .

Pour créer la portance, il faut cependant ajouter à ces potentiels celui correspondant à une nappe tourbillonnaire  $\gamma(\epsilon)$  centrée sur la ligne moyenne. On obtiendra ainsi le potentiel complexe :

$$F(z) = C_0 z \exp(-i\alpha) + \int_0^L \frac{C_0 \mu(\epsilon)}{z - z_s} d\epsilon + \frac{i}{2\pi} \int_0^L \gamma(\epsilon) \ln(z - z_s) d\epsilon \quad (66)$$

avec  $z_s = \epsilon + i f(\epsilon)$  affixe de la ligne moyenne. D'où l'on peut déduire la fonction potentiel et la fonction de courant de l'écoulement :

$$\begin{aligned} \phi = C_0 (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + C_0 \int_0^L \frac{\mu(\epsilon) (x - \epsilon)}{(x - \epsilon)^2 + (y - f(\epsilon))^2} d\epsilon \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^L \arctg \left( \frac{y - f(\epsilon)}{x - \epsilon} \right) \gamma(\epsilon) d\epsilon \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \psi = & Co (-x \sin \alpha + y \cos \alpha) - Co \int_0^L \frac{\mu(\varepsilon) (y - f(\varepsilon))}{(x - \varepsilon)^2 + (y - f(\varepsilon))^2} d\varepsilon \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^L \ln \left( (x - \varepsilon)^2 + (y - f(\varepsilon))^2 \right)^{1/2} \gamma(\varepsilon) d\varepsilon \end{aligned} \quad (68)$$

Fonctions permettant d'accéder au champ de vitesses :

$$\begin{aligned} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = & Co \cos \alpha - Co \int_0^L \frac{(x - \varepsilon)^2 - (y - f(\varepsilon))^2}{\left[ (x - \varepsilon)^2 + (y - f(\varepsilon))^2 \right]^2} \mu(\varepsilon) d\varepsilon \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{(y - f(\varepsilon))}{(x - \varepsilon)^2 + (y - f(\varepsilon))^2} \gamma(\varepsilon) d\varepsilon \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = & Co \sin \alpha - Co \int_0^L \frac{2(x - \varepsilon)(y - f(\varepsilon))}{\left[ (x - \varepsilon)^2 + (y - f(\varepsilon))^2 \right]^2} \mu(\varepsilon) d\varepsilon \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{(x - \varepsilon)}{(x - \varepsilon)^2 + (y - f(\varepsilon))^2} \gamma(\varepsilon) d\varepsilon \end{aligned} \quad (70)$$

**Mode opératoire :**

**Etape 1 :**

On traite d'abord le problème avec  $\gamma(\varepsilon) = 0$ , on obtient ainsi la forme du profil par retouches successives de  $\mu(\varepsilon)$ .

Cette forme est donnée par  $y = h(x)$  dans l'équation  $\psi = 0$ , s'écrivant d'après (68) :

$$h(x) \cos \alpha - x \sin \alpha = \int_0^L \frac{h(x) - f(\varepsilon)}{(x - \varepsilon)^2 + (h(x) - f(\varepsilon))^2} \mu(\varepsilon) d\varepsilon$$

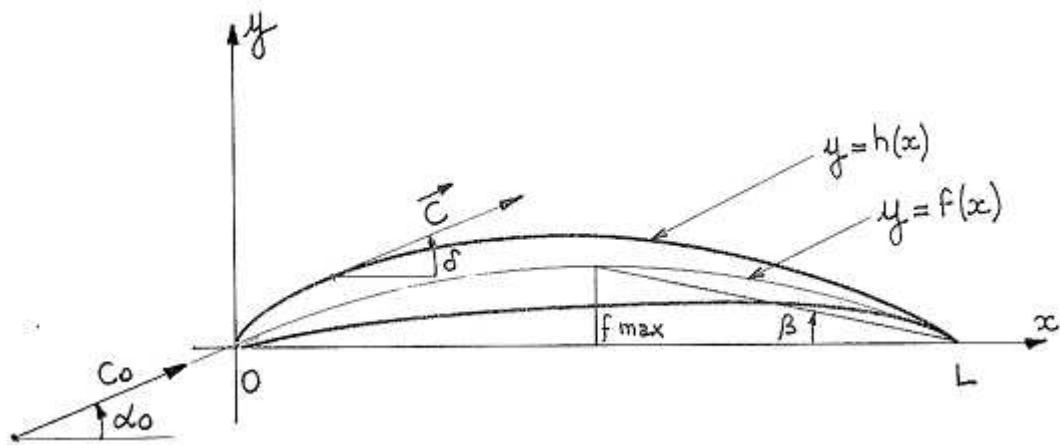
La résolution s'effectuera sur la base d'un maillage automatique en  $(x, y)$  sur lequel on calculera en chaque point la fonction  $\psi$ . L'ensemble des points pour lesquels  $\psi = 0 \pm \Delta\psi$  (avec  $\Delta\psi$  aussi faible que possible) constitue le profil recherché.

A chaque fonction  $\mu(\varepsilon)$  correspond une forme de profil (figure 10).

**Etape 2 :**

On recherche la fonction  $\gamma(\varepsilon)$  permettant de satisfaire, en chaque point du profil  $y = h(x)$ , la condition du glissement illustrée sur la figure 13 :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{v(x, h(x))}{u(x, h(x))} = \text{tg } \delta \quad (71)$$



*Figure 13 : Définition du profil- Condition de glissement*

La condition de Kutta au bord de fuite impose l'égalité des vitesses intrados et extrados.

Elle se traduit par la relation complémentaire :

$$\gamma(L) = 0 \quad (72)$$

L'incidence d'adaptation  $\alpha_0$  est définie comme celle réalisant au bord d'attaque la tangence de la vitesse  $C_0$  à la ligne moyenne en ce point :

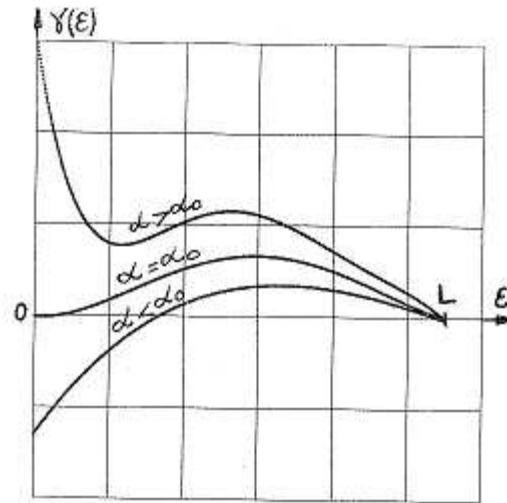
$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} = \text{tg } \alpha_0 \quad (73)$$

Dans ce cas particulier, on observe également :

$$\gamma(0) = 0 \quad (74)$$

Quel que soit le profil étudié, les formes de  $\gamma(\varepsilon)$  sont données sur la figure 14. Les trois cas principaux sont présentés :

- incidence d'adaptation  $\alpha = \alpha_0$
- forte incidence  $\alpha > \alpha_0$
- faible incidence  $\alpha < \alpha_0$



**Figure 14 :** Distribution de la couche tourbillonnaire en fonction de l'incidence  $\alpha$

L'intégrale de cette distribution donne la circulation globale  $\Gamma$  et fixe, grâce à l'équation de Joukowski, la portance  $F_z$  (relation 17) :

$$\left| \begin{array}{l} \Gamma = \int_0^L \gamma(\epsilon) \cdot d\epsilon \\ F_z = \rho C_0 \Gamma \end{array} \right.$$

Les distributions présentées montrent une portance augmentant avec l'angle  $\alpha$  ainsi qu'un cas particulier ( $\alpha = \beta$ ) correspondant à une intégrale nulle. C'est la direction de portance nulle définie sur la figure 13 par :

$$\text{tg } \beta = \frac{2 f_{\max}}{L} \quad (73)$$

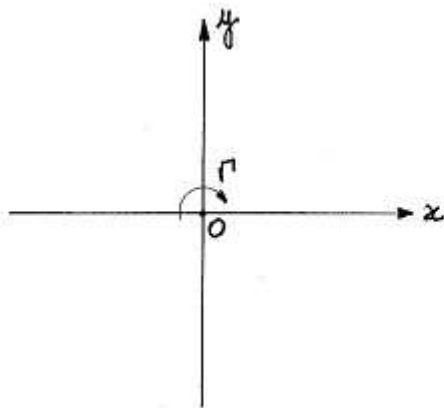
Pour satisfaire simultanément la condition de glissement sur l'intrados et sur l'extrados, il est plus intéressant et plus précis de distribuer la nappe tourbillonnaire à la surface du profil plutôt que sur la ligne moyenne. Cette méthode en apparence plus complexe permet de traiter dans d'excellentes conditions le problème direct où la forme du profil est une donnée. Nous présentons cette méthode en détail dans le paragraphe suivant.

## V - TRAITEMENT DU PROBLEME DIRECT

L'objectif de ce paragraphe est de définir la démarche permettant d'accéder au champ de vitesses à la surface d'un profil donné.

Comme précédemment, on fera appel à la méthode des singularités et à la superposition des écoulements décrits au chapitre A que nous reprenons ici en détail.

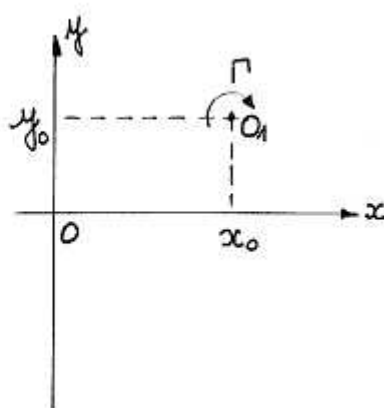
Si l'on dispose au centre du repère un tourbillon d'intensité  $\Gamma$  (figure 15), le potentiel complexe  $F(z)$  et la vitesse complexe conjuguée  $C'$  sont accessibles par les relations classiques établies au chapitre A.



**Figure 15 :** Vortex centré en  $O$

$$F(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$$C' = \frac{dF}{dz} = u - iv = \frac{i\Gamma}{2\pi z}$$



**Figure 16 :** Vortex centré en  $O_1$

$$F(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln (z - z_{O_1})$$

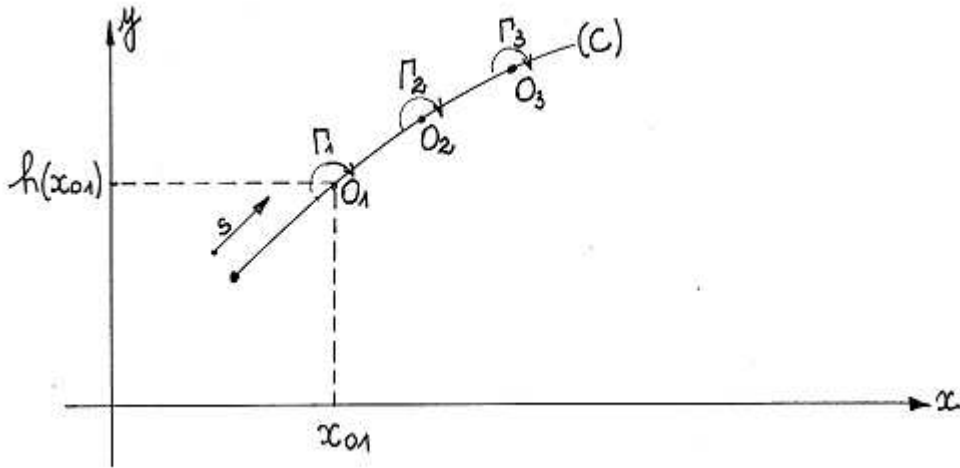
$$C' = \frac{dF}{dz} = u - iv = \frac{i\Gamma}{2\pi [(x - x_0) + i(y - y_0)]}$$

Lorsque le tourbillon est décentré en  $O_1$  (figure 16), les relations correspondantes sont également connues.

En écoulement plan, on peut créer une nappe tourbillonnaire en distribuant de manière discrète une succession de tourbillons sur une courbe quelconque (C).

Ces tourbillons d'intensité différente a priori, sont ici en nombre fini (figure 17) et sont centrés aux points  $O_1, O_2, O_3$ , d'affixes  $z_{O_1}, z_{O_2}, z_{O_3}$ .

La courbe (C) est supposée connue par son équation  $y = h(x)$ .



**Figure 17 : Création d'une nappe tourbillonnaire**

Pour les trois tourbillons ci-dessus, le potentiel complexe est obtenu par superposition

$$F(z) = \frac{i\Gamma_1}{2\pi} \ln(z - z_{O_1}) + \frac{i\Gamma_2}{2\pi} \ln(z - z_{O_2}) + \frac{i\Gamma_3}{2\pi} \ln(z - z_{O_3})$$

pouvant s'écrire sous la forme de la somme algébrique compacte :

$$F(z) = \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \Gamma_k \ln(z - z_{O_k}) \quad (74)$$

Si l'on dispose sur la courbe (C), une distribution continue le long de l'abscisse curviligne  $s$ , le potentiel complexe sera obtenu par extension de la relation (74) :

$$F(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{(C)} \gamma(s) \cdot \ln(z - z_s) \cdot ds \quad (75)$$

Relation permettant de calculer le potentiel en un point du plan lorsque la distribution  $\gamma(s)$  est définie.

On accède à la vitesse complexe conjuguée  $C'$  par les relations classiques :

$$C' = u - iv = \frac{dF}{dz} = \frac{i}{2\pi} \int_{(C)} \frac{\gamma(s) \cdot ds}{(z - z_s)} \quad (76)$$

En notant que les affixes  $z$  et  $z_s$  s'écrivent respectivement :

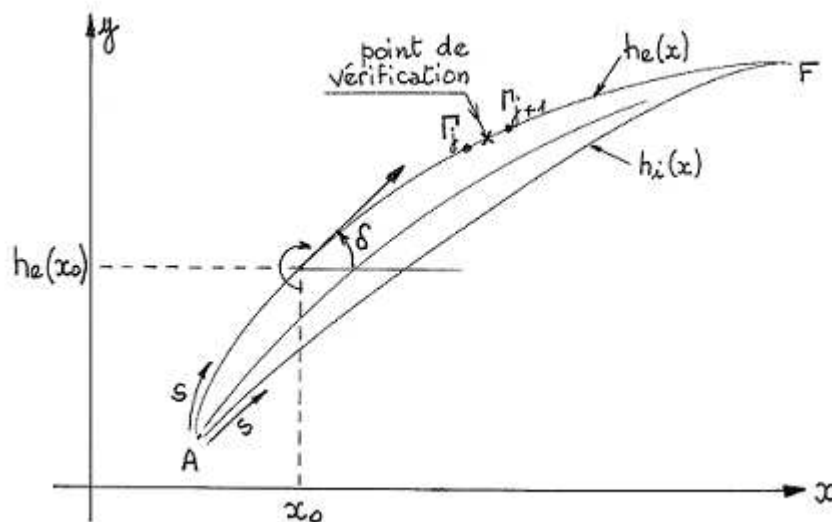
$$\begin{cases} z = x + iy \\ z_s = x_0 + i \cdot h(x_0) \end{cases}$$

la relation (76) devient :

$$C' = u - iv = \frac{i}{2\pi} \int_{(C)} \frac{\gamma(s) \cdot ds}{(x - x_0) + i(y - h(x_0))} \quad (77)$$

Si la courbe (C) représente un profil aérodynamique, la distribution de vorticité  $\gamma(s)$  permettra de définir le champ de vitesses à la surface du profil.

La forme du profil est alors définie par deux équations  $h_e(x)$  et  $h_i(x)$  correspondant respectivement à l'extrados et l'intrados (figure 18).



**Figure 18 :** Distribution de vorticité à la surface du profil

### Champ de vitesses :

Le champ de vitesses autour du profil peut être modélisé par la superposition de l'ensemble des singularités et d'un écoulement plan uniforme de direction  $\alpha$  et de module  $C_0$  à l'infini amont. La vitesse  $\vec{c}$  en tout point du plan sera définie par le système suivant :

$$\bar{C} = \begin{cases} u = C_0 \cos \alpha + \operatorname{Re}(C') \pm k \frac{\gamma(s)}{2} \cos \delta \\ v = C_0 \sin \alpha - \operatorname{Im}(C') \pm k \frac{\gamma(s)}{2} \sin \delta \end{cases} \quad (78)$$

dans lequel  $\operatorname{Re}(C')$  et  $\operatorname{Im}(C')$  représentent respectivement les parties réelle et imaginaire de l'équation (77) définissant la vitesse  $C'$  engendrée par l'ensemble des nappes tourbillonnaires attachées à la surface du profil. Le dernier terme représente l'influence du vortex sur lui-même ; à savoir, la limite de la relation (76) lorsque  $z$  tend vers  $z_s$ .

Le coefficient  $k$  est égal à 1 à la surface du profil et nul en tout autre point, le signe  $+$  correspond à l'extrados et le signe  $-$  à l'intrados.

### Condition de glissement :

Comme au chapitre précédent, la distribution de vorticité  $\gamma(s)$  doit répondre aux conditions aux limites traduisant le glissement du fluide à la surface du profil d'équation  $y = h(x)$  :

$$\frac{dh}{dx} = \operatorname{tg} \delta = \frac{v(x, h(x))}{u(x, h(x))} \quad (79)$$

Cette relation (79) permet en principe de définir la fonction  $\gamma(s)$  associée à l'équation du profil  $y = h(x)$ . Cependant, en dehors de quelques cas particuliers très simples comme celui de la plaque plane, les équations (78) définissant la vitesse  $\bar{C}$  ne sont pas intégrables.

Dans le cas général, on remplace la distribution continue de tourbillon  $\gamma(s)$  par une distribution discrétisée de  $n$  tourbillons d'intensité  $\Gamma_j$  constituant les  $n$  inconnues. Le champ de vitesses en un point  $(x, y)$  du plan sera donné par l'équation (80) :

$$\bar{C} = \begin{cases} u = C_0 \cos \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma_j (y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \pm k \frac{\Gamma_m}{2\Delta s} \cos \delta \\ v = C_0 \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma_j (x - x_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \pm k \frac{\Gamma_m}{2\Delta s} \sin \delta \end{cases} \quad (80)$$

avec  $\Delta s$  abscisse curviligne :  $\Delta s = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$

$\Gamma_m$  valeur moyenne du tourbillon au milieu du segment  $\Delta s$  :

$$\Gamma_m = \frac{\Gamma_j + \Gamma_{j+1}}{2}$$

On écrit la condition de glissement (79) en  $(n-1)$  points du profil (figure 19), système auquel on ajoutera la condition de Kutta se traduisant par l'identité des modules des vitesses extrados et intrados au bord de fuite.

On démontre que cet ensemble de  $n$  équations à  $n$  inconnues constitue un système linéaire de la forme :

$$A_{ij} \Gamma_j = B_i \quad (81)$$

o Position des tourbillons  
\* points de controle

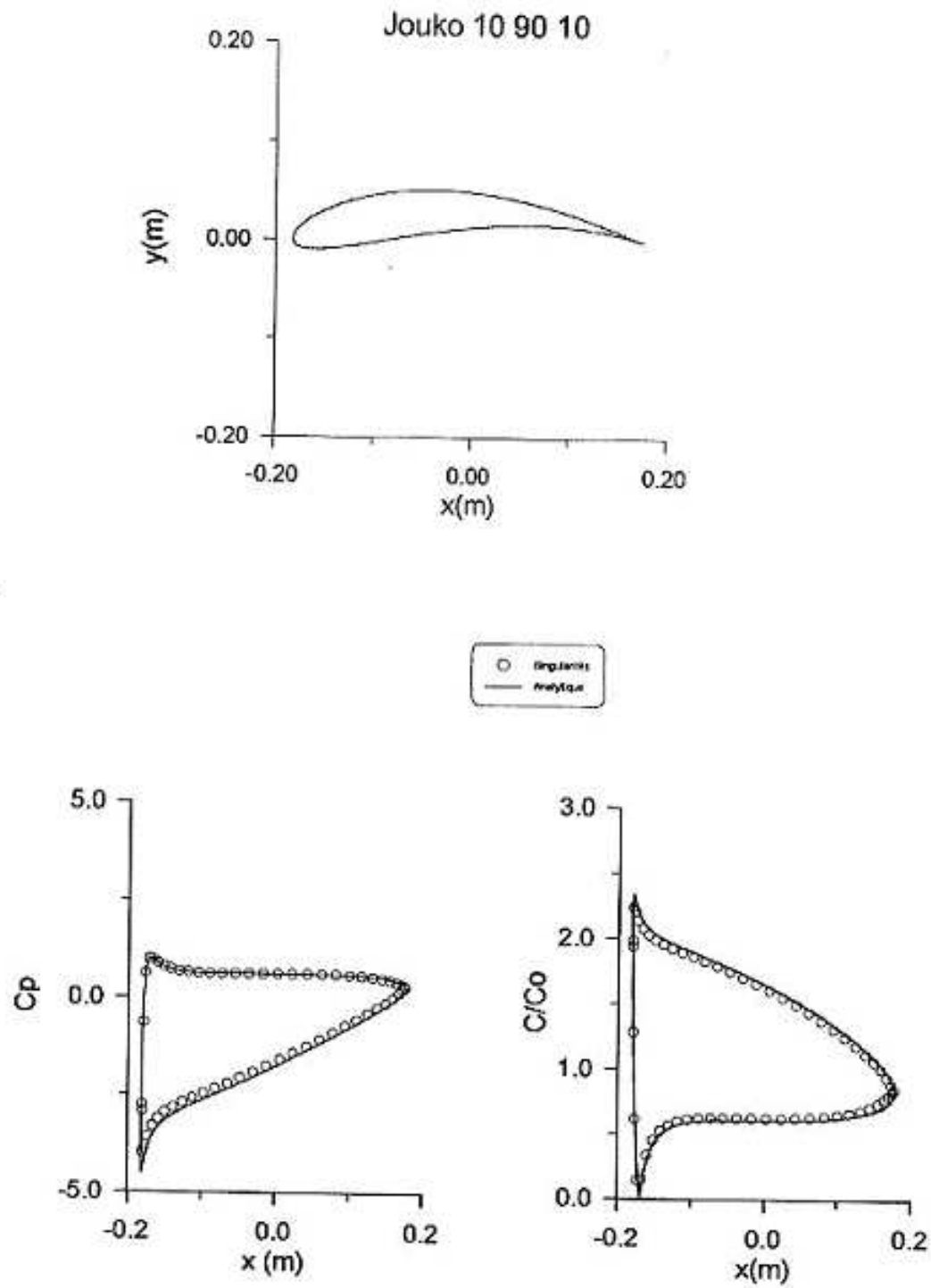


**Figure 19** : Distribution des tourbillons et des points de vérification.

Suivant la forme du profil traité, il est nécessaire, pour atteindre une précision satisfaisante, de disposer 100 à 400 tourbillons.

Le chapitre E, consacré aux grilles d'aubes planes, montre comment l'influence des singularités portées par l'ensemble des profils de la grille est pris en compte dans les équations du champ de vitesses [ réf.228].

A titre d'exemple, la figure 20 donne une comparaison des résultats obtenus par la méthode des singularités (200 points) et des résultats théoriques définis par la transformation conforme (on trouvera le développement de ce calcul au chapitre final).



**Figure 20 :** Profil Joukovski ( $\beta = -10^\circ$ ,  $k=0,9$  et  $\alpha = 10^\circ$ )

## VI - COMPORTEMENT ET OPTIMISATION EN FLUIDE REEL

L'écoulement autour d'un profil aérodynamique, que nous venons de présenter dans les chapitres précédents, est un écoulement irrotationnel.

L'écoulement en fluide réel diffère essentiellement de l'écoulement potentiel par la présence de la couche limite se développant à la surface des profils. Son influence intervient à deux niveaux :

- La couche limite influence indirectement la portance  $F_z$  en réduisant la cambrure du profil par « engraissement » de celui-ci.

- En contradiction avec le théorème de Joukovski, elle génère, suivant la direction de la vitesse incidente, un effort résistant constituant la traînée  $F_x$ .

### 6.1. Efforts aérodynamiques

La figure 21 illustre les efforts en présence :

-  $F_z$  représente la portance en écoulement potentiel. Elle est la résultante des efforts de pression à la surface du profil qui est calculable d'après la relation de Bernoulli et la connaissance du champ de vitesses :

La pression locale est donné par :

$$p + \rho \frac{C^2}{2} = p^\infty + \rho \frac{C_0^2}{2} \quad (90)$$

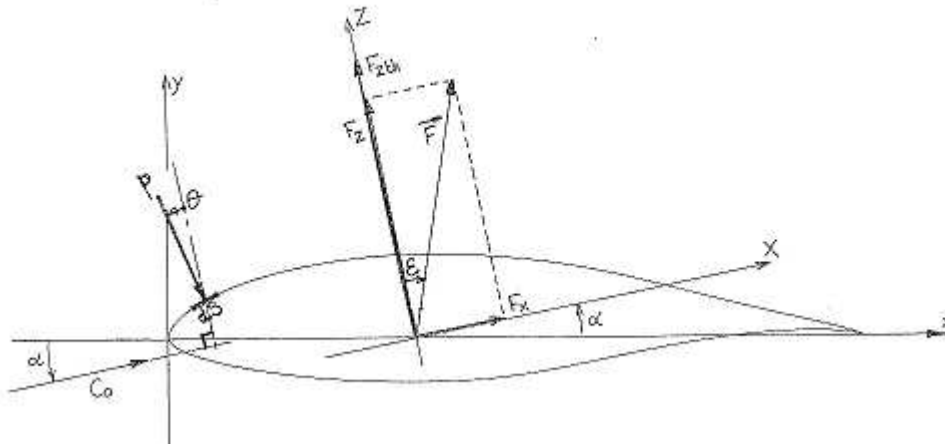
où le second membre représente la pression totale à l'infini amont et  $p^\infty$  la pression ambiante.

En référence aux essais en soufflerie, certains profils instrumentés permettent, par l'intermédiaire de différents orifices reliés à des manomètres différentiels, de définir la distribution expérimentale de pression à la surface du profil. On traite ces résultats sous forme adimensionnelle en introduisant le coefficient de pression  $C_p$  :

$$C_p = \frac{p - p^\infty}{\rho \frac{C_0^2}{2}} \quad (91)$$

qui d'après Bernoulli peut s'exprimer en fonction du rapport de vitesses :

$$C_p = 1 - \left( \frac{C}{C_0} \right)^2 \quad (92)$$



**Figure 21 : Efforts caractéristiques sur le profil aérodynamique**

Les deux efforts caractéristiques sont calculables par intégration, à la surface du profil, des efforts élémentaires suivant  $\vec{OZ}$  et  $\vec{OX}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} dF_z = -p b ds \cos \theta \\ dF_x = p b ds \sin \theta \end{array} \right. \quad (93)$$

où b est l'envergure du profil étudié.

En écoulement potentiel, le coefficient  $C/C_0$  est accessible et l'on obtient la portance  $F_{zth}$  pour une traînée  $F_{xth}$  nulle. En fluide réel, la distribution de pression est également calculable mais il faut procéder suivant les étapes du modèle ci-dessous :

**Etape 1 :** On étudie l'écoulement potentiel à la surface du profil proposé.

**Etape 2 :** On en déduit, sur la base des développements présentés au chapitre B, les différentes caractéristiques de la couche limite. Les différentes épaisseurs ( $\delta_1, \delta_2, \dots$ ), le coefficient de frottement  $C_f$ , [réf. 229].

**Etape 3 :** On reprend l'étude potentielle non plus à la surface du profil mais à la surface de déplacement  $\delta_1$  de la couche limite.

Celle-ci constitue, comme nous le verrons plus loin en figure 24, un nouveau profil pour lequel les champs de vitesse et de pression sont calculables ainsi que les efforts aérodynamiques puisque la pression statique, d'après le modèle de Prandtl, est transmise sans altération au travers de la couche limite jusqu'à la paroi matérielle du profil d'origine. Les résultats présentent, par rapport à l'étape 1, quelques différences :

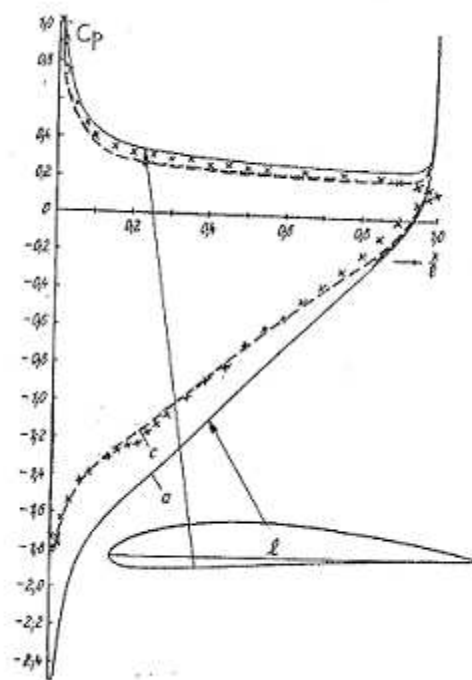
- L'intégrale des portances élémentaires est plus faible.

- L'intégrale des efforts de pression suivant  $\vec{OX}$  n'est plus nulle et donne lieu à la traînée dite de pression  $dF_{x1}$  (relation 93).

- A cette traînée s'ajoute la traînée de frottement  $dF_{x2}$  obtenue par sommation des différents efforts élémentaires de frottement :

$$dF_{x2} = C_f \rho \frac{C^2}{2} b ds \cos\theta \quad (94)$$

Les résultats de la figure 22 montrent la qualité de l'approche proposée, permettant de prendre en compte la couche limite. Les résultats présentés concernent un profil NACA de type 4412 pour des conditions d'incidence de l'ordre de  $8^\circ$  ( $C_z = 1,02$ ).



**Figure 22 :** Comparaison théorique et expérimentale (xxx)  
pour un profil NACA 4412 - [réf.111].

*a* - Ecoulement potentiel sur le profil.

*c* - Ecoulement potentiel avec prise en compte de la couche limite.

Lorsque l'incidence  $\alpha$  augmente, la traînée de frottement varie assez peu; par contre, la traînée de pression augmente rapidement lorsque survient le décollement de la couche limite à l'extrados du profil et la formation d'un bulle de décollement à pression constante (figure 23). Dans ces zones instables, la modélisation est délicate et peu fiable.



**Figure 23 :** Décollement à l'extrados du profil. [Réf 230].

Pour comparer sans difficulté les performances entre elles, quelle que soit l'échelle du profil, on introduit les coefficients adimensionnels de portance  $C_z$  et de traînée  $C_x$  :

$$C_z = \frac{F_z}{\rho \frac{C_0^2}{2} l b} \quad (95)$$

$$C_x = \frac{F_x}{\rho \frac{C_0^2}{2} l b} \quad (96)$$

Relations dans lesquelles  $l$  représente la corde,  $b$  l'envergure du profil et le produit  $l b$  la surface portante. Pour caractériser de façon globale les conditions d'écoulement, on introduit le nombre de Reynolds ramené à la corde ainsi que le nombre de Mach :

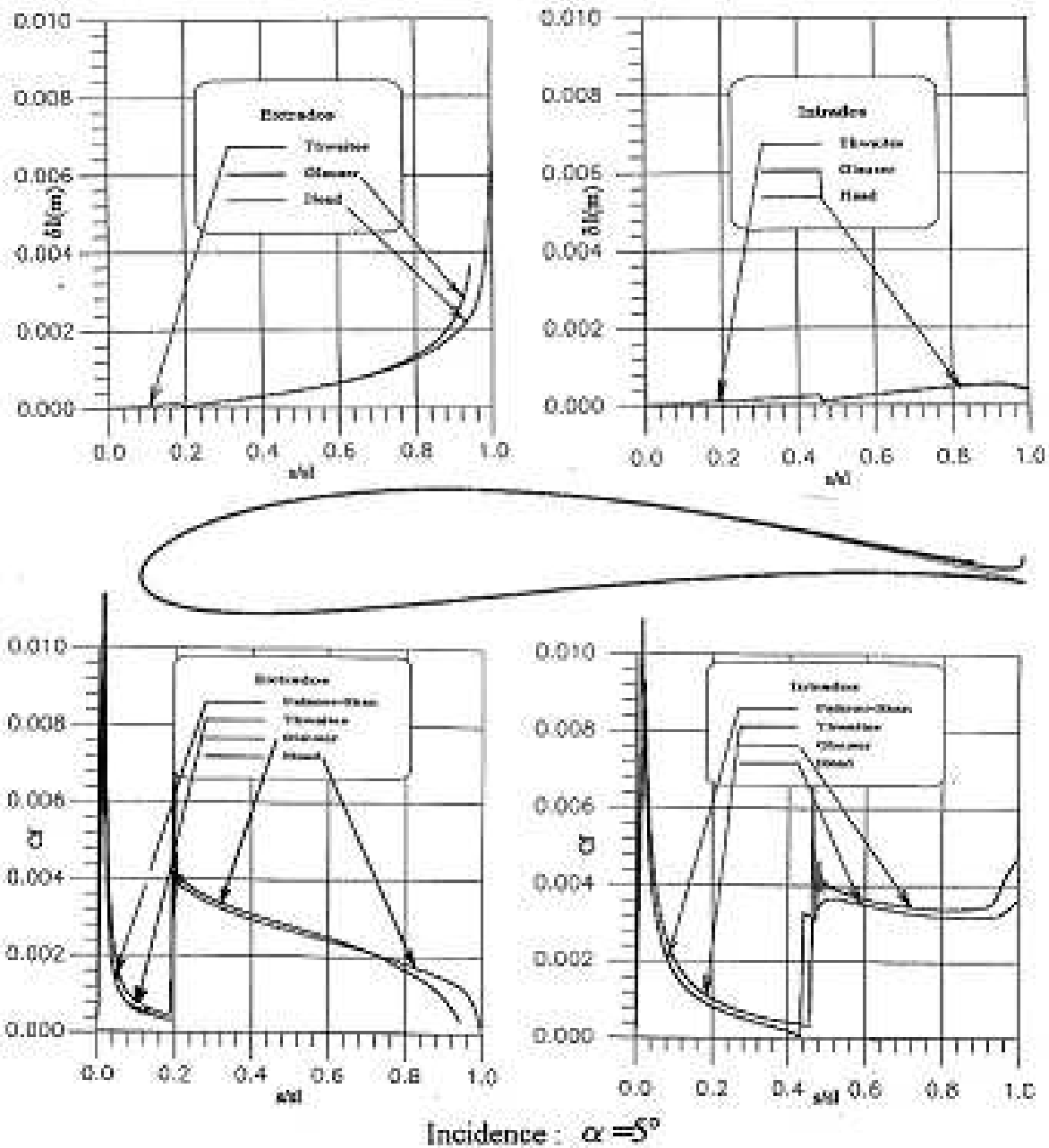
$$\mathcal{R} = \frac{C_0 l}{\nu} \quad (97)$$

$$\mathcal{M} = \frac{C_0}{a_0} \quad (98)$$

## 6.2. Evolution de la couche limite.

A partir des modèles de calcul présentés au chapitre B, la figure 24 donne l'évolution de l'épaisseur de déplacement  $\delta_1$  de la couche limite à la surface d'un profil Joukovski sous une incidence de  $5^\circ$ .

Dans les mêmes conditions, on donne l'évolution du coefficient de frottement  $C_f$  à la surface du profil. On peut observer, pour l'intrados et l'extrados, la zone laminaire puis la transition suivie de la zone turbulente en limite de décollement sur l'extrados au bord de fuite. Les diverses méthodes décrites donnent des résultats très proches. L'optimisation d'un profil aérodynamique consistera donc, d'après l'allure du  $C_f$ , à retarder au maximum l'apparition du régime turbulent. On a ainsi conçu et expérimenté avec succès les profils dits laminaires dont la forme se caractérise par une épaisseur relative maximale positionnée au milieu de la corde (fig. 25).



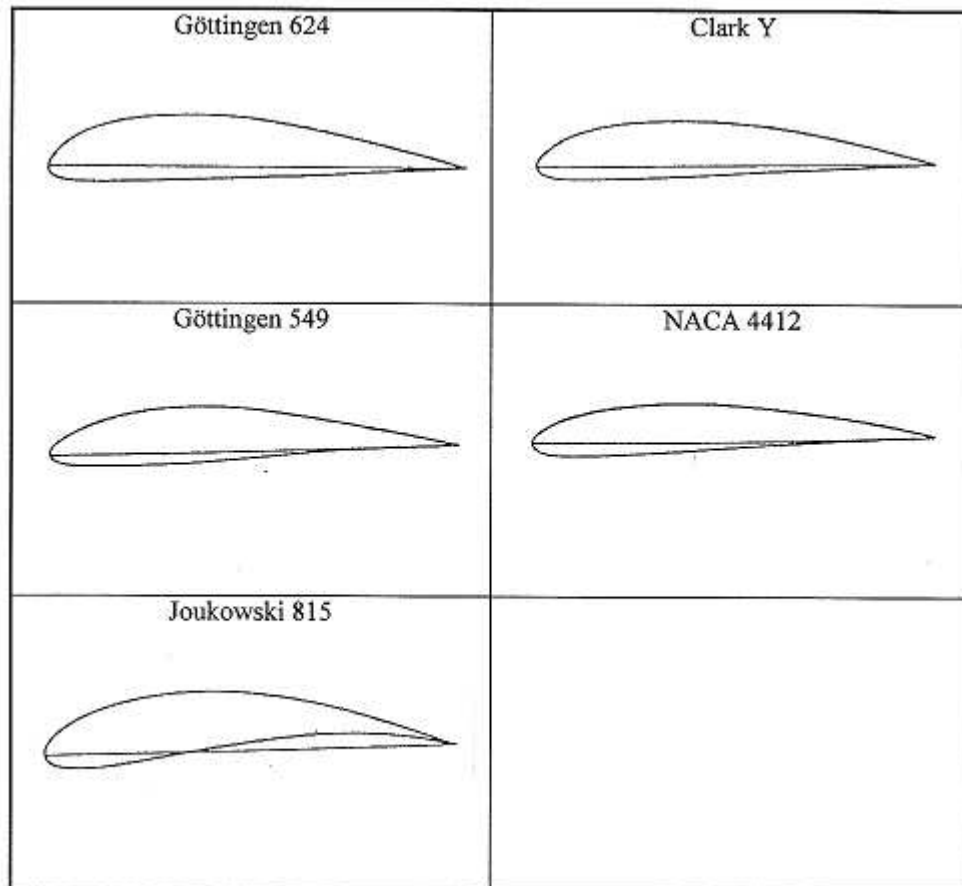
**Figure 24 :** Couche limite et coefficient de frottement à la surface d'un profil Joukovski

### 6.3. Séries de profils.

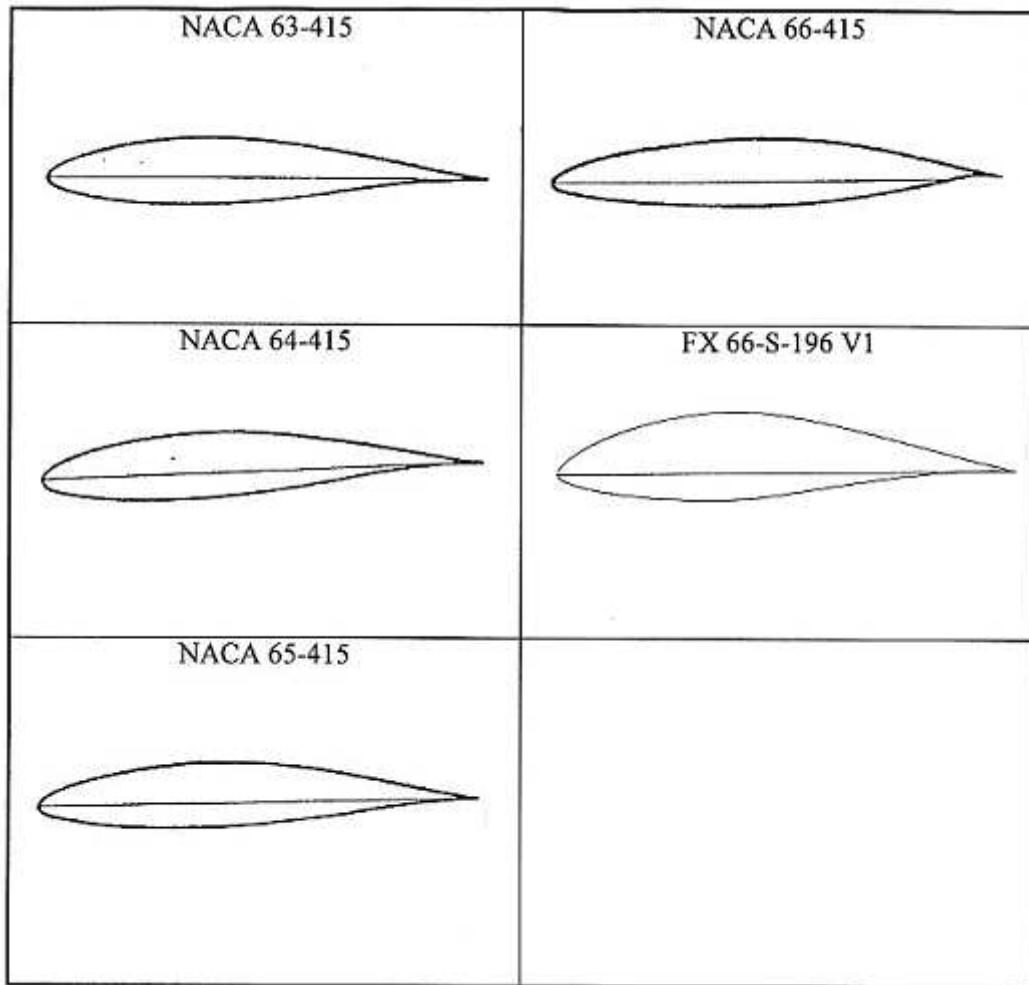
L'optimisation d'un profil aérodynamique a longtemps fait l'objet de recherches à caractère essentiellement expérimental mais l'imperfection des premières souffleries a longtemps retardé la prise en compte et surtout la généralisation d'un grand nombre de résultats.

La majorité des profils expérimentés sous forme de séries : NACA, Joukovski, FX, Göttingen, Clark, etc. sont issus d'une ou plusieurs transformations conformes successives.

La première transformation conforme permet de transformer le cercle de référence en un pseudo-cercle présentant par rapport au cercle parfait quelques écarts. On applique ensuite, à cette forme, la transformation du Joukowski. Cette technique permet d'obtenir une distribution d'épaisseur tout à fait différente de celle du profil Joukowski. On a procédé ainsi pour les profils NACA de la série 6 : 63, 64, 65 et 66 [réf. 111 ; 112].



*Figure 25a : Différents types de profils.*

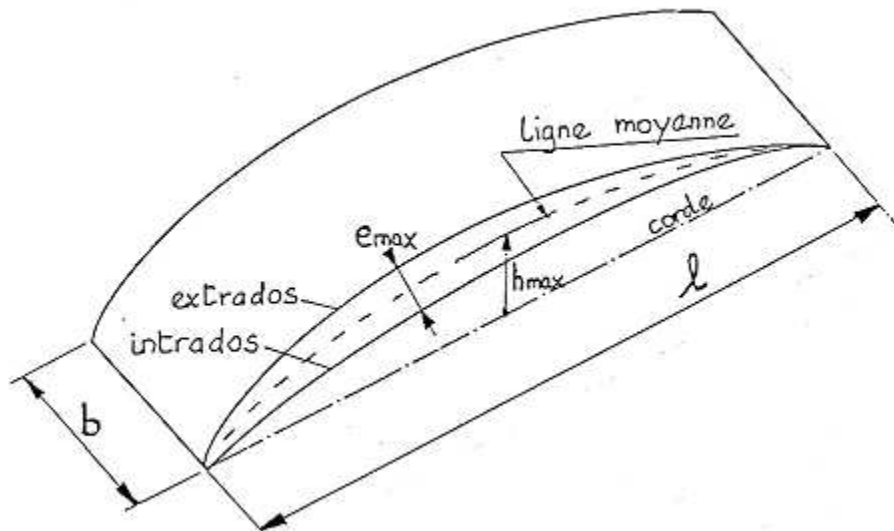


*Figure 25b : Profils laminaires.*

Aujourd'hui, la mise au point et l'optimisation d'un nouveau profil se fera d'abord par le calcul et la partie expérimentale sera réservée à la version pratiquement définitive en vue notamment de préciser le comportement aux grandes incidences proches du décollement.

### **Série NACA 65.**

La construction s'articule autour de la corde, ligne imaginaire joignant le bord d'attaque au bord de fuite et servant aussi au repérage du profil par rapport à l'écoulement. En dehors de la définition de la section du profil que nous examinerons plus loin, les principales définitions géométriques sont données sur la figure 26.



**Figure 26 :** Définitions géométriques relatives au profil aérodynamique.

On retiendra principalement les rapports caractéristiques :

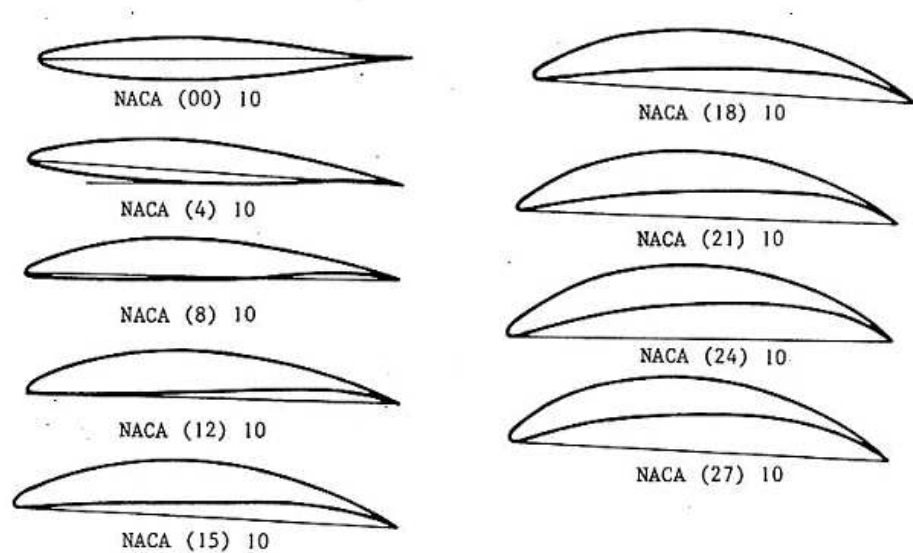
Cambrure géométrique	$\frac{h_{\max}}{l} : 0 \text{ à } 20\%$
Epaisseur relative	$\frac{e_{\max}}{l} : 4 \text{ à } 20\%$
Allongement	$\lambda = \frac{b}{l}$

On introduit également la cambrure aérodynamique  $C_{z\infty 0}$  qui peut être relevée expérimentalement, c'est le coefficient de portance en aubage isolé mesuré sous incidence nulle.  $C_{z\infty 0}$  est lié directement à la cambrure géométrique par la relation :

$$C_{z\infty 0} = \frac{(h_{\max}/l)}{K} \quad (100)$$

où  $(h_{\max}/l)$  est en % et  $K$  coefficient d'origine expérimentale, est lié à la série constructive.

Dans la série NACA 65, la plus répandue dans la construction de machines axiales de compression, le coefficient  $K$  est égal à 5,515. Dans cette même série, la cambrure aérodynamique varie de 0 à 2,7 (du profil symétrique au profil le plus cambré).



*Profils de la série NACA65 de 10% d'épaisseur relative*

**Construction de la section du profil.**

L'axe  $x_1$  porte la corde du profil, corde de longueur 1. On utilise ensuite une loi de cambrure  $y_1(x_1)$  donnant la ligne moyenne

La fonction  $y_1(x_1)$  est, suivant la série utilisée, un arc de cercle, de parabole ou une forme plus complexe.

A l'abscisse  $x_1$ , on note également la pente de la ligne moyenne  $dy_1/dx_1$  et la loi d'épaisseur  $y_2(x_1)$  que l'on porte de part et d'autre de la ligne moyenne (voir figure 27).

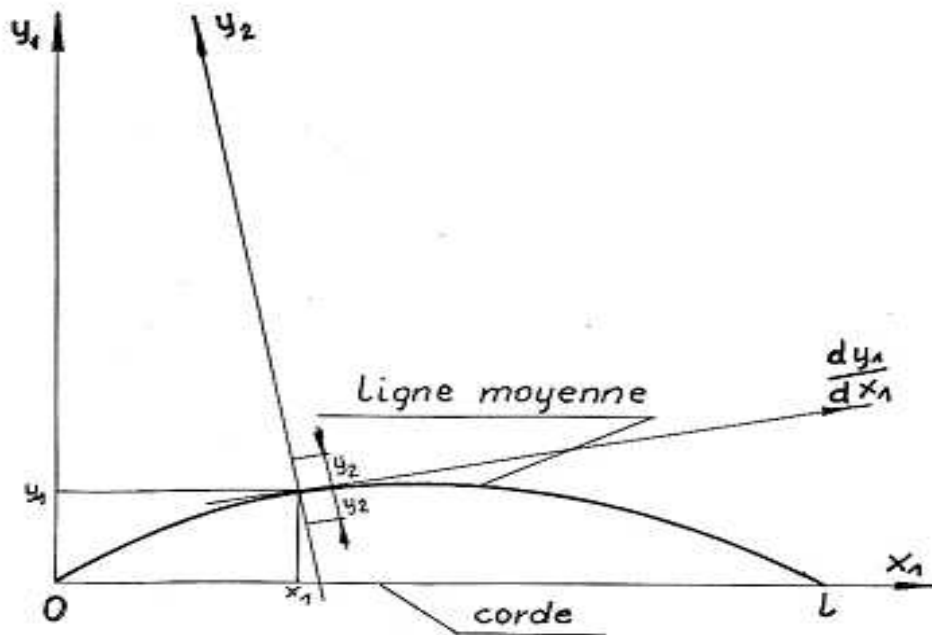


Figure 27 : Repères relatifs à la construction du profil.

Pour les séries les plus connues, les lois de cambrure et d'épaisseur sont établies sous forme de tableaux numériques comme ceux donnés ci-après : [réf.231] :

$\frac{x_1}{\ell}$ (en %)	$\frac{y_1}{\ell}$ (en %)	$\frac{dy_1}{dx_1}$
0	0	
0,5	0,250	0,42120
0,75	0,350	0,38875
1,25	0,535	0,34770
2,5	0,930	0,29155
5	1,580	0,23430
7,5	2,120	0,19995
10	2,585	0,17485
15	3,365	0,13805
20	3,980	0,11030
25	4,475	0,08745
30	4,860	0,06745
35	5,150	0,04925
40	5,355	0,03225
45	5,475	0,01595
50	5,515	0
55	5,475	-0,01595
60	5,355	-0,03225
65	5,150	-0,04925
70	4,860	-0,06745
75	4,475	-0,08745
80	3,980	-0,11030
85	3,365	-0,13805
90	2,585	-0,17485
95	1,580	-0,23430
100	0	

Tableau I : Construction de la ligne moyenne pour  $Cz_{\infty 0} = 1$ .

$\frac{x_1}{\ell}$ (en %)	$\frac{y_2}{\ell}$ (en %)
0	0
0,5	0,772
0,75	0,932
1,25	1,169
2,50	1,574
5	2,177
7,50	2,647
10	3,040
15	3,666
20	4,143
25	4,503
30	4,760
35	4,924
40	4,996
45	4,963
50	4,812
55	4,530
60	4,146
65	3,682
70	3,156
75	2,584
80	1,987
85	1,385
90	0,810
95	0,306
100	0

Tableau II : Loi d'épaisseur pour 10% d'épaisseur relative.

Ces tableaux sont ceux de la série NACA 65. Etant établis pour  $C_{z\infty 0} = 1$  et pour une épaisseur relative de 10%, certaines règles sont à utiliser dans les autres cas. Pour des valeurs différentes de  $C_{z\infty 0}$ , multiplier  $y_1/l$  et  $dy_1/dx_1$  par  $C_{z\infty 0}$  ; pour d'autres épaisseurs relatives, multiplier  $y_2/l$  par le rapport :

$$\frac{\text{épaisseur relative (en \%)}}{10}$$

### **Désignation normalisée.**

Les profils NACA sont désignés par un groupement numérique, par exemple :

NACA 65 - 18 - 12

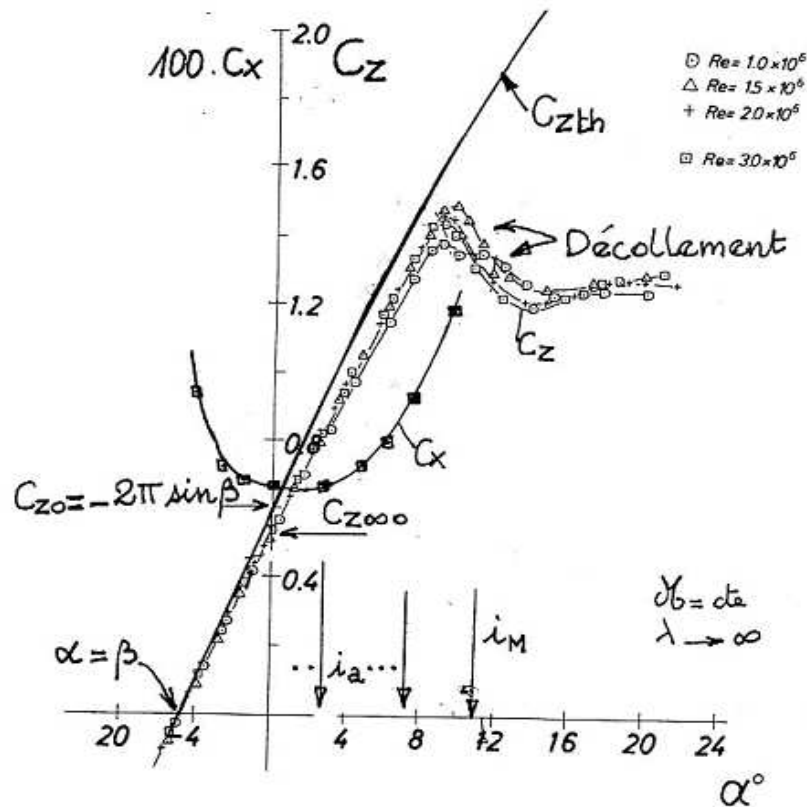
- 65 : numéro de série donnant la loi d'épaisseur (tableaux 1 et 2).
- 18 : correspond à 10 fois  $C_{z\infty 0}$ .
- 12 : correspond à l'épaisseur relative maximale en %.

### **6.4 Résultats expérimentaux.**

Le profil est positionné par rapport à la direction de l'écoulement par l'angle d'incidence  $\alpha$  (ou  $i$ ) en fonction duquel sont relevées les performances aérodynamiques ; à savoir, les efforts globaux  $F_z$  et  $F_x$  pouvant être mesurés à la balance aérodynamique (figure 21). On déduit de ces efforts les coefficients de portance et de traînée  $C_z$  (ou  $C_L$ ) et  $C_x$  (ou  $C_D$ ) ainsi que la finesse  $C_z/C_x$  et l'angle de perte  $\varepsilon$  défini par la relation :

$$\boxed{\text{tg } \varepsilon = \frac{C_x}{C_z} = \frac{F_x}{F_z}} \quad (101)$$

Pour les meilleurs profils,  $\varepsilon$  est de l'ordre de 1 degré. Les performances sont données sous forme graphique en fonction de l'angle d'incidence (figure 28).



**Figure 28 :** Evolution des performances aérodynamiques globales avec l'angle d'incidence.

On peut remarquer quelques points particuliers liés à cette figure 28 :

- $i = \beta$  correspond à l'angle de portance nulle.
- pour  $i = 0$ , le coefficient de portance prend la valeur caractéristique  $C_{z\infty 0}$ , dépendant essentiellement de la cambrure.
- on peut noter deux angles d'incidence particulièrement adaptés : l'angle de perte minimale  $i_a$  et l'angle de finesse maximale.
- on remarque encore à l'angle d'incidence  $i_M$  une remontée des pertes, accompagnée d'une chute de portance. Cet angle de décrochage correspond généralement au décollement brutal des couches limites sur l'extrados du profil.
- au cours des essais, le nombre de Reynolds et le nombre de Mach sont maintenus constant.

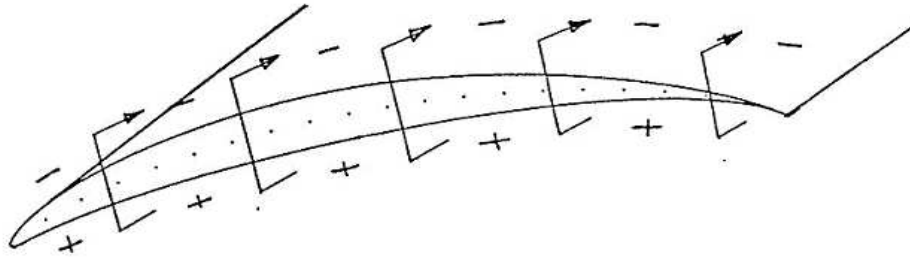
Ces deux derniers paramètres influent directement sur les performances aérodynamiques : le nombre de Reynolds par son influence sur l'épaisseur des couches limites de parois et le nombre de Mach par l'apparition possible d'une onde de choc à l'extrados du profil.

On considère que les performances aérodynamiques sont indépendantes de ces paramètres dans les conditions suivantes :

$$\mathcal{R} \geq 250.000$$

$$\mathcal{M} \leq 0,6$$
(102)

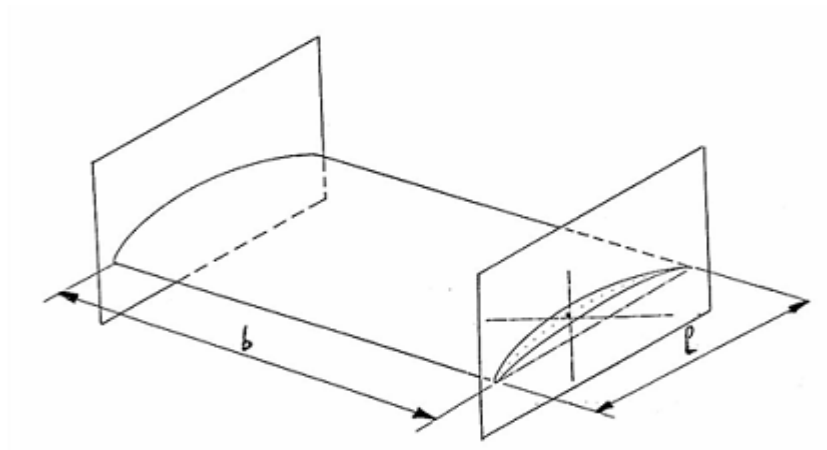
- Les essais sont effectués en allongement infini ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) pour éviter l'apparition des écoulements secondaires dus à la différence de pression entre l'intrados et l'extrados (figure 29).



**Figure 29 :** *Ecoulement secondaire en bout de pale.*

Cette circulation indésirable du fluide est à l'origine d'une perte supplémentaire, appelée traînée induite et caractérisée par :

$$C_{xi} = \frac{C_z^2}{\pi \lambda}$$
(103)



**Figure 30 :** *Configuration d'essai du profil.*

Les références 110, 111 et 113 présentent un très grand nombre de résultats expérimentaux datant des années soixante-dix. Présentés sous forme de polaires, nous donnons quelques uns de ces résultats :

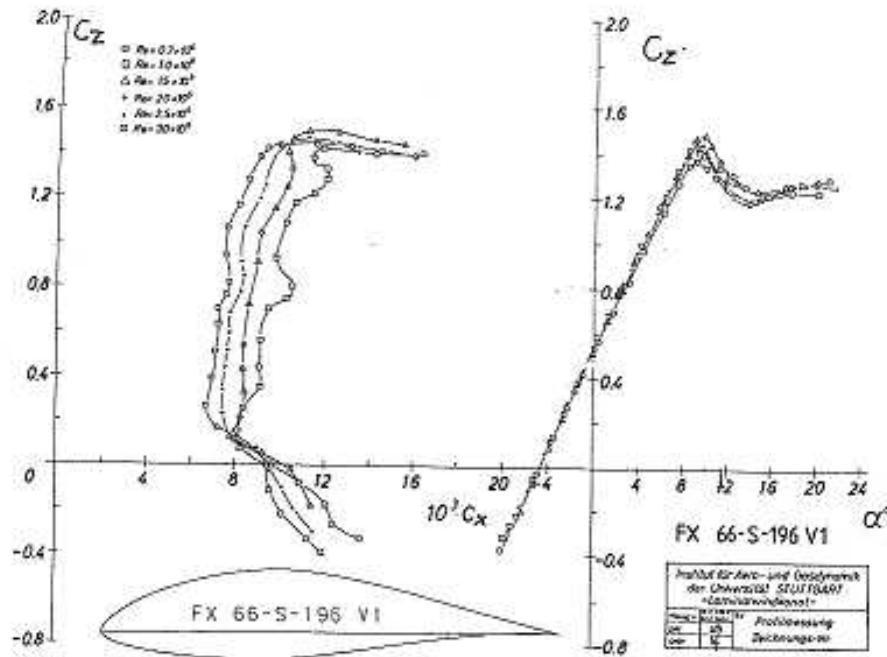
- Figure 31 : profil FX 66 - S - 196 - V1.

La portance varie assez peu avec le nombre de Reynolds, celui-ci ayant des valeurs très élevées, par contre la traînée diminue assez rapidement puis se stabilise.

On relève : l'angle de portance nulle :  $\beta = - 5^\circ$

$$C_{Z\infty 0} = 0,50$$

l'angle de décrochage :  $i_M = 9^\circ$



**Figure 31 : Profil FX 66 - S - 196 - V1**

- Figure 32 : profil FX 61 - 184.

Une portance maximale inférieure pour une cambrure du même ordre, des pertes très faibles à faible incidence. Absence de décrochage jusqu'à 18° d'incidence.

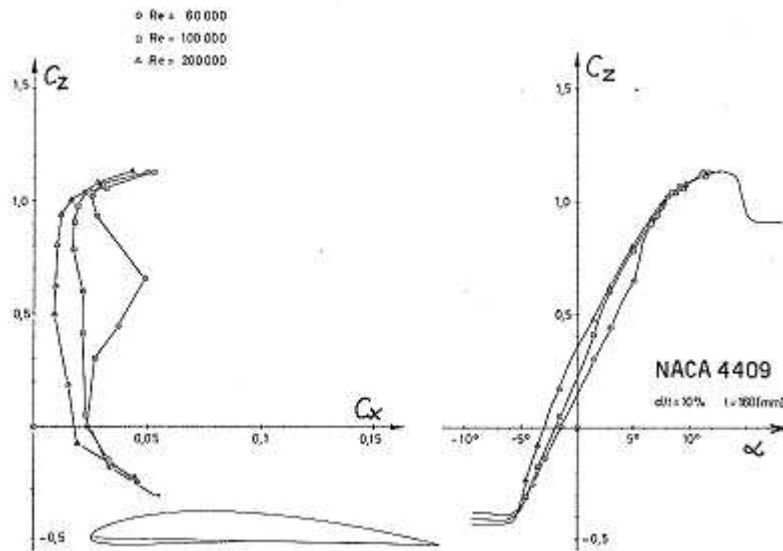


Figure 32 : Profil FX 61 - 184.

- Figure 33 : profil NACA 4409.

La portance dépend très sensiblement du nombre de Reynolds, celui-ci étant, dans le cadre de ces essais, très faible. Les pertes sont, pour cette raison, très importantes.

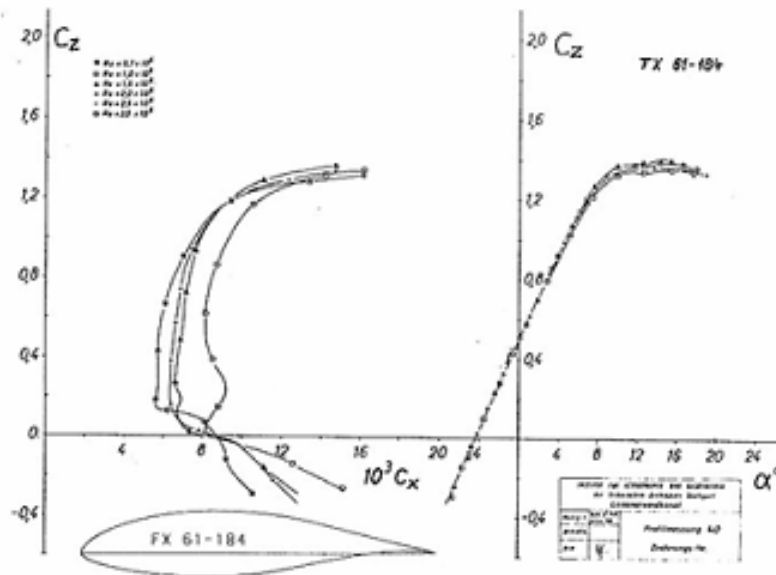


Figure 33 : Profil NACA 4409.

-B-

**MECANIQUE DES GRILLES D'AUBES APPLIQUEE A LA  
CONSTRUCTION DES MACHINES AXIALES DE  
COMPRESSION**

## SYMBOLES UTILISES

L	corde du profil	m
B	envergure de l'aubage	m
$C_{Z\infty 0}$	cambrure aérodynamique	-
I	angle d'indice	(o)
$C_z$	coefficient de portance	-
$C_x$	coefficient de traînée	-
$\epsilon$	angle de perte	(o)
$Re$	nombre de Reynolds	-
M	nombre de Mach	-
$\nu$	viscosité cinématique du fluide	$m^2/s$
a	vitesse locale du son	m/s
$C_{xi}$	coefficient de traînée induite	-
$\gamma$	angle de calage des profils	(o)
t	pas des profils	m
$\sigma$	serrage des profils	-
$\Delta\alpha$	déflexion de la grille	(o)
$\rho$	masse volumique du fluide	$kg/m^3$
$\tau$	angle de portance nulle	(o)
$\delta$	angle d'impulsion	(o)
io	point de fonctionnement nominal	(o)
$R_i$	rayon de moyeu	m
$R_e$	rayon extérieur de l'étage	m
$\bar{R}$	rayon moyen	m



## **SOMMAIRE**

### **I - CREATION D'UNE GRILLE RECTILIGNE FORMEE D'AUBES D'ENVERGURE CONSTANTE PAR LA METHODE DES SINGULARITES** **p. 6**

- 1.1. Ecoulement dans la grille
- 1.2. Portance
- 1.3. Cas d'une grille rectiligne mobile

### **II - GENERALITES CONCERNANT LES PROFILS EN GRILLE** **p. 21**

- 2.1. Définitions géométriques
- 2.2. Considérations cinématiques
- 2.3. Performances aérodynamiques
- 2.4. Domaine d'utilisation de la grille, angle d'incidence optimal
- 2.5. Essais du NACA

### **III - REPRESENTATION UNIVERSELLE DES PROPRIETES CINEMATQUES DES GRILLES D'AUBES PLANES** **p. 26**

- 3.1. Généralités
- 3.2. Loi en tangentes, relation de Ruden
- 3.3. Etude de la fonction B
- 3.4. Angle de portance nulle  $\tau$
- 3.5. Justifications expérimentales
- 3.6. Représentation universelle des propriétés cinématiques

### **IV - FONCTIONNEMENT NOMINAL D'UNE GRILLE, EVALUATION DES PERTES** **p. 37**

- 4.1. Point de référence de la grille
- 4.2. Détermination des pertes
- 4.3. Limites d'utilisation. Exemple d'application en problème direct
- 4.4. Résolution du problème inverse. Facteur de diffusion

**V - ETUDE GENERALE D'UN ETAGE DE COMPRESSION FORME DE DEUX GRILLES PLANES** **p. 50**

5.1. Configuration générale de l'étage

5.2. Expression de la hauteur locale

5.3. Expression du rendement local

**VI - GENERALISATION A UN ETAGE DE COMPRESSION REEL FORME DE GRILLES ANNULAIRES** **p. 55**

6.1. Equilibre radial simplifié dans la machine axiale

6.2. Différents types de loi génératrice

6.3. Définition du rayon moyen de la machine

**VII - RELATIONS ENTRE LES PARAMETRES GEOMETRIQUES ET HYDRAULIQUES DE LA MACHINE AXIALE** **p. 63**

7.1. Dimensionnement global

7.2. Méthodologie du dimensionnement global

7.3. Rendement hydraulique global

7.4. Application numérique

7.5. Définition locale des grilles rotoriques et statoriques

7.6. Degré de réaction

7.7. Coefficients de pression et de débit

**VIII - DEFINITION DES DIFFERENTS CRITERES D'OPTIMISATION HYDRAULIQUE ET GEOMETRIQUE** **p. 71**

8.1. Paramètres géométriques

8.2. Bruit hydraulique ou aéraulique

8.3. Capacité d'aspiration

8.4. Choix optimal du couple ( $\overline{\alpha}_m, \overline{\beta}_m$ )

**IX - LOGICIEL DE DIMENSIONNEMENT ET D'ANALYSE DES PERFORMANCES  
DES MACHINES AXIALES** **p. 85**

9.1. Dimensionnement

9.2. Analyse des performances

**X - REALISATIONS SPECIALES** **p. 101**

10.1. Ventilateurs axiaux

10.2. Inducteur

10.3. Compresseur axial multi étagé

# **MECANIQUE DES GRILLES D'AUBES APPLIQUEE A LA CONSTRUCTION DES MACHINES AXIALES DE COMPRESSION**

Ce chapitre s'adresse en premier lieu aux grilles de compression équipant les compresseurs et les pompes mais il est facilement transposable aux grilles de détente.

La première partie traite de l'écoulement en grille fixe puis mobile d'un fluide parfait et s'appuie sur la méthode des singularités pour modéliser le problème direct pour lequel la forme du profil est donnée.

De nombreux auteurs ont brillamment illustré cette démarche, avec parmi les plus récents : A. A. Fay (1993 - réf. 205), T. S. Luu et al (1993 - réf. 204), F. C. Visser et al (1993 - réf. 207), M. H. Fagard (1993 - réf. 203).

Les trois chapitres suivants traitent du fonctionnement des grilles d'aubes en fluide réel. Des essais en soufflerie ont permis de définir les corrélations permettant de résoudre les deux problèmes types : problème direct (analyse) et problème inverse (dimensionnement).

Les chapitres V et VI concernent l'étude d'un étage de compression, d'abord en grille plane et puis en grille annulaire. Ce dernier cas étant celui d'une vraie machine axiale.

Les deux chapitres suivants conduisent à une représentation généralisée des performances des machines axiales. Cette méthode globale (réf. 232, 233) constitue une aide à la conception permettant d'optimiser les machines selon des critères tels que le rendement, la capacité d'aspiration, la taille, le bruit, etc.

Un chapitre est consacré à la présentation d'un logiciel de dimensionnement et d'analyse des performances des machines axiales (POMAX) développé à partir des travaux présentés ici.

Pour conclure, on trouvera également quelques réalisations industrielles spéciales répondant à des cahiers des charges très contraignants : ventilateur axial fonctionnant à de faibles nombres de Reynolds, inducteur spécialement conçu pour résister à la cavitation, compresseur axial multi étage (réf. 234, 235).

## I - CREATION D'UNE GRILLE RECTILIGNE FORMEE D'AUBES D'ENVERGURE CONSTANTE PAR LA METHODE DES SINGULARITES

On fait appel dans cette section à la méthode des singularités et à la superposition des écoulements décrits dans les chapitres A et C.

Le profil est défini par les deux équations  $h_e(x)$  et  $h_i(x)$  correspondant respectivement à l'extrados et à l'intrados (figure 1).

On dispose à la surface du profil une distribution continue de vorticité  $\gamma(s)$  où  $s$  est l'abscisse curviligne comptée à partir du bord d'attaque.

Le potentiel complexe est obtenu par application des relations classiques :

$$F(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{(c)} \gamma(s) \ln(z - z_s) ds \quad (1)$$

d'où l'on déduit la vitesse complexe conjuguée  $C'$  :

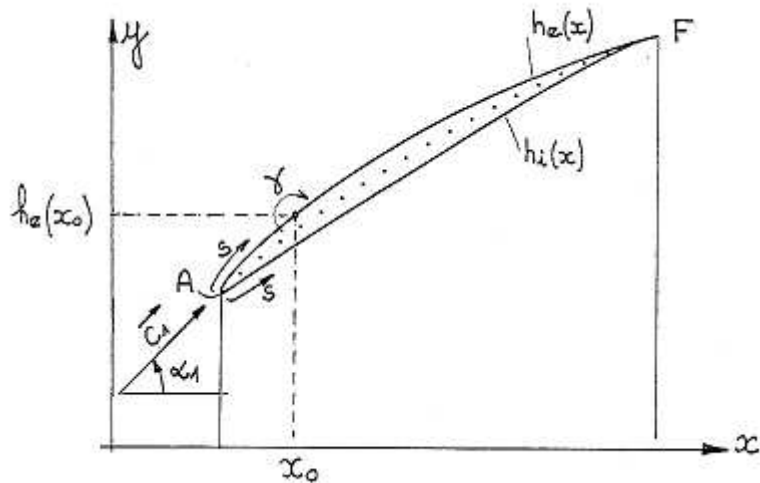
$$C' = u - iv = \frac{dF}{dz} = \frac{i}{2\pi} \int_{(c)} \frac{\gamma(s) ds}{(z - z_s)} \quad (2)$$

En notant que les affixes  $z$  et  $z_s$  s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} z = x + iy \\ z_s = x_0 + i h(x_0) \end{cases}$$

la relation (2) devient :

$$C' = u - iv = \frac{i}{2\pi} \int_{(c)} \frac{\gamma(s) ds}{(x - x_0) + i(y - h(x_0))} \quad (3)$$

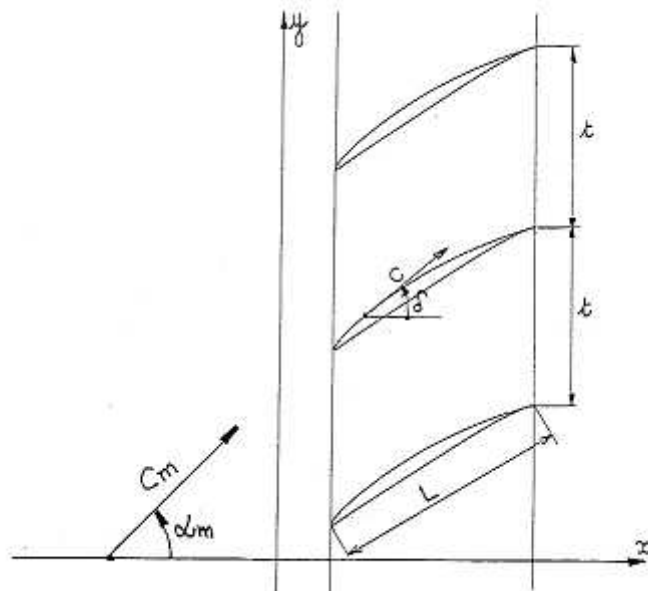


*Figure 1 : Distribution de vorticité à la surface du profil*

### Création d'une grille d'aube rectiligne.

L'écoulement devient périodique (figure 2) et toutes les singularités sont répétées parallèlement à l'axe Oy avec un intervalle  $t$  correspondant au pas des profils (tous les profils sont identiques).

En un point  $(x, y)$  de l'espace fluide, la vitesse complexe est fonction de l'ensemble des distributions de vorticité.



*Figure 2 : Création d'une grille d'aubes plane rectiligne*

La vitesse  $C'$  est obtenue à partir de la relation (3) par la sommation suivante de  $y \rightarrow -\infty$  jusqu'à  $y \rightarrow +\infty$ .

$$C' = \frac{i}{2\pi} \left[ \dots + \int_{(c)} \frac{\gamma(s) ds}{(x - x_0) + i(y - h(x_0)) - 2it} + \int_{(c)} \frac{\gamma(s) ds}{(x - x_0) + i(y - h(x_0)) - it} + \int_{(c)} \frac{\gamma(s) ds}{(x - x_0) + i(y - h(x_0))} + \int_{(c)} \frac{\gamma(s) ds}{(x - x_0) + i(y - h(x_0)) + it} + \int_{(c)} \frac{\gamma(s) ds}{(x - x_0) + i(y - h(x_0)) + 2it} + \dots \right]$$

que l'on peut écrire :

$$C' = \frac{i}{2\pi} \int_{(c)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - x_0) + i(y - h(x_0)) + in\pi} \gamma(s) ds$$

ou

$$C' = \frac{i}{2t} \int_{(c)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{t} [(x - x_0) + i(y - h(x_0))] + in\pi} \gamma(s) ds$$

On reconnaîtra dans la forme de l'intégrand le développement en série de la fonction cotangente hyperbolique suivante :

$$\coth \left( \frac{\pi}{t} [(x - x_0) + i(y - h(x_0))] \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{t} [(x - x_0) + i(y - h(x_0))] + in\pi} \quad (4)$$

D'où l'expression de l'équation intégrale définissant la vitesse :

$$C' = u - iv = \frac{i}{2t} \int_{(c)} \coth \left\{ \frac{\pi}{t} [(x - x_0) + i(y - h(x_0))] \right\} \gamma(s) \cdot ds \quad (5)$$

## 1.1. Ecoulement dans la grille

L'envergure étant constante, l'écoulement dans la grille peut être modélisé par la superposition de l'ensemble des singularités et d'un écoulement plan uniforme de direction  $\alpha_m$  et de module  $C_m$  à l'infini amont.

La vitesse  $\vec{C}$  en tout point du plan sera définie par le système suivant :

$$\vec{C} = \begin{cases} u = C_m \cos \alpha_m + \operatorname{Re}(C') \\ v = C_m \sin \alpha_m - \operatorname{Im}(C') \end{cases} \quad (6)$$

dans lequel  $\operatorname{Re}(C')$  et  $\operatorname{Im}(C')$  représentent respectivement les parties réelle et imaginaire de l'équation (5) de définition de la vitesse  $C'$  engendrée par l'ensemble des nappes tourbillonnaires attachées à chacun des profils.

En posant :

$$\begin{cases} X = \frac{\pi}{t} (x - x_0) \\ Y = \frac{\pi}{t} (y - h(x_0)) \end{cases}$$

et  $Z = X + iY$

On obtiendra l'identité suivante :

$$i \coth(Z) = \frac{\sin 2Y + i \operatorname{sh} 2X}{\operatorname{ch} 2X - \cos 2Y}$$

D'où l'expression du vecteur vitesse en tout point du plan :

$$\vec{C} = \begin{cases} u = C_m \cos \alpha_m + \frac{1}{2t} \int_{(c)} \frac{\sin 2Y}{\operatorname{ch} 2X - \cos 2Y} \gamma(s) ds \\ v = C_m \sin \alpha_m - \frac{1}{2t} \int_{(c)} \frac{\operatorname{sh} 2X}{\operatorname{ch} 2X - \cos 2Y} \gamma(s) ds \end{cases} \quad (7)$$

En posant enfin :

$$f_x = \frac{\sin 2Y}{\operatorname{ch} 2X - \cos 2Y}$$

et  $f_y = \frac{\operatorname{sh} 2X}{\operatorname{ch} 2X - \cos 2Y}$

on obtient la forme finale :

$$\vec{C} = \begin{cases} u = C_m \cos \alpha_m + \frac{1}{2t} \int_{(c)} f_x \gamma(s) ds \\ v = C_m \sin \alpha_m - \frac{1}{2t} \int_{(c)} f_y \gamma(s) ds \end{cases} \quad (8)$$

### Conditions aux limites :

La distribution de vorticité  $\gamma(s)$  doit répondre à un certain nombre de conditions aux limites traduisant la réalité physique de l'écoulement.

La première est une condition cinématique correspondant au glissement à la surface du profil : la vitesse  $\vec{C}$  est tangente en tout point à la surface d'équation  $y = h(x)$  :

$$\left( \frac{dh}{dx} \right) = \operatorname{tg} \delta = \frac{v(x_0, h(x_0))}{u(x_0, h(x_0))} \quad (9)$$

La relation (9) permet, en principe, de définir la liaison entre  $\gamma(s)$  et  $h(x)$ . En dehors de quelques cas très simples comme celui de grilles formées de plaques planes (Weinig), les équations définissant  $C'$  ne sont pas intégrables.

Les détails permettant la mise en oeuvre de la méthode des singularités sont donnés au chapitre C.

### Circulation totale :

La circulation totale  $\Gamma$  correspondant à un profil est définie par l'équation suivante :

$$\Gamma = \int_{(c)} \gamma(s) ds \quad (10)$$

### Écoulement à l'infini amont et à l'infini aval :

Les vitesses à l'infini amont  $\vec{C}_1$  et à l'infini aval  $\vec{C}_2$  sont données pour  $x \rightarrow -\infty$  et  $x \rightarrow +\infty$  dans le système (8) :

$$\vec{C}_1 \left| \begin{array}{l} u(-\infty, y) = u_1 \\ v(-\infty, y) = v_1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \vec{C}_2 \left| \begin{array}{l} u(+\infty, y) = u_2 \\ v(+\infty, y) = v_2 \end{array} \right.$$

En notant les valeurs des limites suivantes :

$$\text{ch}(-\infty) = \text{ch}(+\infty) = +\infty$$

Les deux valeurs de  $u_1$  et  $u_2$  sont égales et valent  $C_m \cos \alpha_m$ . Cette égalité traduit l'équation de continuité si la hauteur de veine est constante. En notant les autres limites :

$$\text{sh}(-\infty) = -\infty \quad \text{coth}(-\infty) = -1$$

$$\text{sh}(+\infty) = +\infty \quad \text{coth}(+\infty) = +1$$

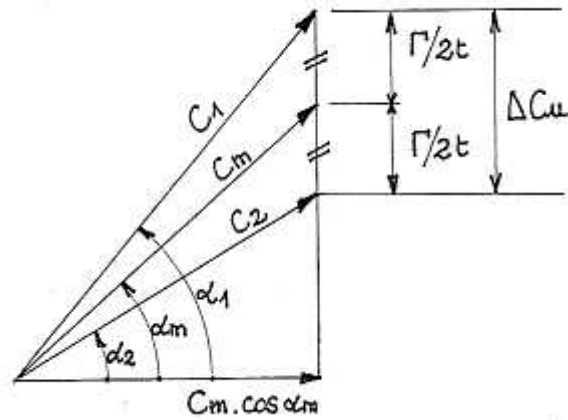
Les deux autres composantes  $v_1$  et  $v_2$  sont égales à :

$$\begin{aligned} v_1 &= C_m \sin \alpha_m + \frac{1}{2t} \int_{(c)} \gamma(s) ds \\ v_2 &= C_m \sin \alpha_m - \frac{1}{2t} \int_{(c)} \gamma(s) ds \end{aligned} \quad (11)$$

soit finalement d'après l'équation (10) :

$$\vec{C}_1 \left| \begin{array}{l} u_1 = C_m \cos \alpha_m \\ v_1 = C_m \sin \alpha_m + \frac{\Gamma}{2t} \end{array} \right. \quad \vec{C}_2 \left| \begin{array}{l} u_2 = C_m \cos \alpha_m \\ v_2 = C_m \sin \alpha_m - \frac{\Gamma}{2t} \end{array} \right. \quad (12)$$

Relations donnant accès aux triangles de vitesses entrée-sortie de la grille (figure 3) :



**Figure 3 :** Triangles de vitesses entrée-sortie de la grille

Le vecteur vitesse  $\vec{C}_m$  est la moyenne vectorielle des vecteurs entrée-sortie  $\vec{C}_1$  et  $\vec{C}_2$ , l'angle  $\alpha_m$  est l'angle moyen défini par :

$$\boxed{\text{tg } \alpha_m = \frac{\text{tg } \alpha_1 + \text{tg } \alpha_2}{2}} \quad (13)$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont respectivement les angles d'entrée et de sortie de la grille :

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{C_m \sin \alpha_m + \frac{\Gamma}{2t}}{C_m \cos \alpha_m} \quad (14)$$

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{C_m \sin \alpha_m - \frac{\Gamma}{2t}}{C_m \cos \alpha_m}$$

### Déflexion :

La déflexion  $\Delta\alpha$  correspond à la déviation subie par l'écoulement au passage de la grille :

$$\boxed{\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2} \quad (15)$$

Elle est directement liée à la circulation globale  $\Gamma$  de chaque profil et au pas  $t$  des profils.

On peut noter également la relation importante :

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\Delta C_u}{C_m \cos \alpha_m} = \frac{\Gamma}{t C_m \cos \alpha_m}} \quad (16)$$

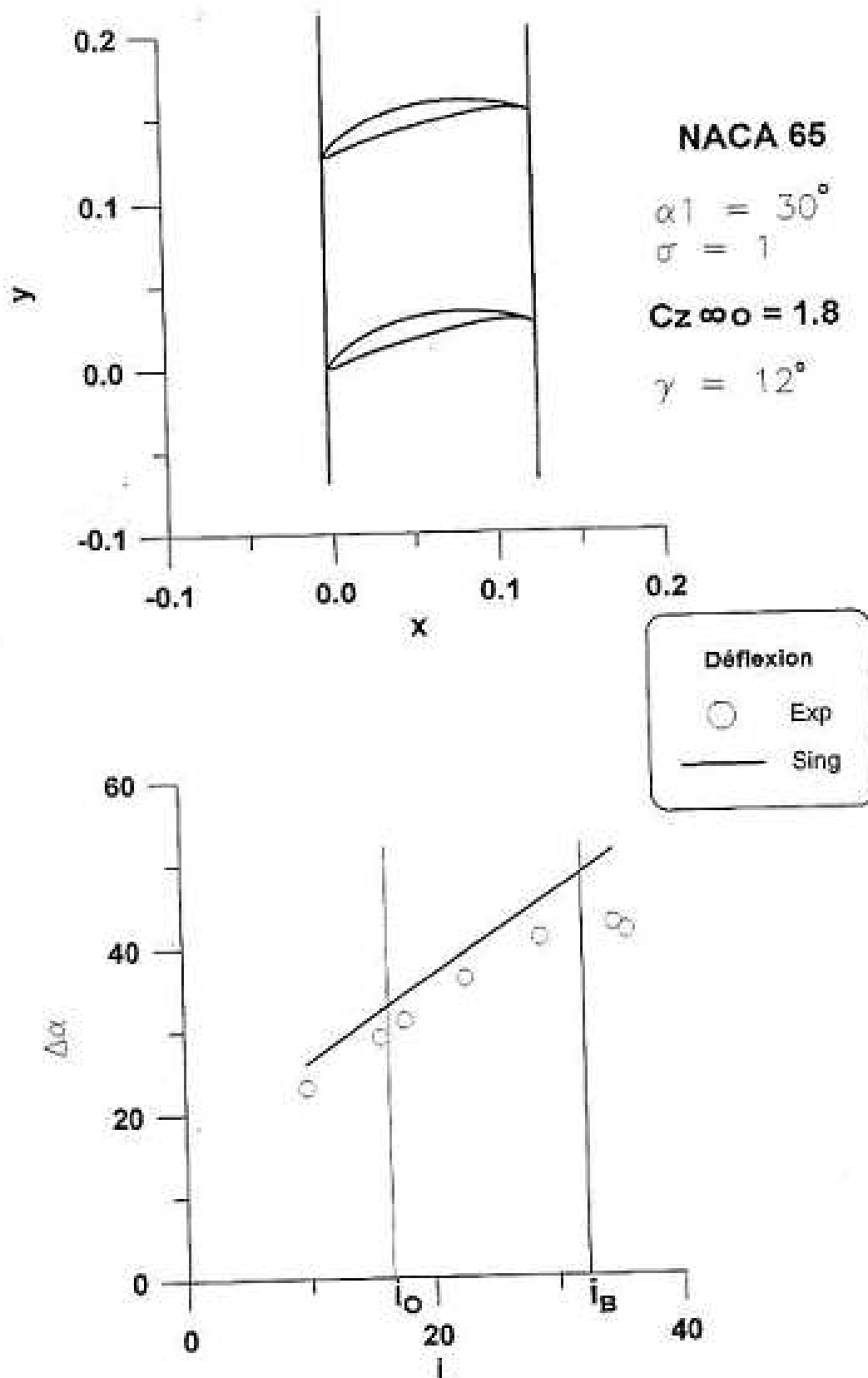
La figure 4a présente une comparaison des déflexions  $\Delta\alpha$  obtenues avec cette méthode et celles mesurées expérimentalement pour une grille formée de profils NACA 65-18-10. Un écart de l'ordre de  $4^\circ$  est constaté sur une large plage d'incidence allant jusqu'à la limite pratique d'utilisation  $i_B$  (décollement sur l'extrados).

Cet écart est lié à la présence des couches limites se développant à la surface des profils dont l'influence se manifeste par une réduction pratique de la cambrure du profil (voir chapitre C).

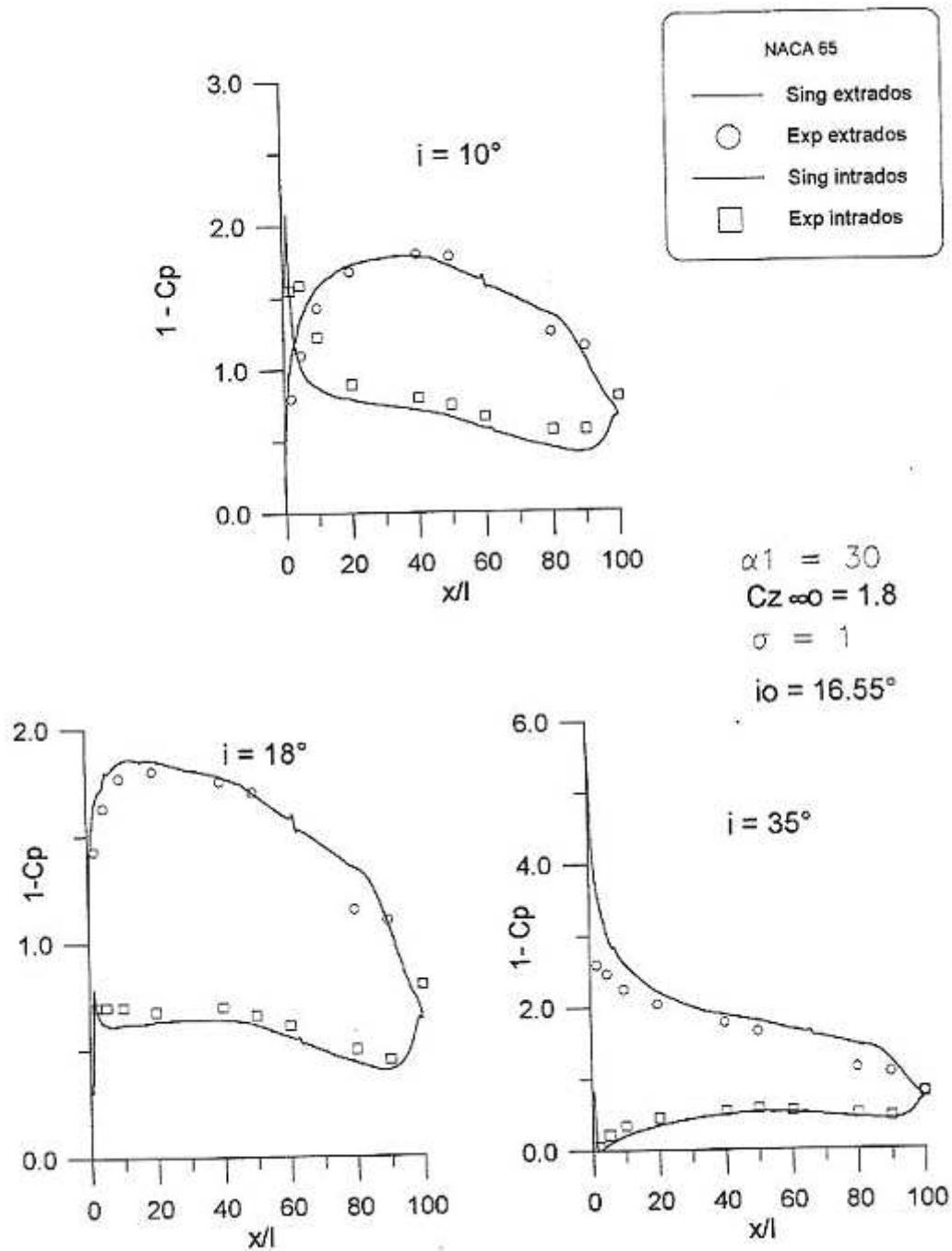
La figure 4b présente en détail, pour la même grille, l'évolution du coefficient de pression ( $1 - C_p$ ), sur l'intrados et l'extrados, depuis le bord d'attaque jusqu'au bord de fuite et ceci pour trois incidences différentes. Les valeurs obtenues suivent de très près les résultats d'essais en soufflerie.

Toujours pour cette même grille, la figure 5 donne la cinématique de l'écoulement inter aubages pour deux incidences:

- a - Incidence nominale proche de  $18^\circ$  correspondant pour une machine réelle à un fonctionnement nominal.
- b - Incidence proche de  $35^\circ$  correspondant, en machine, à un fonctionnement en débit partiel. Une importante recirculation (retour vers l'entrée) est visible dans la section d'entrée.

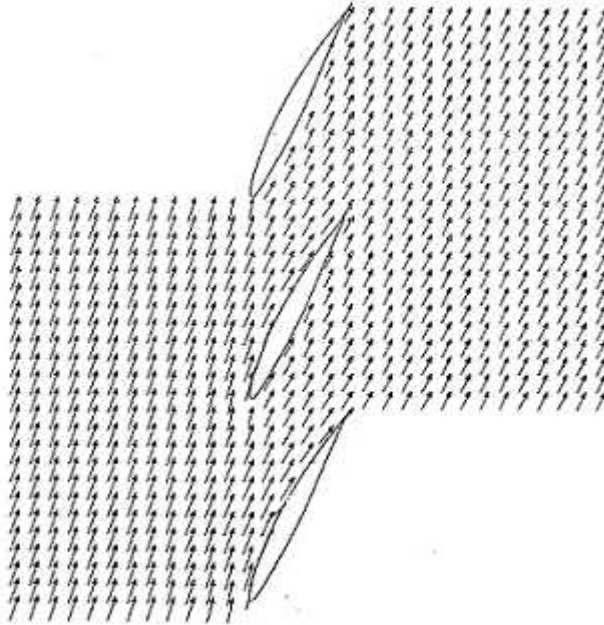


*Figure 4a : Comparaison de la déflexion calculée par les singularités avec celle mesurée en soufflerie.*

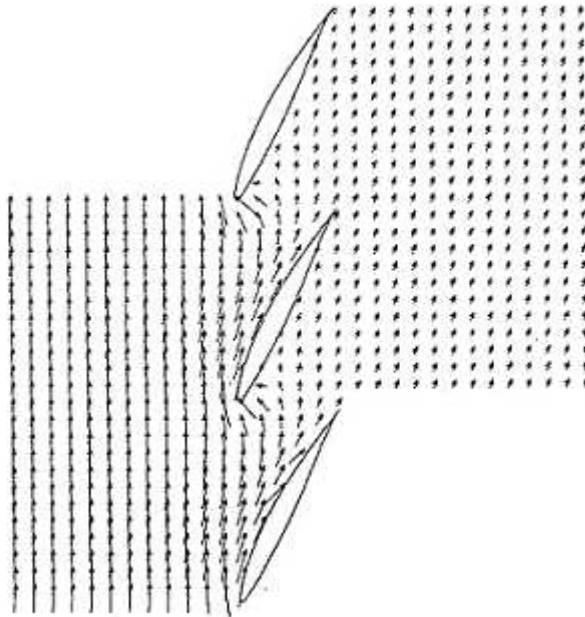


**Figure 4b** : Comparaison du coefficient  $(1 - C_p)$  calculée par les singularités avec celui mesuré en soufflerie.

a)  $Q_v/Q_n = 1$



b)  $Q_v/Q_n = 0.2$



**Figure 5 :** Champ des vitesses inter aubages dans une grille mobile.  
( $C_{z\infty} = 0,370$ ;  $\gamma = 65,4^\circ$ ;  $\sigma = 1,05$ ;  $N = 1450$  tr/mn;  $Q_n = 500$  m<sup>3</sup>/h)

## 1.2. Portance

On démontre que l'effort de portance est dirigé suivant la perpendiculaire à la direction moyenne  $\alpha_m$ .

Il est calculable par unité d'envergure à partir de la relation de Joukovski :

$$Fz = \rho C_m \Gamma$$

En introduisant la circulation totale  $\Gamma$  à partir de la relation de déflexion (16), on obtient :

$$Fz = \rho t C_m^2 \cos \alpha_m (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) \quad (17)$$

On peut également introduire le coefficient de portance  $C_z$ , nombre adimensionnel construit comme le rapport de l'effort de portance ramené au produit de la pression dynamique par la surface portante  $l.b$  ( $l$  corde des profils et  $b$  l'envergure) :

$$C_z = \frac{Fz}{\rho \frac{C_m^2}{2} l.b} \quad (18)$$

En portant, pour l'envergure unité, la force  $Fz$  issue de (17) dans (18), on obtiendra l'expression du coefficient de portance  $C_z$  :

$$C_z = \frac{2}{\sigma} \cos \alpha_m (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) \quad (19)$$

Relation dans laquelle on a défini le serrage des profils  $\sigma$  (ou solidité de la grille) par la relation :

$$\sigma = \frac{l}{t} \quad (20)$$

### 1.3. Cas de la grille rectiligne mobile

Comme nous l'avons examiné précédemment (§1.1), la théorie potentielle n'a de sens que dans le cadre du mouvement irrotationnel.

Les éléments développés précédemment concernent donc la vitesse absolue et, en particulier, ses composantes  $u$  et  $v$  :

$$\vec{C} \left| \begin{array}{l} u = C_m \cos \alpha_m + \frac{1}{2t} \int_{(c)} f_x \gamma(s) ds \\ v = C_m \sin \alpha_m - \frac{1}{2t} \int_{(c)} f_y \gamma(s) ds \end{array} \right. \quad (21)$$

La grille se déplace à la vitesse d'entraînement  $\vec{U}$  (parallèlement à  $Oy$  et de sens opposé) ayant pour composantes :

$$\vec{U} \left| \begin{array}{l} 0 \\ -U \end{array} \right. \quad (22)$$

D'où les composantes de la vitesse relative  $\vec{W}$  issue de la composition des vitesses :

$$\vec{W} = \vec{C} - \vec{U} \quad (23)$$

$$\vec{W} \left| \begin{array}{l} u \\ v + U \end{array} \right. \quad (24)$$

La distribution de vorticité sera définie comme précedemment par application de la condition de glissement en  $(n + 1)$  points du profil ; cependant, dans le cas de la grille mobile, c'est la vitesse relative qui doit satisfaire les conditions de glissement :

Celle-ci s'écrit :

$$\left( \frac{dh}{dx} \right)_{x=x_0} = \operatorname{tg} \delta = \frac{v(x_0, h(x_0)) + U}{u(x_0, h(x_0))} \quad (25)$$

#### **Cas particulier :**

On impose généralement dans le calcul d'une grille une vitesse absolue de direction axiale à l'infini amont ( coulement libre) :

Ceci se traduit dans le système (12) à annuler la composante  $v_1$  de  $\vec{C}_1$  en imposant :

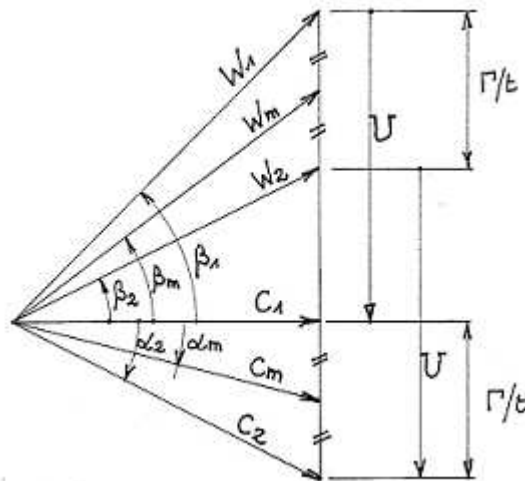
$$C_m \sin \alpha_m = -\frac{\Gamma}{2t} \quad (26)$$

$$\text{et } C_1 = u_1 = C_m \cos \alpha_m \quad (27)$$

Les composantes de  $\vec{W}$  à l'infini seront alors d'après (12) et (24) :

$$\vec{W}_1 \begin{vmatrix} C_m \cos \alpha_m \\ U \end{vmatrix} \quad \vec{W}_2 \begin{vmatrix} C_m \cos \alpha_m \\ U - \Gamma/t \end{vmatrix} \quad (28)$$

On peut alors tracer les triangles de vitesses entrée-sortie de la grille mobile :



**Figure 6 : Triangles de vitesses de la grille mobile**

### Relations géométriques issues des triangles de vitesses :

Les angles relatifs sont notés  $\beta_1$  et  $\beta_2$  et l'on peut écrire les relations géométriques :

$$\text{tg } \beta_1 = \frac{U}{C_1} = \frac{U}{C_m \cos \alpha_m} \quad (29)$$

$$\text{tg } \beta_2 = \text{tg } \beta_1 - \frac{\Gamma}{t C_m \cos \alpha_m} \quad (30)$$

Relation de définition : 
$$\operatorname{tg} \beta_m = \frac{\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2}{2} \quad (31)$$

Relation de définition : 
$$\operatorname{tg} \alpha_m = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{2} \quad (32)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\Gamma}{t C_m \cos \alpha_m} \quad (33)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2 \quad (34)$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \alpha_m \quad (35)$$

Ces relations seront retrouvées dans les chapitres suivants. Elles serviront à paramétrer d'une manière générale les machines axiales.

## II – GENERALITES CONCERNANT LES PROFILS EN GRILLE

### 2.1. – Définitions géométriques

On étudie ici le cas d'une grille plane infinie (fig.7) attaquée par un écoulement plan infini, uniforme et permanent. L'angle d'incidence de l'écoulement est toujours repéré entre la corde des profils et la vitesse incidente (repère lié au profil). La vitesse d'entrée  $C_1$  et la vitesse de sortie  $C_2$  sont repérées par rapport à l'axe d'écoulement perpendiculaire au front de grille (repère lié à la grille) par les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

La grille est définie par 3 paramètres géométriques principaux :

$\gamma$  : l'angle de calage des profils donnant lieu à une première relation géométrique :

$$\boxed{\gamma = \alpha_1 - i} \quad (36)$$

$\sigma$  : serrage des profils, rapport entre la corde et le pas :

$$\sigma = \frac{1}{t} \quad (37)$$

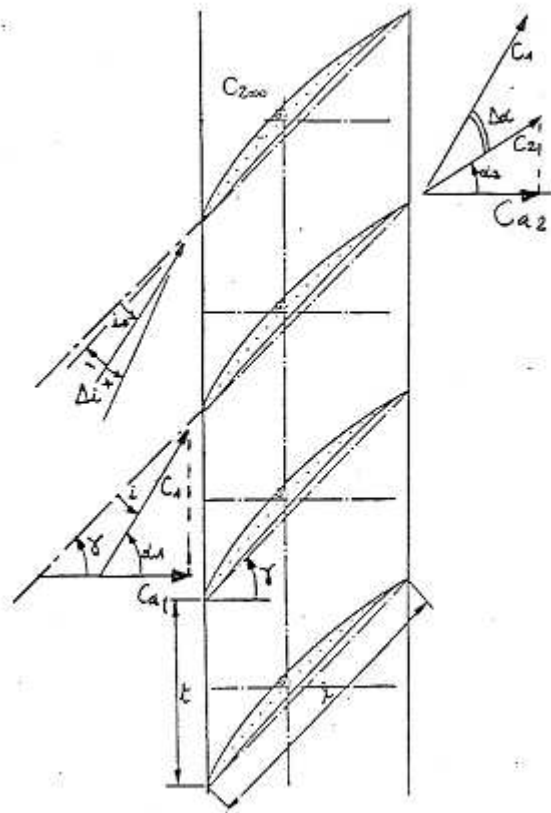
$C_{z\infty 0}$  : identifie les profils mis en grille

Sous l'effet de ces paramètres géométriques, l'écoulement subit en bloc une déflexion ou déviation caractérisée par :

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \quad (38)$$

déflexion qui, dans le cas d'une grille mobile, est à l'origine du travail moteur échangé entre la grille et le fluide.

A l'inverse du profil isolé, ce ne sont plus les efforts aérodynamiques qui importent, mais plutôt la déflexion.



$$\gamma = \alpha_1 - i$$

$$\sigma = \frac{1}{t}$$

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

**Figure 7** : Définitions générales concernant la grille plane

## 2.2 – Considérations cinématiques

Pour cette grille l'équation de continuité s'écrit :

$$qm_1 = qm_2$$

$$\rho_1 qv_1 = \rho_2 qv_2$$

En fluide incompressible ( $\rho_1 = \rho_2$ ),

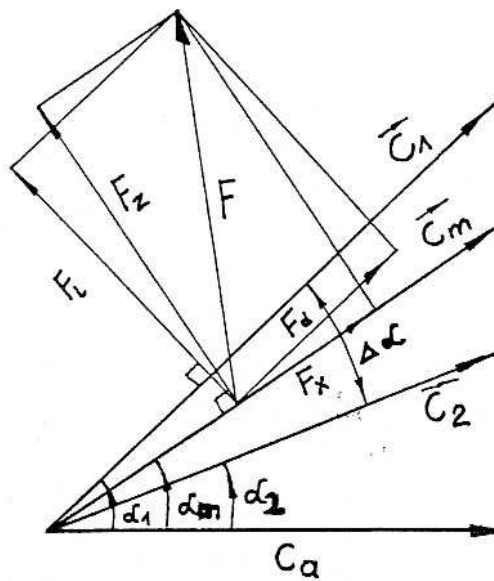
$$S_1 C_1 \cos \alpha_1 = S_2 C_2 \cos \alpha_2$$

Et pour une envergure de profil uniforme ( $S_1 = S_2$ ),

$$Ca_1 = Ca_2 = Ca \tag{39}$$

Ca : projection axiale des vitesses ou encore vitesse débitante.

Cette projection axiale commune donne lieu aux triangles de vitesses de la grille (fig.8) :



**Figure 8 :** Triangles des vitesses et efforts aérodynamiques

A partir de ces triangles de vitesses, sont définis l'angle moyen  $\alpha_m$  et la vitesse moyenne donnée par la relation vectorielle :

$$\vec{C}_m = \frac{\vec{C}_1 + \vec{C}_2}{2}$$

conduisant à la définition de  $\alpha_m$  :

$$\boxed{\text{tg } \alpha_m = \frac{\text{tg } \alpha_1 + \text{tg } \alpha_2}{2}} \quad (40)$$

### 2.3. Performances aérodynamiques

Pour les profils en grille, la direction moyenne sert au repérage des efforts aérodynamiques  $F_z$  et  $F_x$ , contrairement à l'aubage isolé où ils sont repérés par rapport à la direction de la vitesse incidente.

Cependant, pour des raisons pratiques, lors des essais en soufflerie, les efforts sont repérés par rapport à la vitesse d'entrée, ils sont alors notés  $F_l$  et  $F_d$  (lift et drag). Ils permettent de reconstituer la force résultante  $F$  mais n'ont pas de sens physique.

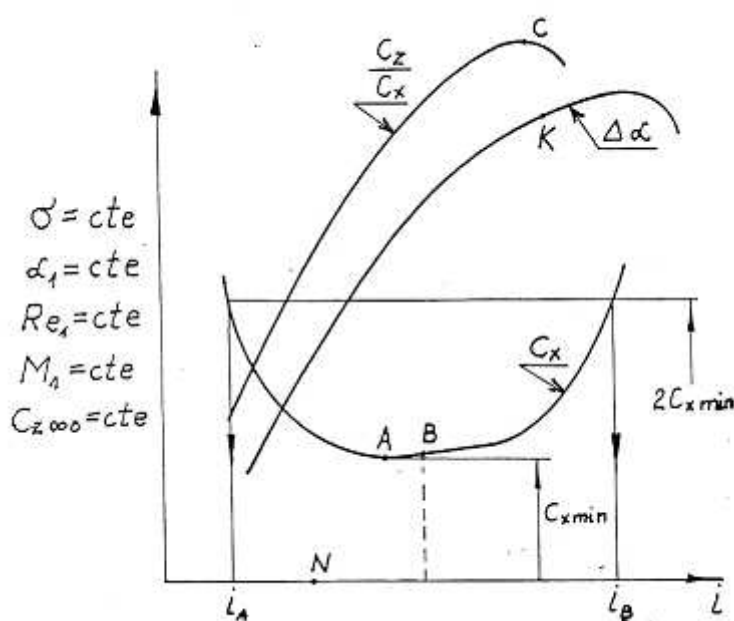
Les essais permettent également la mesure de déflexion  $\Delta\alpha$  (qui en aubage isolé est nulle, sauf au voisinage du profil). A partir de la déflexion, on définit la direction moyenne et dans le repère ainsi construit, la force résultante  $F$  qui se projette en  $F_z$  et  $F_x$  (fig. 8).

**Mode opératoire** : les essais s'effectuent généralement à  $\alpha_1$  et  $\sigma$  constants et l'on relève en fonction de  $i$  (ou de  $\gamma$ ) les performances aérodynamiques, à savoir :

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2, C_z, C_x \text{ et } C_z/C_x$$

Les résultats sont communiqués sous forme graphique (fig.9) pour des conditions particulières d'écoulement : nombre de Reynolds et nombre de Mach.

On considère que ces deux nombres sont sans influence à partir des mêmes limites que celles données pour le profil isolé.



**Figure 9** : Evolution des performances aérodynamiques avec l'angle d'incidence  $i$ .

#### 2.4. Domaine d'utilisation de la grille, angle d'incidence optimal

Le domaine d'utilisation de la grille est défini à partir de la figure 9, c'est la zone allant de  $i_A$  (décollement sur l'intrados du profil) à  $i_B$  (décollement sur l'extrados du profil).

Les valeurs de  $i_A$  et  $i_B$  sont celles correspondant à une perte ( $C_x$ ) égale à deux fois la perte minimale.

Suivant les auteurs (Carter, Keller, Lieblein, Mellor, ...), l'angle d'incidence optimal sera choisi aux points suivants :

- point A : correspondant aux pertes minimales
- point B : situé au milieu de la zone d'opération de  $i_A$  à  $i_B$

- point C : maximum de finesse ( $\epsilon$  minimum)
- point K : correspondant à 80 % de la déflexion maximale
- point N : c'est le critère que nous retiendrons, il correspond à la répartition de pression extradros présentant les plus faibles variations. Ce critère est particulièrement adapté pour les constructions de machines silencieuses et dans le cas particulier des pompes à des machines de forte capacité d'aspiration.

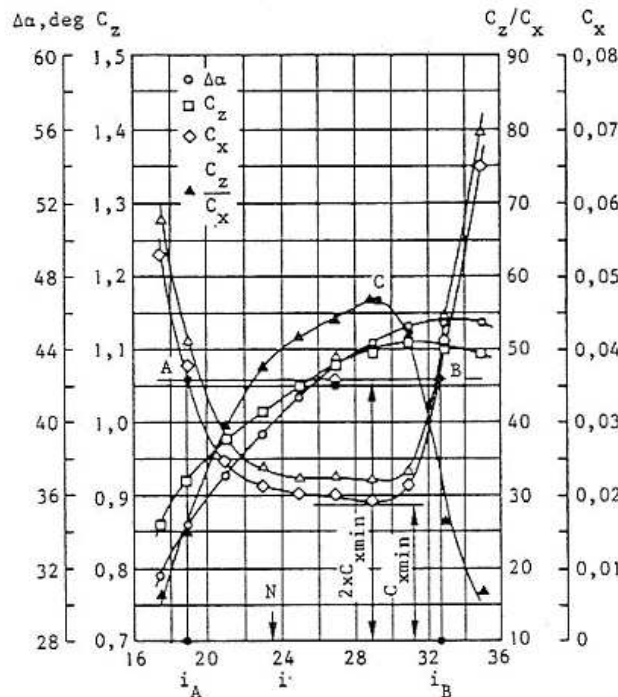
## 2.5. Essais du NACA

Pour permettre une utilisation rationnelle des résultats et des interpolations précises, le nombre de points de mesure doit être important. Citons par exemple le cas du profil NACA 65 – 04 – 10 pour lequel 150 points de mesure ont été réalisés (chaque point de mesure est constitué de 6 informations :  $(\sigma, \alpha_1, i, \alpha_2, F_l, F_d)$ ).

La figure 10 donne une illustration des essais entrepris dans les années 40 et publiés en 1956 (NACA TN 3916).

La nécessité de tels essais longs et coûteux a été motivée par le fait qu'en fluide réel, aucune liaison fonctionnelle n'est établie entre les variables cinématiques et dynamiques.

Sur la base des essais du NACA, les chapitres suivants donnent une première approche théorique puis statistique d'une telle liaison fonctionnelle.



**Figure 10 :** Exemple de résultats d'essais du NACA :  
 Profil 65 – 27 – 10 avec  $\alpha_1 = 45^\circ$  et  $\sigma = 1$

## III - REPRESENTATION UNIVERSELLE DES PROPRIETES CINEMATIQUES DES GRILLES D'AUBES PLANES

### 3.1. – Généralités

La grille d'aubes plane, point de départ des turbomachines axiales a fait l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales. Le but de celles-ci est de donner une solution satisfaisante aux deux problèmes types : le problème direct et le problème inverse.

- **Problème direct :**  
Pour une grille donnée, quel est l'angle de sortie pour un angle d'entrée donné ? C'est le problème qu'on est amené à traiter pour établir la courbe caractéristique prévisionnelle d'une machine existante.
- **Problème inverse :**  
Pour assurer un angle de sortie donné sous un angle d'entrée donné également, quelle est la meilleure grille à utiliser ; c'est-à-dire, quel est le triplet  $(C_{z\infty 0}, \sigma, \gamma)$  le mieux adapté. C'est ce type de problème que doit traiter le constructeur dans le cadre du projet d'une machine.

### 3.2. – Loi en tangentes, relation de Ruden

Si l'on s'intéresse seulement aux propriétés cinématiques de la grille, l'analyse dimensionnelle montre que l'angle de sortie est relié aux autres paramètres par la relation générale :

$$\alpha_2 = f(\alpha_1, \gamma, \sigma, C_{z\infty 0}) \quad (41)$$

où f est la fonction universelle décrite au chapitre 2.5.

La connaissance d'une telle fonction peut remplacer plusieurs centaines de points de mesure ; ainsi, un grand nombre de chercheurs furent longtemps intéressés par l'explicitation de cette fonction f, clé de la généralisation des performances cinématiques.

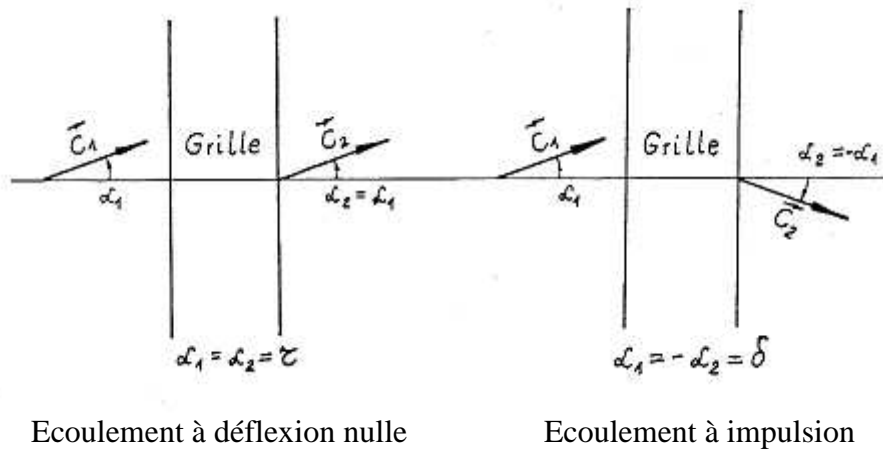
On trouve des traces de cette recherche dans les travaux de Weining, Mellor, Ruden, Baljé et Bidard entre autres.

Nous avons pris, pour notre part, l'initiative de suivre et prolonger la voie tracée par Ruden.

#### Relation de Ruden :

En fluide parfait et incompressible, Ruden a montré qu'un écoulement quelconque peut être obtenu par la combinaison linéaire de deux écoulements particuliers.

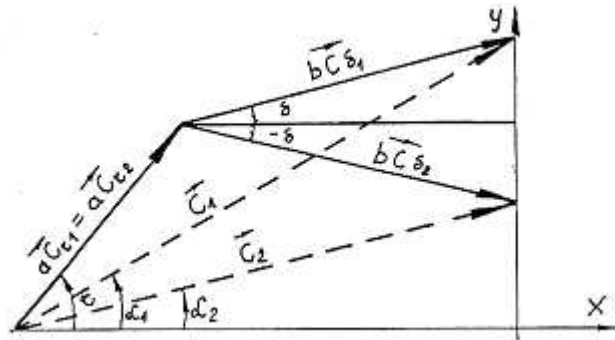
Ces deux écoulements particuliers sont l'écoulement à déflexion nulle (ou portance nulle) et l'écoulement à impulsion définis sur la figure 11.



**Figure 11** : Ecoulements particuliers dans la grille

D'après la loi de Laplace et en s'inspirant de la figure 12, respectant les équations de continuité, les vitesses  $C_1$  et  $C_2$  peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{C}_1 &= a\vec{C}_{\tau 1} + b\vec{C}_{\delta 1} \\ \vec{C}_2 &= a\vec{C}_{\tau 2} + b\vec{C}_{\delta 2} \end{aligned} \quad (42)$$



**Figure 12** : Combinaison linéaire des deux écoulements particuliers.

Par projection de ces deux relations sur les axes  $x$  et  $y$ , on obtient après simplification :

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{2 \operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \tau + \operatorname{tg} \delta} + \frac{\operatorname{tg} \tau - \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \tau + \operatorname{tg} \delta} \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$$

Que l'on peut écrire aussi :

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_2 = A + B \operatorname{tg} \alpha_1} \quad (43)$$

avec : 
$$\operatorname{tg} \tau = \frac{A}{1-B} \quad (44)$$

et : 
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A}{1+B} \quad (45)$$

La relation (43) est la relation de Ruden qui, à partir de (44) s'écrit également :

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = (1 - B) \operatorname{tg} \tau + B \operatorname{tg} \alpha_1 \quad (46)$$

Cette formule (46) est une première approche de la forme de la fonction universelle  $f$ , les paramètres restants  $B$  et  $\tau$  étant, d'après (41), des fonctions des autres variables :

$$B = B(\sigma, \gamma, C_{z\infty 0})$$

$$\tau = \tau(\sigma, \gamma, C_{z\infty 0})$$

### 3.3 – Etude de la fonction B

Les travaux de Weining basés sur la transformation conforme montrent que pour une grille formée de plaques planes ( $C_{z\infty 0} = 0$ ) la fonction  $B$  est sensiblement indépendante de l'angle  $\gamma$  et ne dépend que du serrage  $\sigma$ .

Pour des raisons de simplification, nous retiendrons que cette propriété reste valable pour tous les autres profils ( $C_{z\infty 0} \neq 0$ ) et nous écrirons que  $B$  ne dépend que du serrage :

$$B = B(\sigma) \forall \gamma, C_{z\infty 0} \quad (47)$$

La forme de cette fonction peut être approchée par l'étude de deux cas particuliers limites :

**a) - Aubages isolés :  $\sigma = 0$**

L'aubage isolé ne peut dévier un écoulement plan infini et l'on observe obligatoirement :

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

D'après l'équation (46) ceci est obtenu dans le cas où  $B = 1$ .

On a donc pour  $\sigma = 0 : B = 1$

**b) - Aubages infiniment serrés (cas d'Euler)  $\sigma \rightarrow \infty$**

Du fait du serrage quasi-infini, quel que soit l'angle d'entrée, le fluide sort suivant l'angle imposé par les aubages ; par la même occasion et par définition, cet angle est aussi égal à l'angle de déviation nulle :

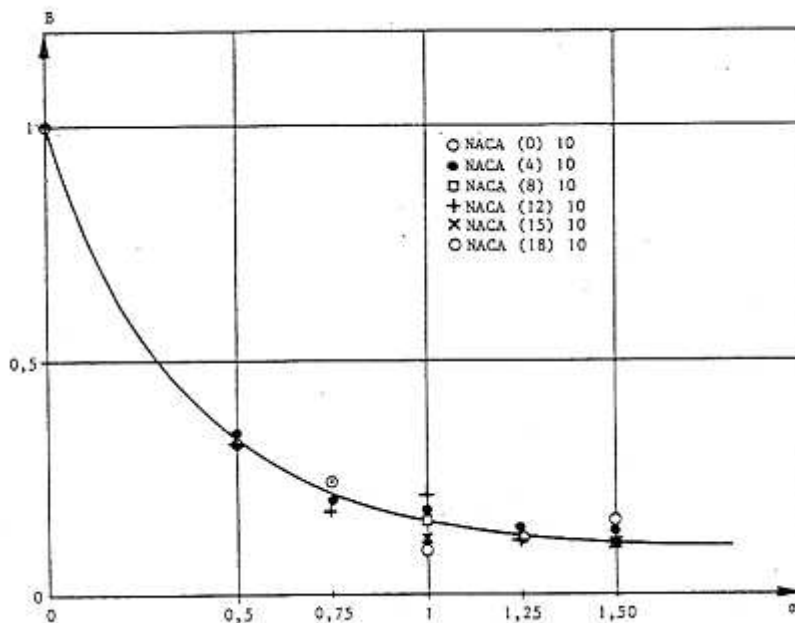
$$\alpha_2 = \tau$$

D'après l'équation (46), cette égalité est obtenue pour  $B = 0$ .

On obtient la deuxième condition aux limites de la fonction  $B$  :

$$\sigma \rightarrow \infty \quad B \rightarrow 0$$

En utilisant les résultats d'essais du NACA établis pour un régime proche de l'écoulement parfait (zone sans décollement allant de  $i_A$  à  $i_B$ ) on peut établir quelques valeurs discrètes de cette fonction (fig.13).



**Figure 13 : Forme de la fonction  $B(\sigma)$**

La figure précédente suggère pour  $B(\sigma)$  une courbe exponentielle du type :

$$B(\sigma) = 1 - \exp\left[-\frac{c}{\sigma^d}\right] \quad (48)$$

Après linéarisation de cette fonction, une régression multipliée entre  $\ln(1-B)$  et  $\sigma$  sur les valeurs issues des résultats d'essais du NACA donne les valeurs de  $c$  et de  $d$  :

$$\begin{aligned} c &= 0,18 \\ d &= 1,30 \end{aligned} \quad (49)$$

### Remarque :

Ces deux valeurs de  $c$  et  $d$  n'ont de sens, en fluide réel, que dans les conditions de Reynolds et de Mach déjà examinées.

L'écoulement réel diffère essentiellement de l'écoulement parfait par la présence de couches limites se développant à la surface des profils et influençant par effet de sillage, l'écoulement aval.

Ainsi donc, pour un nombre de Reynolds suffisamment élevé et à condition de n'avoir aucun décollement, l'écoulement est assimilable à un écoulement parfait.

La figure 14 suivante donne l'influence des nombres de Reynolds et de Mach sur la déflexion d'une grille.

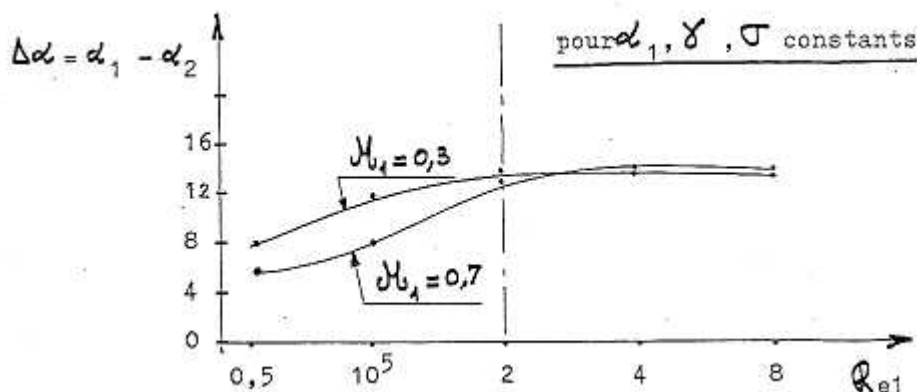


Figure 14 : Influence des nombres de Reynolds et de Mach sur la La d'eflexion.  $\alpha_1$ ,  $\gamma$  et  $\sigma$  sont constants.

### 3.4. – Angle de portance nulle $\tau$

Concernant cet angle  $\tau$  et pour des profils infiniment minces, Wislicenus propose comme direction de portance nulle la direction de la droite CF (C est le point de cambrure maximale et F le bord de fuite) définie sur la figure 15.

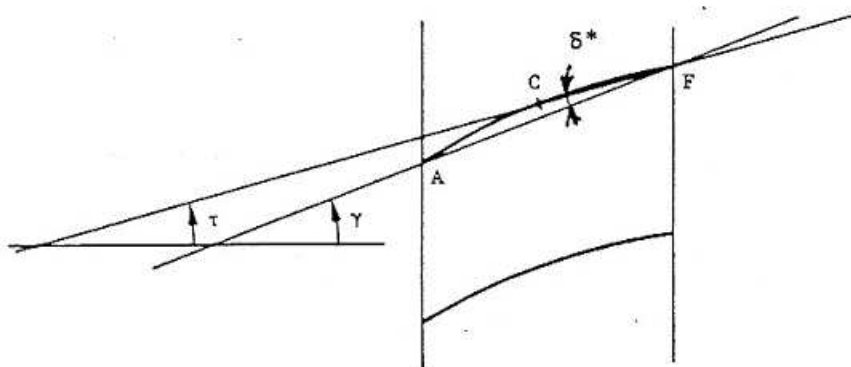


Figure 15 : Définition de l'angle de portance nulle  $\tau$

Cette construction géométrique montre donc que l'angle  $\tau$  ne varie pas lorsque  $\sigma$  varie. On retient également que cette définition reste valable tant qu'il n'y a pas recouvrement des projections axiales des profils, c'est-à-dire tant que le serrage respecte la relation :

$$\sigma \leq \frac{1}{\sin \gamma} \quad (50)$$

La condition (50) étant respectée, l'angle  $\tau$  n'est donc seulement fonction que de  $\gamma$  et  $C_{z \infty 0}$  :

$$\tau = \tau(\gamma, C_{z \infty 0})$$

### Expression approchée de tg $\tau$ :

La figure 15 montre que l'angle  $\tau$  s'exprime simplement en fonction de l'angle de calage  $\gamma$  et de l'angle  $\delta^*$  lié à la cambrure du profil :

$$\tau = \gamma - \delta^* \quad \text{ou} \quad \text{tg } \tau = \text{tg } (\gamma - \delta^*)$$

Pour un angle  $\delta^*$  suffisamment faible, on peut simplifier la relation précédente et retenir comme définition de tg  $\tau$  :

$$\text{tg } \tau = \text{tg } \gamma - \text{tg } \delta^* \quad (51)$$

Avec :  $\text{tg } \delta^* = 2 \frac{h \max}{1}$  ou encore d'après la relation (100) du chapitre C :

$$\text{tg } \delta^* = \frac{2K}{100} \cdot C_{z \infty 0}$$

Dans le cas de forts serrages conduisant au recouvrement, l'angle de portance nulle tend vers la tangente à la ligne moyenne au bord de fuite. L'expression définissant tg  $\tau$  reste valable mais dans ce cas,  $\delta^*$  est défini par :

$$\text{tg } \delta^* = \frac{4K}{100} \cdot C_{z \infty 0}$$

En généralisant la relation (51), on se propose d'adopter la relation :

$$\text{tg } \tau = a \text{tg } \gamma + b \quad (52)$$

Où  $a$  est une constante proche de l'unité et  $b$  une constante négative proportionnelle à la cambrure des profils montés en grille.

Ainsi donc, d'après l'équation (46), la relation de Ruden généralisée s'écrira finalement :

$$\text{tg } \alpha_2 = (1 - B)(a \text{tg } \gamma + b) + B \text{tg } \alpha_1 \quad (53)$$

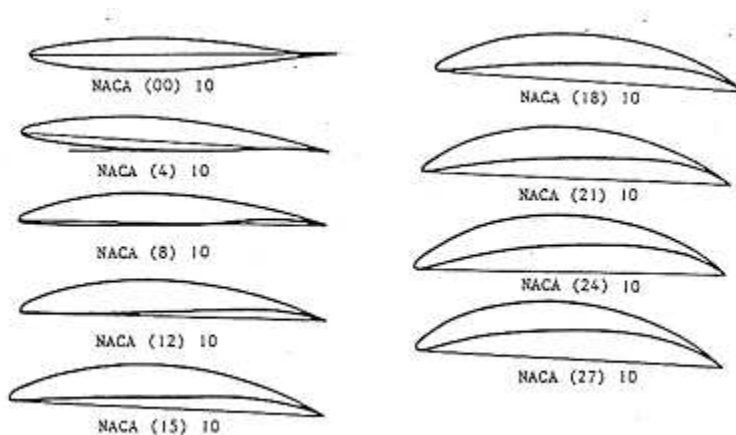
Cette forme est celle que nous retiendrons pour la fonction universelle  $f$  (relation 41).

Elle décrit le comportement cinématique global d'une grille lorsque les constantes  $a$  et  $b$  sont définies.

Dans le cas contraire, **deux essais** seulement, à  $\sigma$  constant, suffisent à déterminer  $a$  et  $b$ .

### 3.5. – Justifications expérimentales

Les diverses formes numériques retenues pour  $B$  et  $\text{tg } \tau$  sont justifiées à partir de l'analyse des résultats d'essais du NACA (TN 3916) pour la série 65 d'épaisseur relative 10% (fig. 16).



**Figure 16** : Les différents profils NACA 65 – 10 %

La relation (53) et les résultats d'essais sont utilisés pour calculer  $a$  et  $b$ . Ce calcul est effectué par la méthode des moindres carrés.

Ces valeurs étant obtenues, on compare ensuite les valeurs de  $\alpha_{2C}$  (calculé) et  $\alpha_{2M}$  (mesuré).

A titre d'exemple, le tableau 1 donne l'écart  $E$  entre  $\alpha_{2C}$  et  $\alpha_{2M}$ . Les points retenus pour cette comparaison sont ceux situés dans la zone d'opération allant de  $i_A$  à  $i_B$ .

L'écart type constaté est du même ordre de grandeur que l'erreur de mesure en soufflerie.

$\sigma = 0,50$	
$\gamma$ degrés	E degrés
33,60	-0,12
35,50	0,06
37,30	-0,19
38,00	-0,44
39,20	-0,17
41,20	-0,45
43,00	-0,64
50,30	-0,14
52,00	-0,06
52,20	0,15
54,00	0,03
56,00	-0,12
57,90	0,08

$\sigma = 0,75$	
$\gamma$ degrés	E degrés
30,00	-0,24
31,00	-0,17
33,00	-0,02
35,00	-0,35
36,90	-0,64
38,00	-0,47
38,70	-0,80
40,80	-0,80
42,90	-0,48
47,60	-0,20
50,70	-0,33
52,00	-0,36
53,90	-0,52
55,90	-0,47
57,80	-0,47

$\sigma = 1$	
$\gamma$ degrés	E degrés
15,00	0,21
18,00	0,24
21,00	0,18
22,00	0,17
22,70	0,29
24,00	0,05
27,00	-0,14
30,00	-0,02
30,00	0,25
31,00	0,41
34,00	0,62
36,00	-0,42
38,00	0,63
40,00	1,11
44,00	0,71
45,00	-0,63
48,00	0,41
50,00	0,86
52,00	0,43
54,00	0,63
56,00	0,75
59,00	0,67
57,50	-0,14
59,50	0,47
61,50	0,63
63,50	0,41
65,50	0,63
67,50	0,80
69,50	20

$\sigma = 1,25$	
$\gamma$ degrés	E degrés
14,00	-0,15
15,00	-0,23
17,00	-0,38
22,00	-0,14
20,00	-0,10
30,00	-0,76
30,00	0,40
32,00	0,54
34,00	0,09
36,00	0,24
38,00	0,01
40,00	0,29
42,00	0,38
44,00	0,28
47,00	0,47
49,80	0,65
52,00	0,61
53,00	-0,78
57,00	0,25
56,00	-0,76
58,00	-0,23
60,00	-0,17
62,00	-0,38
64,00	-0,17
66,00	-0,23
68,00	-0,16

$\sigma = 1,50$	
$\gamma$ degrés	E degrés
15,00	0,01
18,00	-0,02
21,00	-0,04
22,00	-0,07
23,00	-0,30
26,00	-0,49
29,00	-0,14
30,00	-0,06
32,00	-0,18
29,00	0,59
30,00	0,65
32,00	0,76
35,00	0,84
37,00	0,77
38,00	0,84
39,00	0,41
42,00	0,74
45,00	0,98
47,00	0,09
49,00	0,24
51,00	0,80
54,00	0,01
56,0	-1,01
58,00	-1,07
60,00	-0,92
62,00	-0,55
64,00	-0,97

$\sigma = 1$	
$\gamma$ degrés	E degrés
15,00	0,21
18,00	0,24
21,00	0,18
22,00	0,17
22,70	0,29
24,00	0,05
27,00	-0,14
30,00	-0,02
30,00	0,25
31,00	0,41
34,00	0,62
36,00	-0,42
38,00	0,63
40,00	1,11
44,00	0,71
45,00	-0,63
48,00	0,41
50,00	0,86
52,00	0,43
54,00	0,63
56,00	0,75
59,00	0,67
57,50	-0,14
59,50	0,47
61,50	0,63
63,50	0,41
65,50	0,63
67,50	0,80
69,50	20

Pour l'ensemble des points	
a	= 1,032455
b	= -0,1005934
Ecart type = 0,498	

**TABLEAU 1** : Ecart E constatés entre  $\alpha_{2M}$  et  $\alpha_{2C}$  pour le profil NACA 65-04-10.

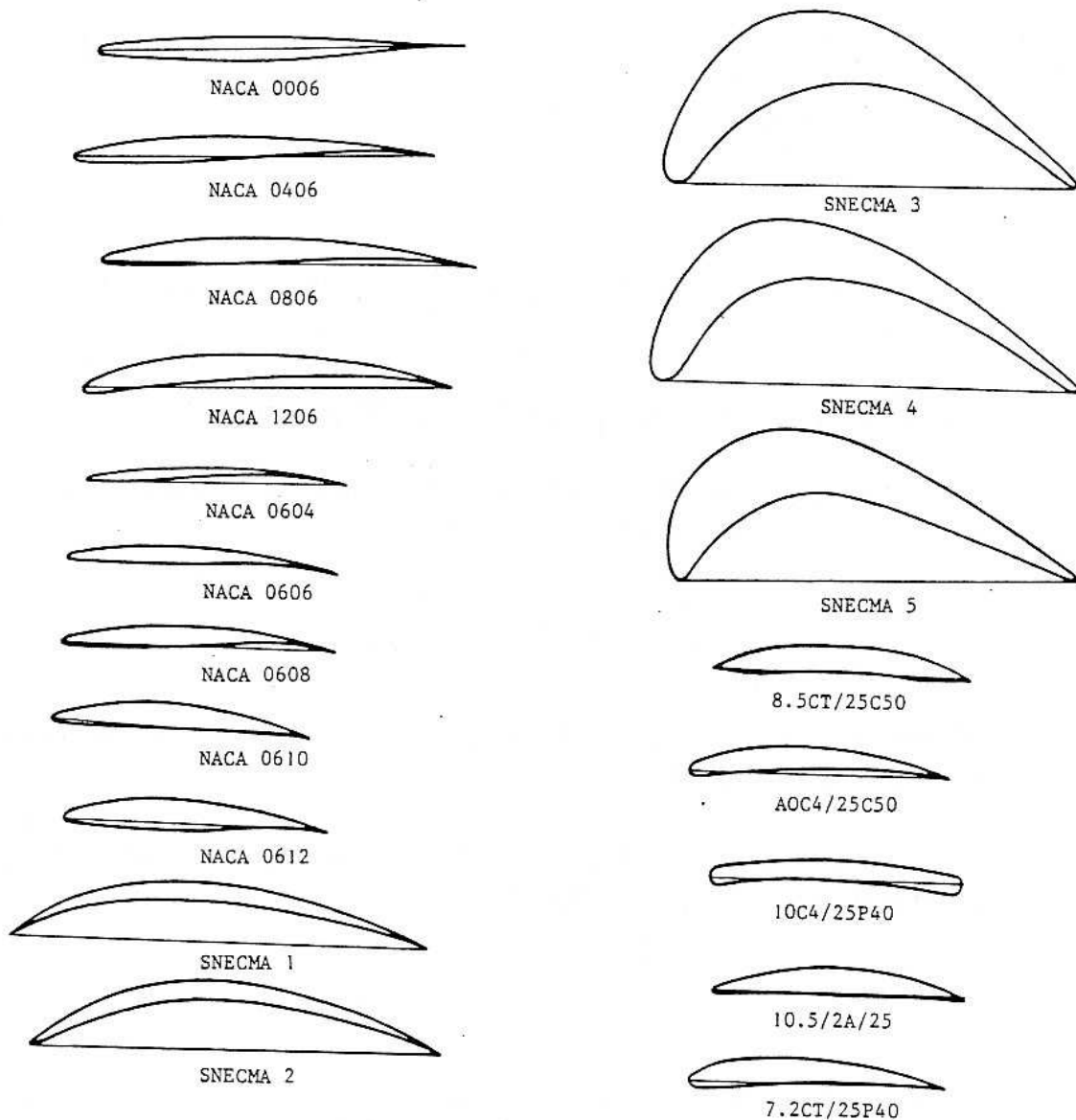
Le tableau 2 donne les résultats obtenus pour l'ensemble des essais disponibles et donne les valeurs de a et b correspondant à chaque profil. On peut noter que a et b évoluent globalement suivant les tendances décrites au paragraphe précédent.

Aubage	Nombre de points de mesure	a	b	Ecart type sur E (degrés)
NACA 65- (0) 10	33	1,2208	-0,12895	0,668
NACA 65- (4) 10	110	1,0324	-0,10059	0,498
NACA 65- (8) 10	54	0,9308	-0,14083	0,460
NACA 65-(12) 10	97	0,8958	-0,20418	0,555
NACA 65-(15) 10	40	0,8930	-0,28152	0,676
NACA 65-(18) 10	78	0,9210	-0,33506	0,685
NACA 65-(21) 10	17	0,9309	-0,38832	0,316
NACA 65-(24) 10	16	1,0783	-0,49282	0,388
NACA 65-(27) 10	6	0,8134	-0,41424	0,393
NACA 6 - (0) 06	9	0,8988	0,5484	0,455
ACA 6 - (4) 06	33	0,8065	0,1734	0,639
NACA 65- (8) 06	31	0,6637	0,1683	0,653
NACA 65-(12) 06	22	0,7004	-0,0203	0,637

**TABLEAU 2 :**

Ecarts type constatés pour différents types de profils NACA 65

Ces principes sont ensuite appliqués sur d'autres profils disponibles en vue de vérifier leur universalité. La figure 17 donne l'allure de ces profils.



**Figure 17 : Différents profils étudiés**

Le tableau 3 donne l'ensemble des comparaisons effectuées et l'écart-type final sur les 664 points de mesure pris en compte.

Au seuil de 95 % de probabilité, la précision de la fonction  $f$  est donc donnée par :

$$E = \pm 1^\circ$$

Aubages	Nombre de points de mesure	Ecart type sur $\epsilon$
Profils épais NACA 65	451	0,5337
Profils minces NACA 65	95	0,6280
Profils divers NACA	53	0,6072
Profils SNECMA	42	0,5799
Autres profils	23	0,5612
Ensemble	664	0,558

**TABLEAU 3** : Ecarts-type obtenus à partir des différentes sources

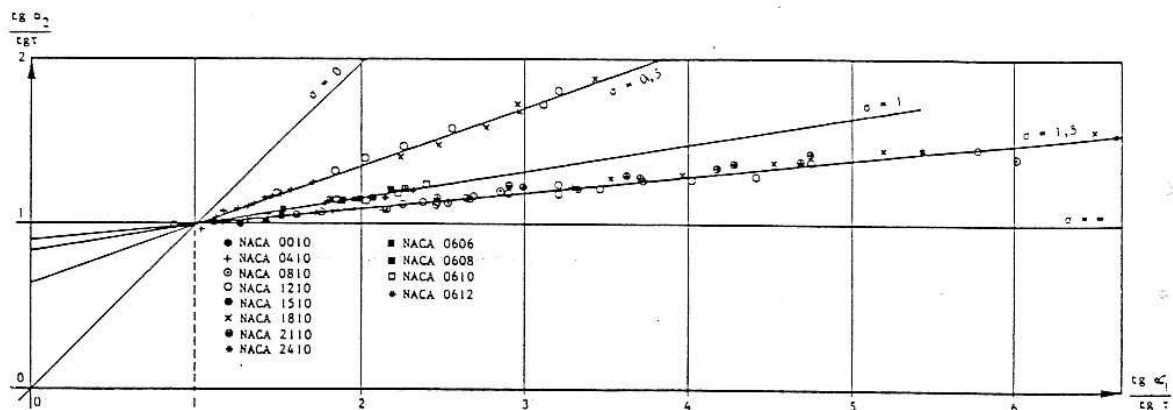
### 3.6. – Représentation universelle des propriétés cinématiques

La fonction B étant universelle et indépendante de la forme des aubages, la relation (46) est l'équation d'un réseau décrit par :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \tau} = (1 - B) + B \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \tau} \quad (54)$$

Ce faisceau de droite passe par le point (1-1) et sa pente est donnée directement par le serrage  $\sigma$ .

C'est ce qui illustre la figure 18 où sont reportés les résultats d'un grand nombre d'essais d'origine diverses.



*Figure 18 : Représentation universelle*

## IV - FONCTIONNEMENT NOMINAL D'UNE GRILLE, EVALUATION DES PERTES

### 4.1 – Point de référence de la grille

Le choix de fonctionnement de la grille se situe dans la zone des pertes minima allant de  $i_A$  à  $i_B$ , mais on rencontre suivant les auteurs plusieurs variantes dans ce choix (Ch.2.4).

Nous avons retenu, comme l'a fait le NACA, le point  $i_0$  correspondant à la répartition de pression extrados la plus continue possible.

Ce point est déterminé au cours des essais en soufflerie, il évolue en fonction de la géométrie de la grille et particulièrement avec la cambrure  $C_{z\infty 0}$  et le serrage  $\sigma$  (fig. 19).

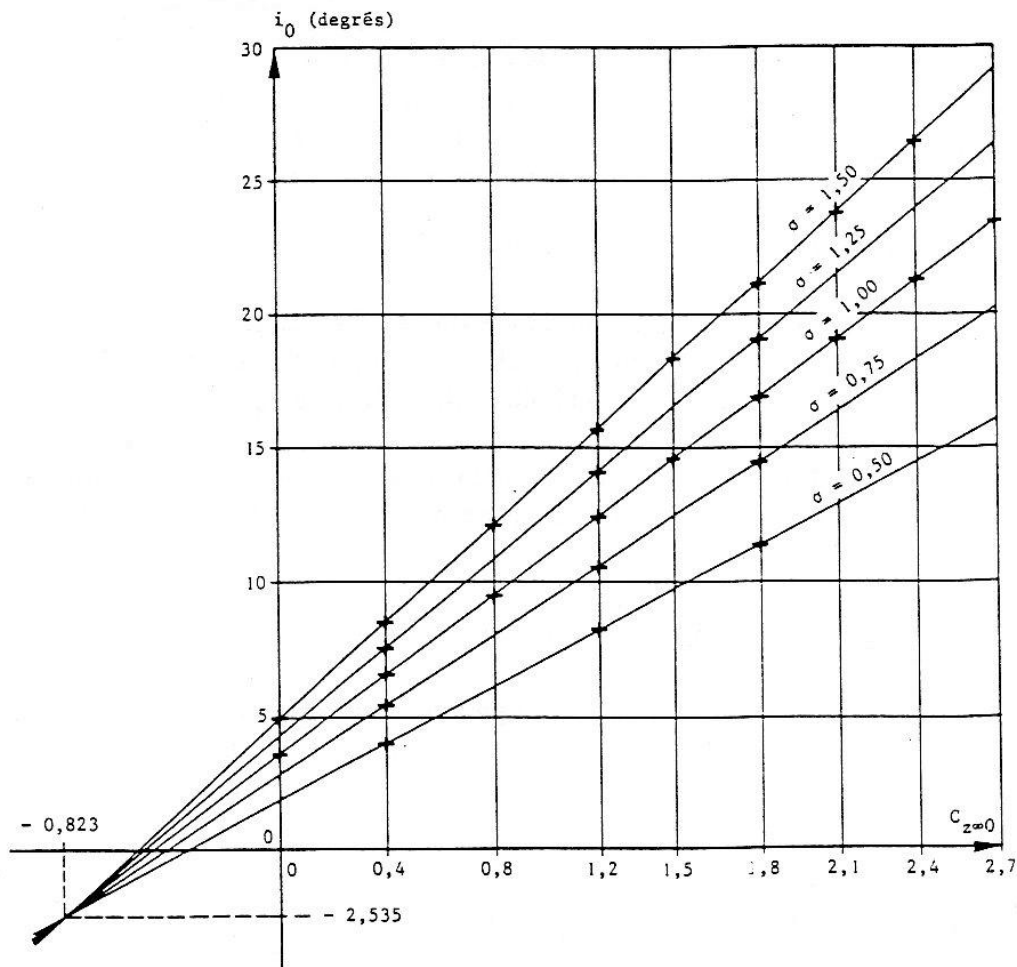


Figure 19 : Evolution du point nominal avec la géométrie de la grille.

L'incidence de référence évolue suivant un faisceau de droites passant par le point  $(-0,823 ; -2,535)$  et dont la pente  $p$  ( $\sigma$ ) dépend seulement de  $\sigma$ .

L'équation du faisceau est donnée par (55) avec  $i_0$  en degrés :

$$\begin{array}{l} i_0 = - 2,525 + p(\sigma) [C_{z \rightarrow 0} + 0,823] \\ \text{avec } p(\sigma) = 15,535 - 12,467 e^{-0,4242 \sigma} \end{array} \quad (55)$$

Pour 78 cas de grilles NACA (65) de 10% d'épaisseur relative, l'écart type sur  $i_0$  est de 0,12 degrés.

Toujours par des considérations statistiques, on peut établir une corrélation simple pour calculer la déflexion au point nominal :

$$\begin{array}{l} \Delta\alpha_0 = - 0,94 + q(\alpha_1) (i_0 - 2,07) \\ q(\alpha_1) = 2,103 - 4,019 \cdot 10^{-7} (\alpha_1)^{3,382} \end{array} \quad (56)$$

Avec  $\alpha_1$ ,  $i_0$  et  $\Delta\alpha_0$  en degrés.

Cette relation donne un écart type de 0,68 degrés et peut être comparée à la relation (46) ; néanmoins, elle n'est utilisable qu'au point  $i_0$  alors que (46) est valable sur toute l'étendue allant de  $i_A$  à  $i_B$ .

L'emploi simultané de ces deux relations est malgré tout intéressante puisqu'elle conduira à la détermination des deux coefficients a et b définis en 3.4.

## 4.2. – Détermination des pertes

Par analogie avec l'hydraulique, on peut suggérer des pertes de grille de la forme :

$$C_d = C_{do} + C_{dc} \quad (57)$$

$C_d$  étant le drag coefficient défini par rapport à la vitesse d'entrée :

$$C_d = \frac{F_x}{\rho 1b \frac{C_1^2}{2}} \quad (58)$$

Alors que  $C_x$  est lui, défini par rapport à la vitesse moyenne :

$$C_x = \frac{F_x}{\rho 1b \frac{C_m^2}{2}} \quad (59)$$

Les résultats expérimentaux disponibles se référant à  $C_d$ , c'est lui qui servira de base à l'établissement des lois de pertes.

Dans la relation (57),  $C_{do}$  et  $C_{dc}$  sont représentatifs des différentes pertes :

- $C_{do}$  perte par frottement à l'incidence  $i = i_0$
- $C_{dc}$  : perte par « choc » ou perte de désadaptation.

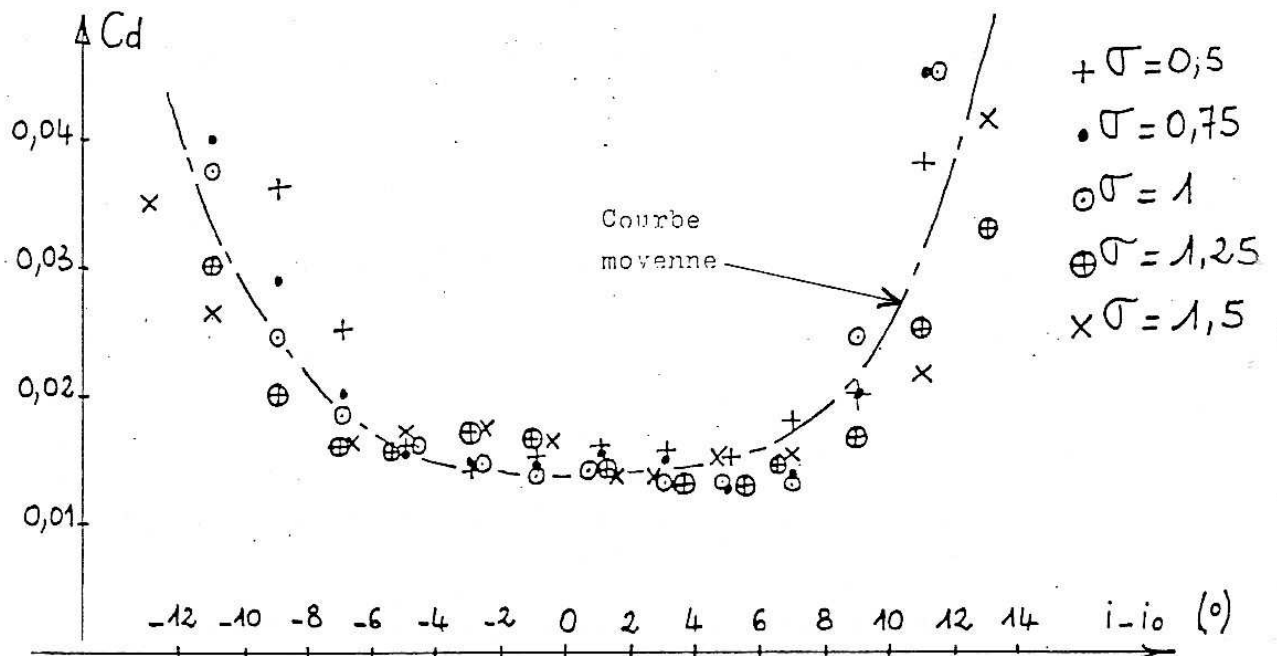
L'analyse des essais du NACA montre que les pertes de frottement ne dépendent sensiblement que de la cambrure :

$$C_{do} = 0,003733 \cdot C_{z\infty 0} + 0,01093 \quad (60)$$

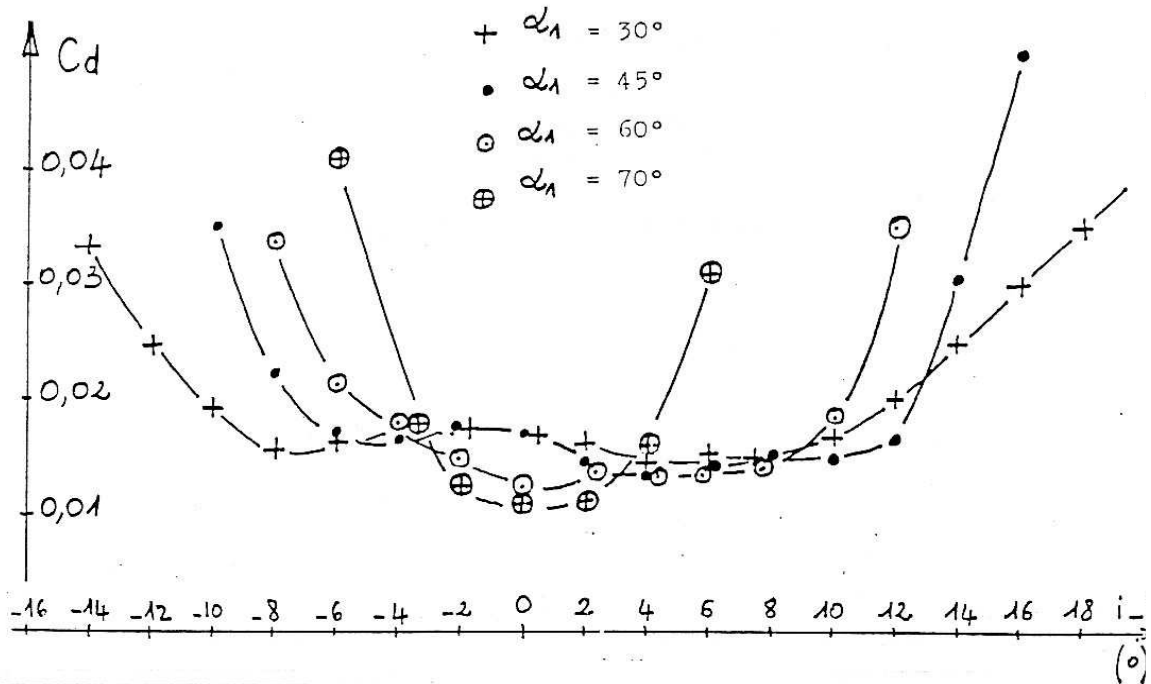
Alors que  $C_{dc}$  peut être modélisé par :

$$C_{dc} = K (i - i_0)^n \quad (61)$$

Où K et n dépendent de  $\alpha_1$  et  $C_{z\infty 0}$  peu du serrage  $\sigma$  (figures 20 et 21).



**Figure 20** : Evolution de  $C_d$  pour  $\alpha_1 = cte$   
On a ici  $C_{z\infty 0} = 1,4$  ;  $\alpha_1 = 45^\circ$



**Figure 21 :** Evolution de  $C_d$  pour  $\sigma = cte$ . On a ici :  $C_{z\infty 0} = 1,4$  ;  $\sigma = 1,5$

Le modèle proposé en (61) fournit pour le coefficient K et l'exposant n les expressions générales (où  $\alpha_1$  est en degrés) :

$$K = -25 \cdot 10^{-6} + (1,91 - 0,4 \cdot C_{z\infty 0}^{1,4}) (\alpha_1 + 21) \cdot 10^{-6} \quad (62)$$

$$n = 2 + \alpha_1 [0,46 + 0,0339 \cdot \exp(1,953 \cdot C_{z\infty 0})] 10^{-2} \quad (63)$$

● **Zone d'opération de la grille :**

Les relations (57) et (61) peuvent être utilisées pour préciser la zone d'opération de la grille ; à savoir l'intervalle  $i_A, i_B$ .

Les angles  $i_A$  et  $i_B$  sont définis comme l'incidence pour laquelle la perte atteint le double de sa valeur minimale (fig.9).

On aura ainsi :

$$2 C_{do} = C_{do} + K |i - i_o|^n$$

D'où les valeurs de  $i_A$  et  $i_B$ :

$$i_A = i_o - \left[ \frac{C_{do}}{K} \right]^{1/n} \quad (64)$$

$$i_B = i_o + \left[ \frac{C_{do}}{K} \right]^{1/n} \quad (65)$$

● Coefficient de traînée  $C_x$  :

Les relations (58) et (59) conduisent à la valeur de  $C_x$  :

$$C_x = C_d \left[ \frac{\cos \alpha_m}{\cos \alpha_1} \right]^2 \quad (66)$$

● Coefficient de portance  $C_z$  :

Le coefficient de portance  $C_z$  se calcule en fonction des données géométriques et cinématiques par application du théorème des quantités de mouvement sur l'espace fluide ABCD d'envergure  $b$  et de pas  $t$  (fig.22).

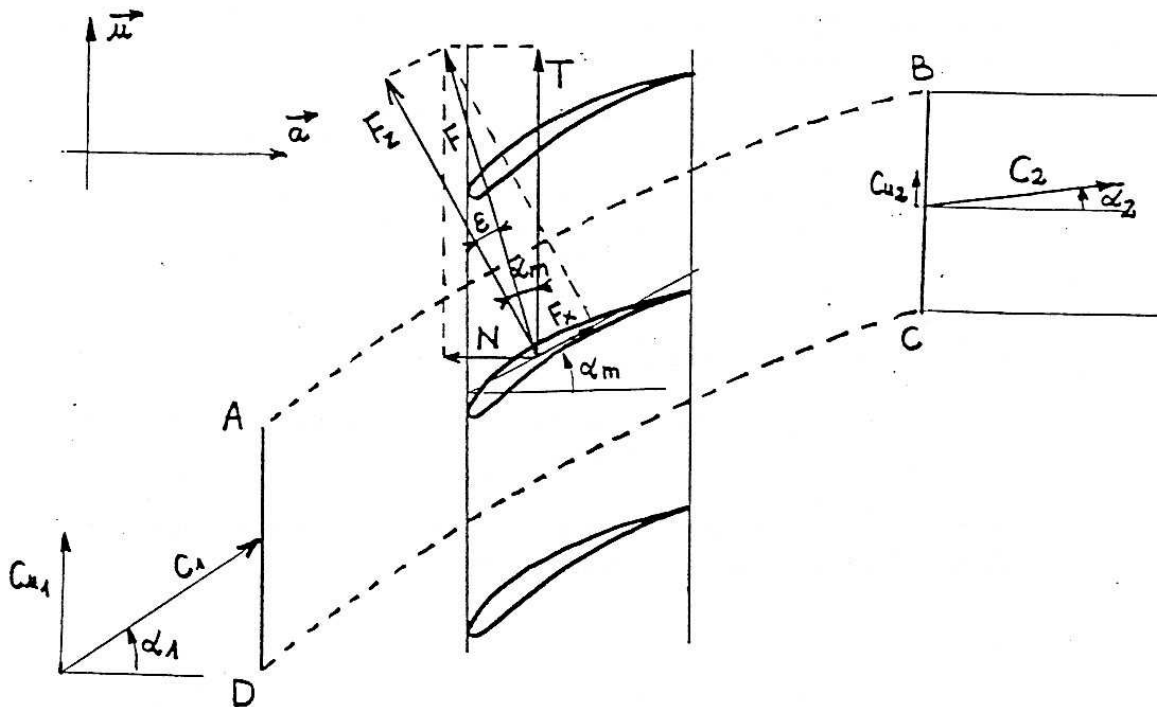


Figure 22 : Définition de l'espace fluide étudié

Ce théorème s'écrit ainsi :

$$\rho q_v \left( \vec{C}_2 - \vec{C}_1 \right) = - \vec{F} + p_1 S_1 - p_2 S_2$$

Cette relation vectorielle projetée sur les axes  $\vec{u}$  et  $\vec{a}$  donne les équations (67) et (68) :

$$\rho q_v (C_{u2} - C_{u1}) = - T = - \frac{F_z}{\cos \epsilon} \cos (\alpha_m - \epsilon) \quad (67)$$

$$\rho q_v (C_{a2} - C_{a1}) = O = -N + p_1 S_1 - p_2 S_2 \quad (68)$$

D'après les triangles de vitesse, la relation (67) peut se mettre sous la forme

$$\rho C_a^2 \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = -\frac{F_z}{\cos \varepsilon} \cos(\alpha_m - \varepsilon)$$

Et d'après la définition de  $C_z$  :

$$\rho C_a^2 \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = -\frac{C_z \rho 1b}{\cos \varepsilon} \frac{C_m^2}{2} \cos(\alpha_m - \varepsilon)$$

Donnant après simplification, la valeur de  $C_z$  :

$$C_z = 2 \frac{\cos \varepsilon}{\sigma} \frac{\cos^2 \alpha_m}{\cos(\alpha_m - \varepsilon)} (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) \quad (69)$$

Lorsque  $\varepsilon$  est négligeable devant  $\alpha_m$ , on peut retenir l'expression simplifiée :

$$C_z = \frac{2}{\sigma} \cos \alpha_m (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) \quad (70)$$

Relation identique à celle obtenue grâce au théorème de Joukovski (relation 19).

#### ● Angle de perte $\varepsilon$ :

Comme il a été indiqué aux chapitres précédents, l'angle de perte se calcule facilement par la relation de définition :

$$\tan \varepsilon = \frac{C_x}{C_z} \quad (71)$$

Utilisant les équations (66) et (69) ou (70).

### **4.3. – Limites d'utilisation. Exemple d'application en problème direct**

Les relations de déflexions et de pertes examinées jusqu'ici ont été validées à partir des essais du NACA ( NACA TN 3916 ), leur domaine d'utilisation est donc soumis aux mêmes limites que celles des essais :

$$0,5 \leq \sigma \leq 1,5$$

$$0 \leq C_{z\infty 0} \leq 2,7$$

$$30 \leq \alpha_1 \leq 70^\circ$$

$$Re_1 \geq 250\,000$$

$$M_1 \leq 0,6$$

### Exemple d'application :

On s'intéresse à résoudre ici le problème direct pour une grille formée de profils NACA 65-12-10.

Les aubages sont calés suivant  $\gamma = 30^\circ$  et forment un serrage  $\sigma = 1$ .

- 1) – Quelle est la déflexion de la grille pour  $\alpha_1 = 45^\circ$  ?
- 2) – Quel est l'angle d'incidence idéal et la déflexion dans ce cas ?  
Calculer  $\varepsilon$ .

#### 1 – On utilise la relation de Ruden généralisée (53) :

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = (1 - B) (a \operatorname{tg} \gamma + b) + B \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$$

avec :

$$B = 1 - \exp \left[ - \frac{0,18}{1^{1,30}} \right] = 0,1647 \quad (48)$$

Le tableau 2 donne les valeurs de a et b pour  $C_{z \infty 0} = 1,2$  :

$$\begin{aligned} a &= 0,8958 \\ b &= -0,2042 \end{aligned}$$

d'où :  $\operatorname{tg} \alpha_2 = 0,426$  et  $\alpha_2 = 23^\circ$

On obtient la déflexion :

$$\Delta \alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 45 - 23 = 22^\circ$$

#### 2 – L'angle d'incidence idéal est calculé par la relation (55)

$$i_0 = -2,525 + p(\sigma) [C_{z \infty 0} + 0,823]$$

avec :  $p(\sigma) = 15,535 - 12,467 e^{-0,4242} = 7,368$

d'où :  $i_0 = 12,36^\circ$

La relation géométrique principale (36) fournit la valeur de l'angle d'entrée optimal :

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= \gamma + i_0 \\ \alpha_{10} &= 30 + 12,36 = 42,36^\circ \end{aligned} \quad (36)$$

La relation de Ruden fournit encore la valeur de  $\alpha_{20}$  :

$$\alpha_{20} = 22,37^\circ$$

Soit :  $\Delta \alpha_o = \alpha_{10} - \alpha_{20} = 19,99^\circ$

La déflexion nominale est également calculable par la relation (56) qui donne :

$$\Delta \alpha_o = 19,38^\circ$$

#### **Calcul des pertes au point nominal :**

$$C_d = C_{do} = 0,0154 \quad (60)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}{2} \text{ d'où } \alpha_m = 33,49^\circ \quad (40)$$

$$C_x = 0,0196 \quad (66)$$

$$C_z = 0,8344 \quad (70)$$

$$\varepsilon = 1,34^\circ \quad (71)$$

Pour fixer les idées, signalons que chaque augmentation de  $1^\circ$  de l'angle de perte  $\varepsilon$  se traduit par une chute de rendement de 3 à 4 % pour la machine réelle.

#### **4.4. – Résolution du problème inverse. Facteur de diffusion**

Le problème inverse se présente ainsi :

Pour un angle d'entrée  $\alpha_1$  donné et désirant obtenir une déflexion  $\Delta \alpha$  donnée également, quelle est la meilleure grille à utiliser, à savoir quel est le triplet  $(C_{z \infty 0} ; \sigma ; \gamma)$  le mieux adapté.

Les relations disponibles jusqu'ici sont en nombre insuffisant pour résoudre le problème :

. La "meilleure grille" fonctionnant obligatoirement à son point optimal, la relation (56) est utilisable et donne la valeur de  $i_o$  :

$$\Delta \alpha_o = f(\alpha_1, i_o) \rightarrow i_o$$

. La relation géométrique angulaire donne  $\gamma$  :

$$\gamma = \alpha_1 - i_o$$

Mais il existe seulement une relation – la relation (55) – pour déterminer les 2 autres inconnues  $\sigma$  et  $C_{z \infty 0}$  :

$$i_o = g(\sigma, C_{z \infty 0})$$

La résolution peut se mener de manière paramétrique en s'imposant diverses valeurs de  $C_{z \infty 0}$ , on obtient alors une infinité de grilles travaillant toutes à leur point nominal, l'analyse des pertes permettra éventuellement de retenir la plus intéressante.

Examinons cette résolution sous la forme d'un exemple numérique :

Soit à définir une grille devant assurer une déflexion de  $20^\circ$  sous un angle d'entrée de  $45^\circ$ .

La relation (56) donne la valeur de  $i_0$  :

$$i_0 = 12,83^\circ$$

$$\gamma = 45 - 12,83 = 32,17^\circ$$

On peut ensuite dresser le tableau numérique suivant :

$C_{z\infty 0}$	$p(\sigma)$	$\sigma$	$C_z$	$C_d$	$C_x$	$\varepsilon$
0,4	12,57	3,38	0,255	0,0120	0,0156	3,50
0,8	9,47	1,70	0,506	0,0140	0,0182	2,06
1,2	7,60	1,06	0,812	0,0154	0,0200	1,42
1,5	6,62	0,79	1,09	0,0165	0,02146	1,13
1,8	5,86	0,60	1,43	0,0176	0,0229	0,92
2,1	5,26	0,46	1,87	0,0187	0,0243	0,74

Compte tenu des limites imposées à  $\sigma$ , 3 grilles seulement sont utilisables :

$$C_{z\infty 0} = 1,2 ; 1,5 \text{ et } 1,8$$

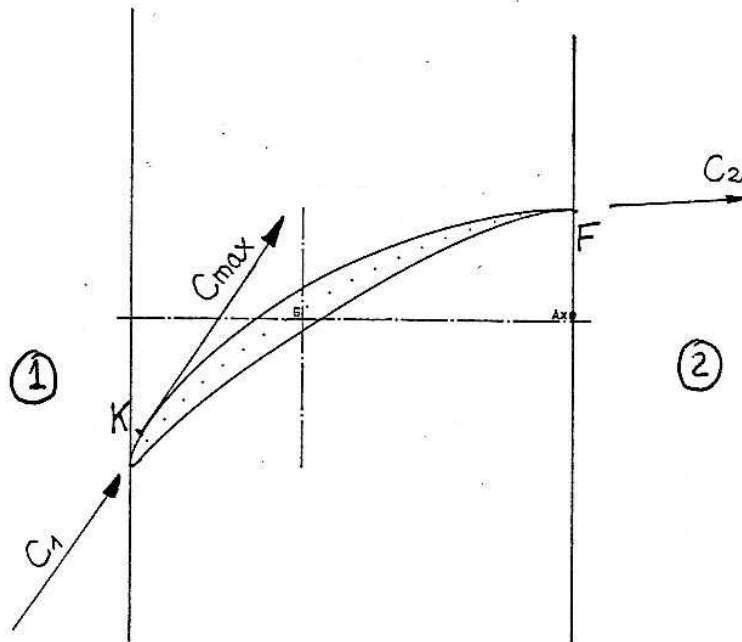
Si l'on compare les pertes  $\varepsilon$ , c'est la dernière qui est la plus intéressante bien que toutes les grilles présentées travaillent à leur point nominal.

Cette méthode paramétrique reste intéressante, mais sa lourdeur conduit à traiter le problème autrement en introduisant le facteur de diffusion.

### ● Facteur de diffusion :

Le facteur de diffusion a été défini par Lieblein. Il traduit un compromis entre les pertes de frottement et le sillage des aubages.

Au cours de l'écoulement à l'extrados du profil, la vitesse locale passe de  $\vec{C}_1$  à  $\vec{C}_2$  en présentant au voisinage de l'entrée (point K) une vitesse maximale  $\vec{C}_{\max}$  (fig.23).



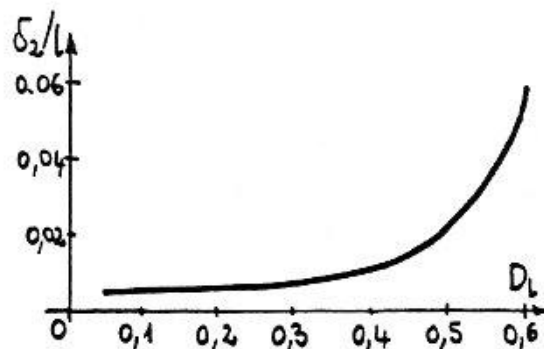
**Figure 23 :** Localisation de la vitesse maximale

Sur la ligne de courant entre K et le bord de fuite F, on observe une diffusion (ou ralentissement) dont l'intensité est décrite par le facteur de diffusion local  $D_1$  :

$$D_1 = \frac{C_{\max} - C_2}{C_{\max}} \quad (72)$$

Plus la diffusion est grande, plus l'épaisseur de la couche limite développée sur l'extrados sera importante et plus le sillage se détachant dans l'écoulement aval sera large.

En s'intéressant à l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite  $\delta_2$  en fonction de  $D_1$ , Lieblein a montré que quel que soit le profil utilisé, celle-ci évolue suivant la figure 24.



**Figure 24 :** Evolution de l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite au point F en fonction de  $D_1$

A partir de 0,5 l'épaisseur  $\delta_2$  s'accroît rapidement et va générer dans l'écoulement aval une perte supplémentaire, appelée perte de sillage. Au voisinage de  $D_1=0$ , seules les pertes de frottement déjà examinées subsistent.

Ainsi, si l'on décrit en fonction de  $D_1$  l'évolution des pertes totales  $\vec{\omega}$  de l'écoulement, on notera la présence d'un minimum au voisinage de 0,5 (fig. 25).

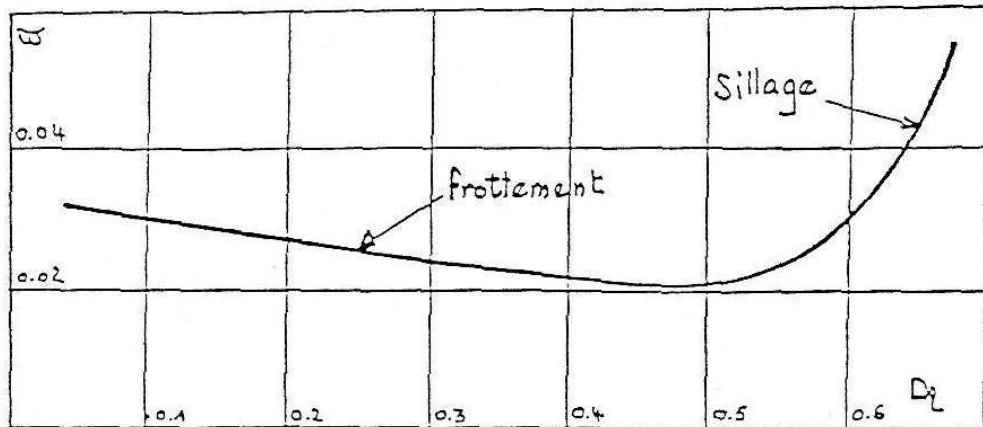


Figure 25 : Evolution des pertes totales avec le facteur  $D_1$ .

C'est en ce point que se trouve la "meilleure grille" déjà citée. Le facteur de diffusion local est d'un emploi difficile, puisqu'il fait appel à une donnée interne de l'écoulement ( $C_{max}$ ).

Ainsi, on a construit un facteur de diffusion global  $D$  décrivant, dans les mêmes conditions, l'influence du sillage (fig. 26).

Il a pour expression :

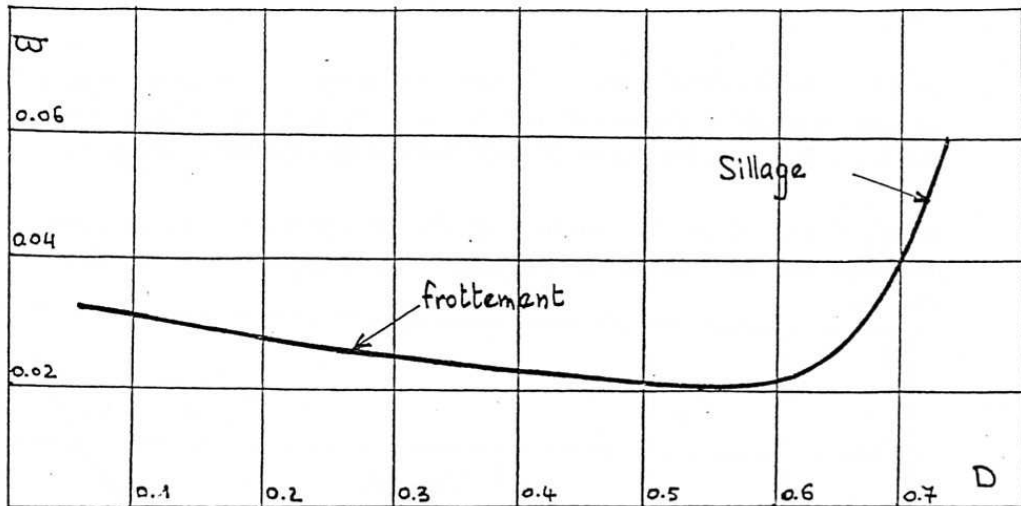
$$D = 1 - \frac{C_2}{C_1} + \frac{|\Delta C_u|}{2 C_1 \sigma}$$

Et pour  $Ca_1 = Ca_2$ ,

$$D = 1 - \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} + \frac{\cos \alpha_1}{2 \sigma} (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) \quad (73)$$

Où n'interviennent que des grandeurs extérieures parfaitement accessibles.

Pour des questions de rendement, il est recommandé de construire des machines avec un facteur de diffusion global de l'ordre de 0,5 à 0,6 (machines fortement chargées).



**Figure 26 :** Evolution des pertes totales avec le facteur de diffusion global  $D$

Nous verrons plus loin, concernant le bruit et la cavitation, qu'il est souhaitable de réduire fortement cette valeur : 0,15 à 0,25 sont alors à conseiller en périphérie de pale (machines faiblement chargées).

**Remarque importante :**

La relation (73) est en fait l'équation manquante pour résoudre le problème inverse déjà examiné.

En s'imposant  $D = 0,5$  on obtient la valeur optimale du serrage :

$$\sigma = 0,673$$

La relation (55) donne la cambrure correspondante :

$$P(\sigma) = 6,164$$

$$C_{z\infty 0} = 1,67$$

La solution finale du problème posé est donc :

$C_{z\infty 0} = 1,67$ $\sigma = 0,673$ $\gamma = 32,17^\circ$
--

## V - ETUDE GENERALE D'UN ETAGE DE COMPRESSION FORME DE DEUX GRILLES PLANES

### 5.1. – Configuration générale de l'étage

Les figures ci –dessous établissent la morphologie d'un étage de compression ainsi que les triangles de vitesses et les efforts exercés sur les aubages du rotor et du stator.

Le rotor est entraîné à la vitesse de translation  $U$  et les aubages du stator sont disposés de manière à redresser l'écoulement vers l'axe ( $\alpha_3$  faible ou idéalement nul).

En mouvement relatif (rotor), les vitesses sont repérées par les angles  $\beta$  ( $\beta_1, \beta_2, \beta_m$ ) et en mouvement absolu (stator) par les angles  $\alpha$  ( $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_m$ ).

L'introduction du mouvement relatif facilite le traitement du problème lié à la grille mobile. En effet, l'ensemble des lois déjà présentées est applicable en remplaçant les angles  $\alpha$  par les angles  $\beta$  et les vitesses  $C$  par les vitesses relatives  $W$ .

La détermination locale de l'étage nécessite la résolution de deux problèmes inverses sur la base de la déflexion rotorique ( $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$ ) et de la déflexion statorique ( $\Delta\alpha = (\alpha_2 - \alpha_3)$ ).

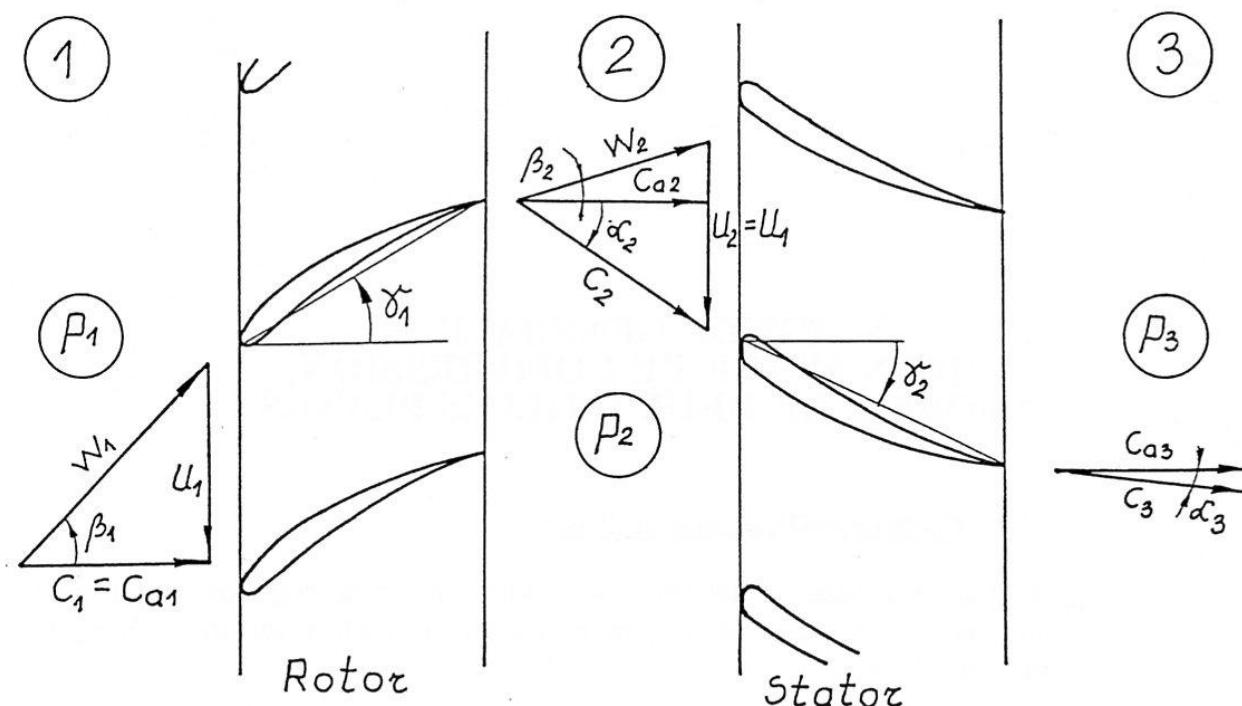


Figure 27 : Configuration générale de l'étage

La figure précédente donne les principales relations du triangle de vitesses :

$$\operatorname{tg} \beta_m = \frac{\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2}{2} \quad (74)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_3}{2} \quad (75)$$

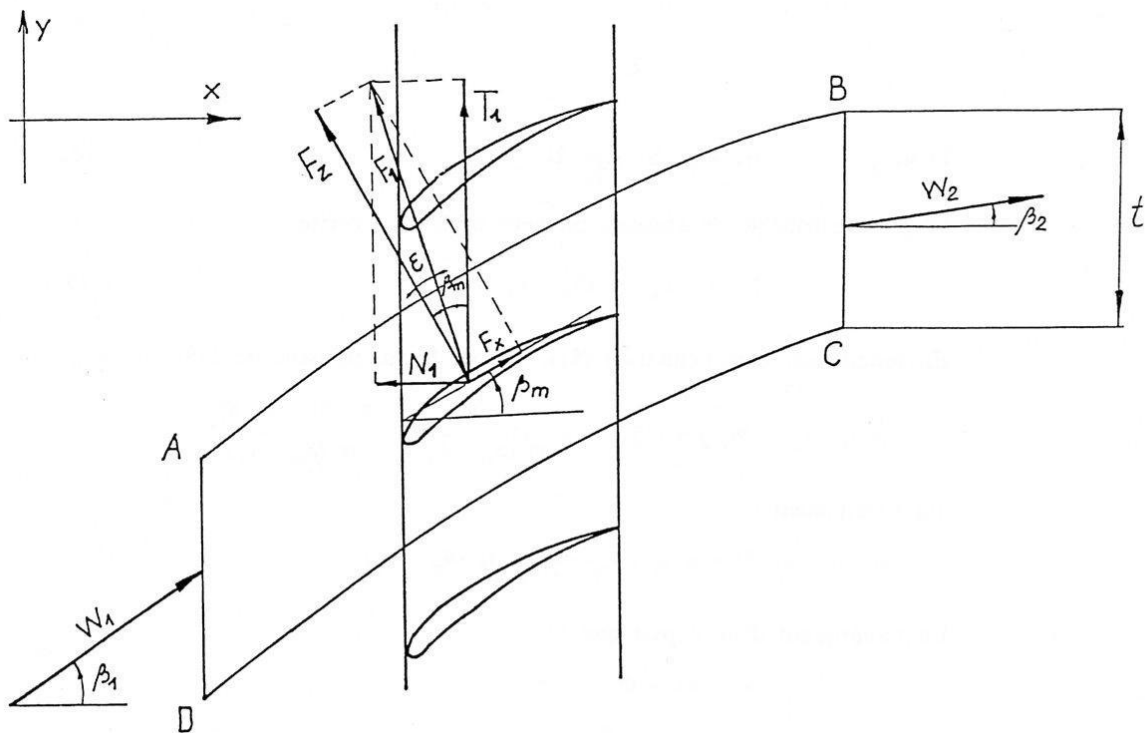
$$\operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} \beta_2 + \operatorname{tg} \alpha_2 \quad (76)$$

et

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} \alpha_m + \operatorname{tg} \beta_m \quad (77)$$

### 5.2. – Expression de la hauteur locale

La hauteur de l'étage est établie par une double application du théorème des quantités de mouvements aux aubages du rotor puis aux aubages du stator (fig.28).



**Figure 28 :** Définition de l'espace fluide étudié.

L'espace fluide étudié est l'espace ABCD d'envergure égale à  $b$  et de largeur égale au pas des profils  $t$ .

On aura pour le rotor :

$$\rho q_v \left( \vec{W}_2 - \vec{W}_1 \right) = - \vec{F}_1 + \sum p \vec{S}$$

Et pour le stator :

$$\rho q_v \left( \vec{C}_3 - \vec{C}_2 \right) = - \vec{F}_2 + \sum p \vec{S}$$

Equations dans lesquelles  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  sont les actions du fluide sur l'aubage et  $q_v$  le débit volumique traversant les surfaces AD et BC.

### Equation du rotor :

En projetant l'équation sur l'axe x puis sur l'axe y, on obtient en tenant compte de l'uniformité des vitesses axiales :

$$0 = p_1 S_1 - p_2 S_2 - N_1 \quad (78)$$

et pour y

$$\rho q_v (W_{u2} - W_{u1}) = 0 - T_1 \quad (79)$$

D'où :

$$N_1 = p_1 S_1 - p_2 S_2 \quad (80)$$

D'après le triangle de vitesses, on peut également écrire :

$$N_1 = - T_1 \operatorname{tg} (\beta_m - \varepsilon_1) \quad (81)$$

En remplaçant dans l'équation (81) ,  $T_1$  par la valeur issue de (79), on aura :

$$\rho q_v \left( \vec{W}_{u2} - \vec{W}_{u1} \right) = - T_1 = \frac{N_1}{\operatorname{tg} (\beta_m - \varepsilon_1)} = \frac{p_1 S_1 - p_2 S_2}{\operatorname{tg} (\beta_m - \varepsilon_1)}$$

Qui s'écrit aussi :

$$p_2 S_2 - p_1 S_1 = \rho q_v (W_{u2} - W_{u1}) \operatorname{tg} (\beta_m - \varepsilon_1)$$

En remarquant d'autre part que :

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 = t b \\ W_{u1} &= C_a \operatorname{tg} \beta_1 \\ W_{u2} &= C_a \operatorname{tg} \beta_2 \\ q_v &= C_a t b \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$p_2 - p_1 = \rho C_a^2 (\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2) \operatorname{tg} (\beta_m - \varepsilon_1) \quad (82)$$

### Equation du stator :

En procédant de même, on obtient pour le stator :

$$p_3 - p_2 = \rho C_a^2 (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3) \operatorname{tg} (\alpha_m - \varepsilon_2) \quad (83)$$

La hauteur fournie par l'étage horizontal est par définition donnée par :

$$H = \frac{p_3 - p_1}{\rho g} + \frac{C_3^2 - C_1^2}{2g}$$

Dans l'hypothèse d'un écoulement entièrement redressé à la sortie du stator ( $\alpha_3 = 0$ ) et pour une vitesse axiale uniforme, on obtient en utilisant (82) et (83) :

$$H = \frac{C_a^2}{g} \left[ (\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2) \operatorname{tg} (\beta_m - \varepsilon_1) + \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} (\alpha_m - \varepsilon_2) \right]$$

En remarquant d'autre part que dans le triangle de vitesses (relation 76) :

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} \beta_2 + \operatorname{tg} \alpha_2$$

La hauteur locale prend l'expression finale :

$$H = \frac{C_a^2}{g} \operatorname{tg} \alpha_2 \left[ \operatorname{tg} (\beta_m - \varepsilon_1) + \operatorname{tg} (\alpha_m - \varepsilon_2) \right] \quad (84)$$

**REMARQUE** : en fluide parfait,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  et l'on obtient :

$$H_E = \frac{C_a^2}{g} \operatorname{tg} \alpha_2 (\operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \alpha_m)$$

qui s'écrit aussi suivant la forme classique d'Euler :

$$H_E = \frac{U_2 C_{u2}}{g} \quad (85)$$

puisque

$$C_a \operatorname{tg} \alpha_2 = C_{u2}$$

et

$$C_a (\operatorname{tg} \alpha_m + \operatorname{tg} \beta_m) = U_2$$

### 5.3. – Expression du rendement local

Le rendement hydraulique ou aéraulique local est obtenu par le rapport de la hauteur en fluide réel à la hauteur en fluide parfait :

$$\eta_H = \frac{H}{H_E} = \frac{\operatorname{tg}(\beta_m - \varepsilon_1) + \operatorname{tg}(\alpha_m - \varepsilon_2)}{\operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \alpha_m} \quad (86)$$

Cette expression donne l'influence des pertes rotoriques et statoriques ( $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ ) sur le rendement local.

Dans le cas d'une machine réelle, d'autres pertes hydrauliques ou aérauliques sont à prendre en compte.

Il s'agit de pertes de parois, à savoir, les pertes de moyeu et de ceinture, qui seront évaluées plus loin.

L'optimisation du rendement hydraulique est relativement aisée.

En supposant  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  constants, on peut noter que le rendement est d'autant plus grand que  $\alpha_m$  est grand (compatible avec une cambrure acceptable des profils du stator), le meilleur choix pour  $\beta_m$  se portera sur la solution de l'équation :

$$\frac{\partial \eta_H}{\partial \beta_m} = 0$$

qui, après développement et simplification s'écrira :

$$\operatorname{tg} \beta_m = -\operatorname{tg} \alpha_m + \sqrt{\left(1 + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1}{\operatorname{tg} \varepsilon_2}\right) \left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_m\right)} \quad (87)$$

donnant lorsque  $\varepsilon_1$  est peu différent de  $\varepsilon_2$ , la solution approchée :

$$\operatorname{tg} \beta_m = -\operatorname{tg} \alpha_m + \sqrt{2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_m\right)} \quad (88)$$

## VI - GENERALISATION A UN ETAGE DE COMPRESSION REEL FORME DE GRILLES ANNULAIRES

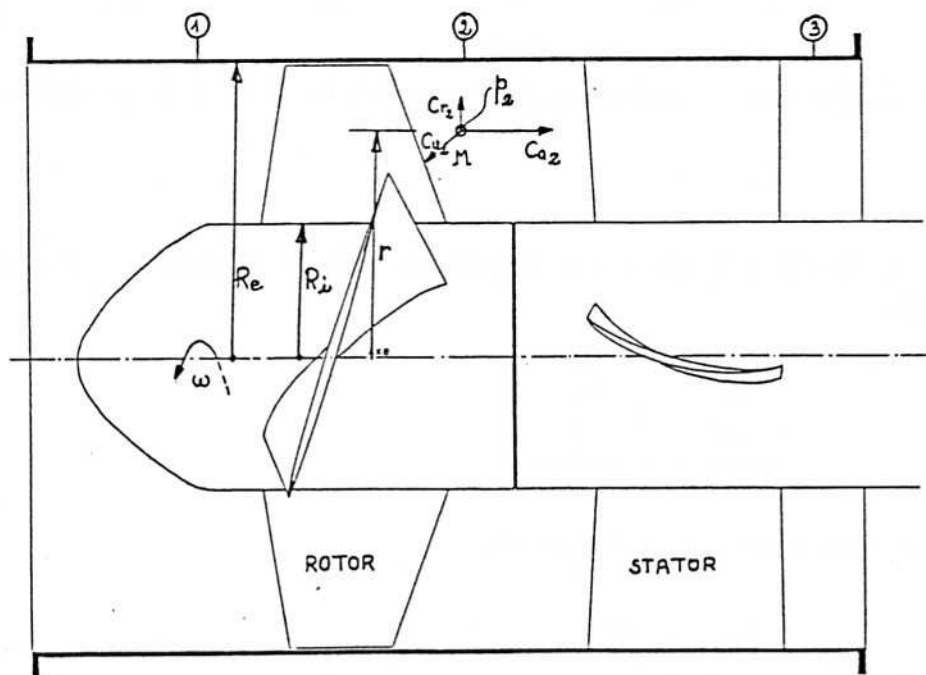
### 6.1 – Equilibre radial simplifié dans la machine axiale

L'objet de l'équilibre radial consiste à connaître la position d'une trajectoire fluide au cours de sa traversée de la machine.

Lorsque l'équilibre radial n'est pas respecté, la trajectoire se rapproche ou s'écarte de l'axe suivant une loi si complexe qu'il est difficile de la positionner en fonction de la distance axiale parcourue. Dans ces conditions, l'application des lois déjà examinées n'est plus envisageable puisque déjà, en première analyse, la vitesse axiale n'est plus uniforme ni axialement ni radialement.

Ainsi pour des questions de simplification bien évidentes, on s'efforce de respecter :  $C_r = 0$ .

Les directions principales de l'écoulement sont désignées par a (axiale), u (tangentielle), r (radiale) comme indiqué sur la figure 29.



**Figure 29** : Directions principales de l'écoulement.

Au point M quelconque, la vitesse C de l'écoulement peut se décomposer en :

$$C \begin{vmatrix} C_a \\ C_u \\ C_r \end{vmatrix}$$

La pression statique étant désignée en ce même point par  $p$ , la hauteur s'écrira :

$$H = \frac{p}{\rho g} + \frac{C^2}{2g} \quad (89)$$

En supposant l'écoulement permanent en moyenne et axisymétrique ( $C$  et  $p$  ne dépendent pas de  $\theta$ ), les équations d'Euler du mouvement se mettront sous la forme :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} = C_r \frac{\partial C_a}{\partial r} + C_a \frac{\partial C_a}{\partial a} \quad (90)$$

$$0 = \frac{C_u C_r}{r} + C_r \frac{\partial C_u}{\partial r} + C_a \frac{\partial C_u}{\partial a} \quad (91)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{C_u^2}{r} + C_r \frac{\partial C_r}{\partial r} + C_a \frac{\partial C_r}{\partial a} \quad (92)$$

Si l'on désire que l'écoulement soit cylindrique, il faut donc imposer la condition :

$$C_r = 0$$

Cette condition conduit pour l'équation (92) à la relation d'équilibre radial simplifiée :

$$\boxed{\frac{dp}{dr} = \rho \frac{C_u^2}{r}} \quad (93)$$

et pour l'équation (91) à l'équation :

$$C_u = C_u (r)$$

Toutes les formes sont possibles pour  $C_u (r)$  ; aucune n'étant en contradiction avec le respect de l'équilibre radial.

Nous proposerons d'étudier la forme générale suivante :

$$C_u (r) = K_1 \cdot r + K_2 + \frac{K_3}{r} \quad (94)$$

Où  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  sont constantes arbitraires.

### **Espace situé entre le rotor et le stator :**

La hauteur du point M s'écrit en fluide parfait de deux manières différentes :

$$\text{D'après (89) : } H = \frac{p}{\rho g} + \frac{C^2}{2g} = \frac{p}{\rho g} + \frac{Ca_2^2 + Cu_2^2}{2g}$$

$$\text{D'après (85) : } H = \frac{U_2 Cu_2^2}{g} = \frac{\omega r}{g} \left( K_1 \cdot r + K_2 + \frac{K_3}{r} \right)$$

On peut écrire également ces équations sous forme différentielle :

$$\frac{dH}{dr} = \frac{1}{\rho g} \frac{dp_2}{dr} + \frac{Cu_2}{g} \frac{dCu_2}{dr} + \frac{d(Ca_2^2)}{dr} \frac{1}{2g} \quad (95)$$

$$\frac{dH}{dr} = \frac{\omega}{g} (2 K_1 r + K_2) \quad (96)$$

En remplaçant  $\frac{dp_2}{dr}$  par sa valeur (93) ainsi que  $Cu_2$  et  $\frac{dCu_2}{dr}$  par les valeurs issues de (91), l'identification de (95) et (96) conduit à la forme de la vitesse axiale :

$$\frac{1}{2} d \left( \frac{Ca_2^2}{dr} \right) = [2 K_1 \cdot \omega - 2 K_1^2] r - [K_2^2 + 2 K_1 K_3] \frac{1}{r} - \frac{K_2 K_3}{r^2} + [K_2 \cdot \omega - 3 K_1 K_2]$$

D'où la répartition de vitesse radiale assurant également l'équilibre radial simplifié :

$$Ca_2 (r) = \sqrt{f(r) + C} \quad (97)$$

Où :

$$f(r) = 2 K_1 (\omega - K_1) r^2 - 2 (K_2^2 + 2 K_1 K_3) \ln r + 2 K_2 (\omega - 3 K_1) r + \frac{2 K_2 K_3}{r}$$

Et où C est la constante d'intégration, calculable à partir de l'équation de définition du débit :

$$qv = \int_{R_i}^{R_e} 2 \pi r Ca_2 (r) dr \quad (98)$$

$R_i$  et  $R_e$  étant respectivement le rayon du moyeu et le rayon extérieur de l'étage (fig. 30).

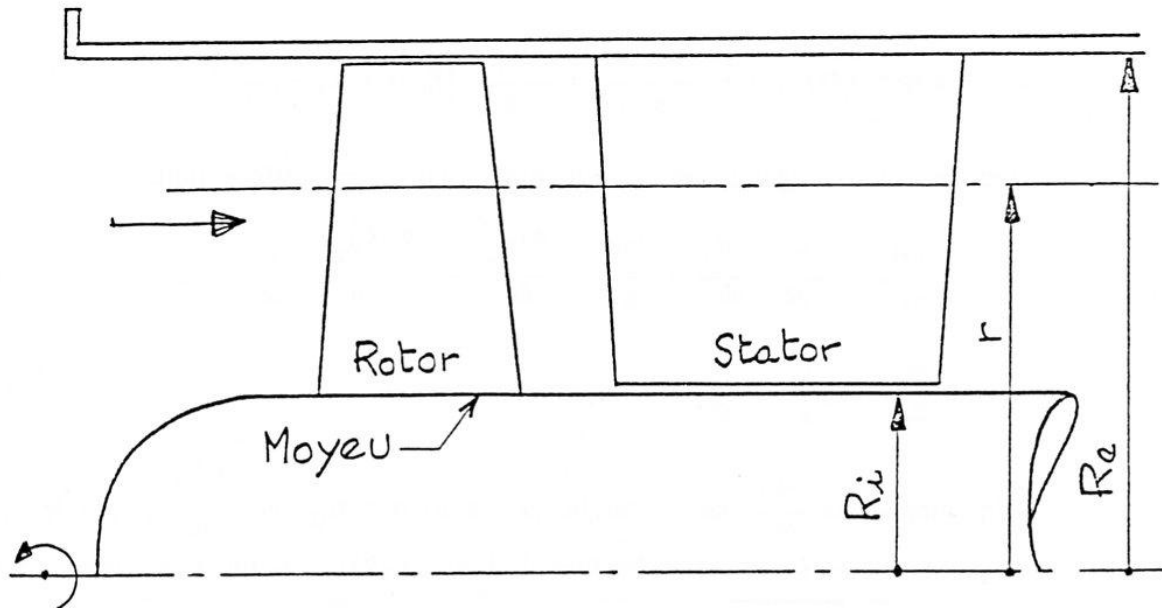


Figure 30 : Constitution de l'étage de compression.

## 6.2 – Différents types de loi génératrice

Dans la conception des machines axiales, on définit la loi génératrice comme étant la loi de répartition radiale de la composante  $C_{u2}$ . Le choix de cette distribution est de l'initiative du concepteur.

Très généralement, on utilise trois types de loi génératrice :

- **vortex libre** :  $K_1 = K_2 = 0$

$$C_{u_2} = \frac{K_3}{r}$$

$$C_r = 0 \text{ si } C_{a_2} = \text{cte}$$

$$H = \frac{\omega K_3}{g}$$

Dans ce cas de vortex, l'intérêt réside dans la simplicité puisque la vitesse axiale et la hauteur sont uniformes, radialement et axialement.

C'est le type de vortex qui est utilisé par la majorité des constructeurs. Il conduit toutefois à une pale très vrillée quelquefois difficile à réaliser.

- **vortex forcé** :  $K_2 = K_3 = 0$

$$C_{u_2} = K_1$$

$$C_r = 0 \text{ si } C_{a_2} = \sqrt{2 K_1 (\omega - K_1) r^2 + \text{cte}}$$

$$H = \frac{\omega K_1}{g} r^2$$

En dehors de l'équilibre radial difficile à réaliser en fluide réel, la morphologie de la pale est moins torturée (vrillage réduit). Cette solution est réservée aux machines mono-étagées et notamment aux hélices de gavage (inducteurs).

● **vortex constant** :  $K_1 = K_3 = 0$

$$C_{u_2} = K_2$$

$$C_r = 0 \text{ si } C_{a_2} = \sqrt{-2 K_2^2 \ln r + 2 K_2 \omega r + \text{cte}}$$

$$H = \frac{\omega K_2 r}{g}$$

Peu utilisé, se présente comme une solution intermédiaire des deux précédentes.

### 6.3 – Définition du rayon moyen de la machine.

En fonction du type de loi génératrice employé, la répartition de vitesse axiale entre le rotor et le stator varie radialement de manière sensiblement linéaire.

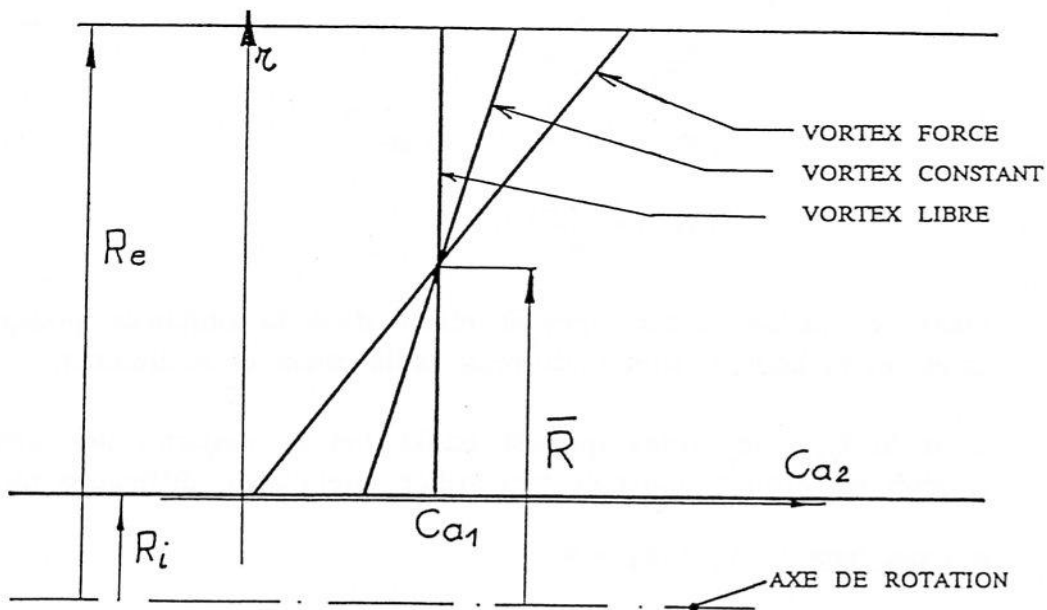
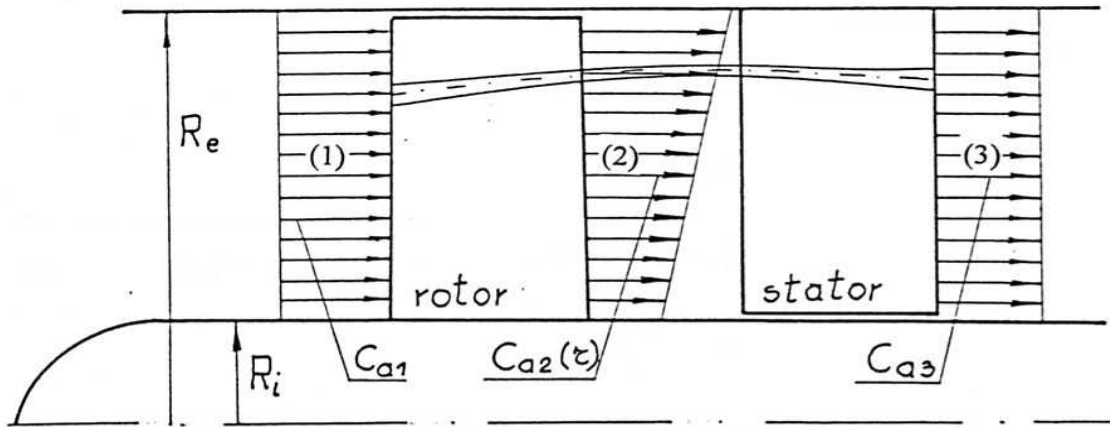


Figure 31 : Evolution radiale de la vitesse axiale entre le rotor et le stator.

En un rayon quelconque  $r$  défini sur la figure 30, la vitesse axiale n'est pas uniforme et l'expression de la hauteur d'étage n'est plus aussi simple qu'en 5 – 2 :

$$H(r) = \frac{C_{a1} C_{a2}}{g} \operatorname{tg} \alpha_2 \left[ \operatorname{tg} (\beta_m - \varepsilon_1) + \operatorname{tg} (\alpha_m - \varepsilon_2) \right] \quad (99)$$



*Figure 32 : Répartition de la vitesse axiale dans l'étage*

Néanmoins, en fluide parfait ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ), l'expression précédente se réduit aussi à :

$$H_E(r) = \frac{U_2 C_{u2}}{g}$$

a) – **Définition du rayon moyen en fluide parfait :**

Le rayon moyen  $\bar{R}$  est celui pour lequel la hauteur atteint sa valeur moyenne :

$$\bar{H}_E = H_E(\bar{R}) \quad (100)$$

La hauteur moyenne  $\bar{H}_E$  est obtenue par intégration de la puissance élémentaire dans la section 2 :

$$\bar{H}_E = \frac{1}{q_v} \int_{R_i}^{R_e} H_E(r) \cdot dq_v \quad (101)$$

Avec :

$$q_v = \int_{R_i}^{R_e} C_{a2} 2\pi r dr = C_{a1} \pi (R_e^2 - R_i^2)$$

et :  $dq_v = Ca_2 \cdot 2 \pi r dr$

L'équation (101) s'écrit donc en fonction de (94) et (97) :

$$\overline{H_E} = \frac{1}{Ca_1 (R_e^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_e} \frac{2\omega}{g} (K_1 r^3 + K_2 r^2 + K_3 r) \sqrt{f(r) + C} dr$$

Excepté dans le cas du vortex libre où  $f(r) = 0$ , cette dernière équation n'est pas intégrable, on a donc recours pour définir la moyenne à la relation simplifiée :

$$\overline{H_E} = \frac{1}{R_e - R_i} \int_{R_i}^{R_e} H_E (r) \cdot dr \quad (102)$$

Qui après intégration, donne :

$$\overline{H_E} = \frac{\omega}{g} \left[ \frac{K_1}{3} (R_e^2 + R_i R_e + R_i^2) + K_2 \frac{R_i + R_e}{2} + K_3 \right] \quad (103)$$

Considérant l'équation de définition du rayon moyen, on peut écrire aussi :

$$\overline{H_E} = \frac{\omega}{g} \left[ K_1 \overline{R}^2 + K_2 \overline{R} + K_3 \right] \quad (104)$$

Enfin, en identifiant les relations (103) et (104), on obtient deux valeurs possibles du rayon moyen :

$$\overline{R} = \frac{R_i + R_e}{2} \quad (105)$$

Et :

$$\overline{R} = \sqrt{\frac{1}{3} (R_e^2 + R_i R_e + R_i^2)}$$

Où la première équation correspond aux vortex libre et constant ( $K_1 = 0$  dans les deux cas) et la deuxième à  $K_2 = 0$  (par exemple dans le cas du vortex forcé).

Cependant dans la majorité des cas, les deux valeurs sont très proches (pour  $\frac{R_i}{R_e} \geq 0,4$ , l'écart est inférieur à 1%) et nous retiendrons (105) comme rayon moyen quel que soit le type de vortex.

**b) Equations en fluide réel :**

Dans le cas du fluide réel, nous retiendrons le même rayon moyen et l'on adoptera les notations suivantes :

$$\alpha_2 (\bar{R}) = \overline{\alpha_2} ; \beta_m (\bar{R}) = \overline{\beta_m} ; \alpha_m (\bar{R}) = \overline{\alpha_m} ; Ca_2 (\bar{R}) = \overline{Ca_2}$$

D'après (100), la hauteur moyenne de l'étage s'écrira :

$$\bar{H} = H (\bar{R}) = \frac{Ca_1 \overline{Ca_2}}{g} \operatorname{tg} \overline{\alpha_2} \left[ \operatorname{tg} (\overline{\beta_m} - \varepsilon_1) + \operatorname{tg} (\overline{\alpha_m} - \varepsilon_2) \right] \quad (106)$$

Compte tenu des répartitions de vitesses axiales  $Ca_2$  de la figure (31), on peut écrire :

$$\overline{Ca_2} = Ca_2$$

D'où la valeur finale de la hauteur moyenne :

$$\boxed{\bar{H} = K \frac{Ca_1^2}{g}} \quad (107)$$

Avec 
$$K = \operatorname{tg} \overline{\alpha_2} \left[ \operatorname{tg} (\overline{\beta_m} - \varepsilon_1) + \operatorname{tg} (\overline{\alpha_m} - \varepsilon_2) \right]$$

Pour  $\alpha_3 = 0$ , K peut aussi se mettre sous la forme :

$$\boxed{K = 2 \operatorname{tg} \overline{\alpha_m} \left[ \operatorname{tg} (\overline{\beta_m} - \varepsilon_1) + \operatorname{tg} (\overline{\alpha_m} - \varepsilon_2) \right]} \quad (108)$$

La hauteur réelle H, délivrée par l'étage est en fait issue de la hauteur moyenne  $\bar{H}$  à laquelle sont retranchées les pertes de paroi (moyen et ceinture).

On aura donc : 
$$H = \bar{H} - \Delta h \quad (109)$$

Où les pertes de frottement sont modélisées comme étant celles d'un écoulement s'effectuant entre deux cylindres de rayons  $R_i$  et  $R_e$  et sur une longueur prise arbitrairement égale à  $8 R_e$  :

$$\Delta h = f. \frac{8 R_e}{2 (R_e - R_i)} \frac{Ca_1^2}{2g} \quad (110)$$

Le rendement hydraulique global est donc défini par :

$$\eta_{Hgl} = \frac{H}{H_E} = \frac{\bar{H} - \Delta h}{H_E} = \bar{\eta}_H - \frac{\Delta h}{H_E} \quad (111)$$

Où  $\bar{\eta}_H = \frac{H}{H_E}$  est par définition le rendement hydraulique des pales calculé au rayon moyen  $\bar{R}$  et dont l'expression est issue de (106).

$$\bar{\eta}_H = \frac{\text{tg}(\bar{\beta}_m - \varepsilon_1) + \text{tg}(\bar{\alpha}_m - \varepsilon_2)}{\text{tg} \bar{\alpha}_m + \text{tg} \bar{\beta}_m} \quad (112)$$

Dans tout ce chapitre  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  ont été pris constants et indépendants du rayon  $r$ .

Pour l'écoulement du fluide réel, l'équation (111) montre une séparation des pertes de profils et des pertes de parois, en réalité, elles ne sont pas totalement indépendantes. En effet, le frottement aux parois conduit localement à un déficit de vitesse axiale et donc à une désadaptation d'incidence en périphérie et en pied de pale ; phénomène conduisant par conséquent à une augmentation locale de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ .

Cependant, pour des questions de simplification, le modèle (111) sera adopté.

## VII – RELATIONS ENTRE LES PARAMETRES GEOMETRIQUES ET HYDRAULIQUES DE LA MACHINE AXIALE

### 7.1 - Dimensionnement global

Au point nominal de fonctionnement de la machine, on définit la vitesse spécifique et le rayon spécifique par :

$$\text{Vitesse spécifique : } \Omega = \frac{\omega qv^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \quad (113)$$

$$\text{Rayon spécifique : } \Lambda = \frac{R_e (gH)^{1/4}}{qv^{1/2}} \quad (114)$$

Par ailleurs, l'allure générale de la machine est caractérisée en premier lieu par le rapport de moyeu :

$$T = \frac{R_i}{R_e} \quad (115)$$

La relation (113) peut être transformée en remarquant que :

$$q_v = \pi (R_e^2 - R_i^2) C_{a_1}$$

On obtient :

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 \pi R_e^2 (1 - T^2) C_{a_1}}{(gH)^{3/2}}$$

En négligeant les pertes de parois par rapport aux pertes d'aubages, H peut être assimilé à  $\bar{H}$  (relation 107) et remplacé par son expression :

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 R_e^2 \pi (1 - T^2) C_{a_1}}{K^{3/2} C_{a_1}^3} \quad (116)$$

Après simplification par  $C_{a_1}$  et en remarquant que :

$$\text{tg } \bar{\beta}_1 = \frac{\omega \bar{R}}{C_{a_1}} = \frac{\omega}{C_{a_1}} \frac{R_i + R_e}{2} = \frac{\omega R_e}{C_{a_1}} \left[ \frac{1 + T}{2} \right]$$

La relation (116) s'écrit aussi :

$$\Omega^2 = \frac{4 \operatorname{tg}^2 \overline{\beta}_1 \pi (1 - T^2)}{(1 + T)^2 K^{3/2}}$$

Conduisant à la première relation fonctionnelle :

$$\boxed{T = \frac{c - \Omega^2}{c + \Omega^2}} \quad (117)$$

Où c est un paramètre égal à :

$$c = \frac{4 \pi \operatorname{tg}^2 \overline{\beta}_1}{K^{3/2}}$$

Ou encore, d'après les relations des triangles de vitesses :

$$c = \frac{4 \pi \left( \operatorname{tg} \overline{\alpha}_m + \operatorname{tg} \overline{\beta}_m \right)^2}{K^{3/2}} \quad (118)$$

On peut procéder de même pour la relation (114)

$$\Lambda^2 = \frac{R_e^2 K^{1/2} Ca_1}{\pi (R_e^2 - R_i^2) Ca_1}$$

S'écrivant aussi :

$$\Lambda^2 = \frac{K^{1/2}}{\pi (1 - T^2)}$$

En remplaçant T par sa valeur issue de (117), on obtient la deuxième relation fonctionnelle :

$$\boxed{\Lambda = \frac{d}{2 \Omega} (c + \Omega^2)} \quad (119)$$

Où d est également un paramètre défini par :

$$d = \frac{K^{1/4}}{\sqrt{\pi c}} \quad (120)$$

**Remarque** : La relation (119) est en fait l'équation paramétrique du diagramme statistique de Cordier liant le rayon spécifique et la vitesse spécifique.

## 7.2 – Méthodologie du dimensionnement global

Dans le cadre de la conception, le projecteur doit construire une machine répondant dans les meilleures conditions au point de fonctionnement nominal défini par trois paramètres :

La hauteur  $H$ , le débit  $q_v$ , la vitesse de rotation  $N$ .

A partir de ces données de base, la vitesse spécifique  $\Omega$  est calculable par (113) :

$$\Omega = \frac{\omega q_v^{1/2}}{(gH)^{3/4}}$$

Le dimensionnement global ne sera possible qu'après le choix d'un couple  $(\overline{\alpha}_m, \overline{\beta}_m)$  et l'estimation de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  ( $1,5^\circ$  par exemple).

On pourra alors calculer dans l'ordre :

$$k = 2 \operatorname{tg} \overline{\alpha}_m \left[ \operatorname{tg} (\overline{\beta}_m - \epsilon_1) + \operatorname{tg} (\overline{\alpha}_m - \epsilon_2) \right]$$

$$c = \frac{4 \pi \left( \operatorname{tg} \overline{\alpha}_m + \operatorname{tg} \overline{\beta}_m \right)^2}{K^{3/2}}$$

$$d = \frac{K^{1/4}}{\sqrt{\pi c}}$$

puis le rapport de moyeu et le rayon spécifique  $T$  et  $\Lambda$ .

$$T = \frac{c - \Omega^2}{c + \Omega^2} \quad \text{et} \quad \Lambda = \frac{d}{2\Omega} (c + \Omega^2)$$

Les relations (114) et (115) donnent alors les valeurs de  $R_e$  et  $R_i$  :

$$R_e = \frac{\Lambda q_v^{1/2}}{(gH)^{1/4}}$$

$$R_i = T \cdot R_e$$

Comme nous l'examinerons dans les paragraphes suivants, le choix du couple  $(\overline{\alpha}_m, \overline{\beta}_m)$  s'il peut être fait au hasard confère néanmoins à la machine ses propriétés géométriques et hydrauliques (ou aérauliques) : taille, poids, rendement, NPSH, bruit, stabilité en débit partiel,...

D'autre part, certains couples mal adaptés conduisent à des déflexions rotoriques ou statoriques incompatibles avec les profils NACA précédemment étudiés ou encore à des rapports de moyeu trop faibles (impossibilité de fixer les pales).

Le choix définitif de ce couple sera donc effectué sur la base de divers critères d'optimisation exposés dans le chapitre suivant.

### 7.3. – Rendement hydraulique global

Si l'on reprend la définition de  $\eta_{Hgl}$  (relation (111)) :

$$\eta_{Hgl} = \eta_H - \frac{\Delta h}{H_E}$$

On obtient aussi :

$$\eta_{Hgl} = \eta_H - \frac{C_a^2 4 f}{2g (1 - T) 2 \overline{\text{tg } \alpha_m} \left( \overline{\text{tg } \alpha_m} + \overline{\text{tg } \beta_m} \right) \frac{C_a^2}{g}}$$

Ou encore :

$$\eta_{Hgl} = \eta_H - \frac{f}{\overline{\text{tg } \alpha_m} \left( \overline{\text{tg } \alpha_m} + \overline{\text{tg } \beta_m} \right) (1 + T)} \quad (121)$$

Où f est calculable par la relation de Colebrook :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left[ \frac{2,51}{R_{en} \sqrt{f}} + \frac{e}{3,71 d_H} \right]$$

Avec :

$$R_{en} = \frac{C \cdot d_H}{\nu} = \frac{q_v}{\pi R \nu} \quad \text{nombre de Reynolds}$$

$$d_H = \frac{4 S_m}{P_m} = \frac{4 \pi (R_e^2 - R_i^2)}{2 \pi (R_e + R_i)} = 2 (R_e - R_i)$$

e : rugosité

### 7.4 - Application numérique

On se propose de dimensionner une pompe donnant à son point nominal les performances suivantes :

$$H = 10 \text{ m}$$

$$q_v = 516 \text{ l/s}$$

Pour une vitesse de rotation  $N = 1450$  tr/mn.

La vitesse spécifique  $\Omega$  est donc ici :

$$\Omega = \frac{\pi N}{30} \frac{q_v^{1/2}}{(g H)^{3/4}} = 3,5$$

Valeur correspondant à une vitesse spécifique de machine axiale.

**Choix du couple**  $(\overline{\alpha}_m, \overline{\beta}_m)$  :

On s'impose ici deux valeurs arbitraires du couple :

$$\overline{\alpha}_m = 16^\circ$$

$$\overline{\alpha}_m = 20^\circ$$

et

$$\overline{\beta}_m = 65^\circ$$

$$\overline{\beta}_m = 60^\circ$$

Et l'on pose dans les deux cas  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1,5^\circ$ .

Les calculs sont présentés dans le tableau suivant :

$$\overline{\alpha}_m = 16^\circ$$

$$\overline{\alpha}_m = 20^\circ$$

$$\overline{\beta}_m = 65^\circ$$

$$\overline{\beta}_m = 60^\circ$$

$$K = 1,30$$

$$K = 1,43$$

$$c = 50,11$$

$$c = 32,23$$

$$d = 0,0851$$

$$d = 0,109$$

$$T = 0,607$$

$$T = 0,45$$

$$\Lambda = 0,758$$

$$\Lambda = 0,693$$

$$R_e = 0,173 \text{ m}$$

$$R_e = 0,158 \text{ m}$$

$$R_i = 0,105 \text{ m}$$

$$R_i = 0,0711 \text{ m}$$

On peut également estimer le rendement hydraulique global de ces deux machines :

$\bar{R} = 0,139 \text{ m}$	$\bar{R} = 0,1145 \text{ m}$
$R_{en} = 1,18.10^6$	$R_{en} = 1,43.10^6$
$f = 0,0120$	$f = 0,0115$
$\eta_H = 0,932$	$\eta_H = 0,937$
$\eta_{Hgl} = 0,888$	$\eta_{Hgl} = 0,909$

Ce simple calcul montre que la seconde machine présente à la fois un meilleur rendement hydraulique et un encombrement plus faible.

### 7.5 - Définition locale des grilles rotoriques et statoriques

Le couple  $(\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m)$  étant choisi et le régime d'écoulement étant imposé par le choix de la loi génératrice (vortex libre, forcé, constant, ...), le calcul des grilles s'effectue rayon par rayon depuis  $R_i$  jusqu'à  $R_e$ .

Choisissons ici le cas du vortex libre caractérisé par la relation :

$$Cu_2 = \frac{K_3}{r}$$

La constante  $K_3$  est calculable à partir de la relation d'Euler en fluide parfait :

$$H_E = \frac{U_2 Cu_2}{g} = \frac{\omega K_3}{g} = \frac{H}{\eta_{Hgl}}$$

On obtient :

$$K_3 = \frac{g H}{\omega \eta_{Hgl}}$$

Au rayon  $r$  quelconque, les données de base de la machine et le dimensionnement global permettent le tracé des triangles des vitesses :

$$Cu_2 = \frac{K_3}{r}$$

$$U_1 = U_2 = \omega r$$

$$Ca_1 = Ca_2 = \frac{q_v}{\pi (R_e^2 - R_i^2)}$$

On calcule ensuite les angles d'entrée et de sortie pour le rotor et le stator :

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{U_1}{Ca_1}$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{U_1 - Cu_2}{Ca_2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{Cu_2}{Ca_2}$$

$$\alpha_3 = 0$$

Ces relations conduisent à la définition des déflexions locales  $\Delta\beta$  et  $\Delta\alpha$  et donc à la résolution de deux problèmes inverses (voir chapitre IV où un exemple pratique est traité).

Une bonne définition des aubages rotoriques et statoriques nécessitant 10 à 20 calculs radiaux comme celui décrit précédemment, il est nécessaire d'avoir recours à un programme de calcul informatique comme celui décrit dans les chapitres suivants.

Examinons à titre d'exemple le cas de la machine précédente pour le couple  $(\overline{\alpha}_m, \overline{\beta}_m)$  le plus intéressant :

$$\overline{\alpha}_m = 20^\circ$$

$$\overline{\beta}_m = 60^\circ$$

$$\eta_{\text{Hgl}} = 0,909$$

Calculons  $K_3$  :

$$K_3 = \frac{g H}{\omega \eta_{\text{Hgl}}} = 0,7107 \text{ m}^2/\text{s}$$

Plaçons nous au rayon  $r = R_e$ , et calculons les différentes vitesses :

$$Cu_2 = \frac{K_3}{R_e} = 4,501 \text{ m/s}$$

$$Ca_1 = Ca_2 = \frac{q_v}{\pi (R_e^2 - R_i^2)} = 8,25 \text{ m/s}$$

$$U_1 = U_2 = \omega R_e = 23,99 \text{ m/s}$$

On en déduit les angles :

$$\beta_1 = 71,0^\circ$$

$$\beta_2 = 67,0^\circ$$

$$\alpha_2 = 28,6^\circ$$

$$\alpha_1 = 0^\circ$$

Dans les déflexions rotoriques et statoriques :

$$\Delta\beta = 4^\circ$$

$$\Delta\alpha = 28,6^\circ$$

Conduisant à la définition des grilles à partir du choix d'un facteur de diffusion de l'ordre de 0,5 pour un bon rendement ou 0,25 pour un bon NPSH (voir 8.3).

### 7.6 – Degré de réaction

Le degré de réaction caractérise le rapport du travail de réaction au travail total échangé par l'étage.

Il est défini par le rapport suivant :

$$\sigma^* = \frac{\frac{W_1^2 - W_2^2}{2}}{\frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2}} = 1 - \frac{Cu_2}{2 U_2} \quad (122)$$

Ce coefficient évolue naturellement avec le rayon depuis le rayon intérieur  $R_i$  jusqu'au rayon extérieur  $R_e$  en passant par le rayon  $\bar{R}$  où il prend la valeur particulière :

$$\bar{\sigma}^* = \frac{\text{tg } \bar{\beta}_m}{\text{tg } \bar{\alpha}_m + \text{tg } \bar{\beta}_m}$$

Suivant le type de vortex, le degré de réaction peut également s'écrire à partir de (122) :

$$\text{en vortex libre : } \sigma^* = 1 - \frac{K_3}{2 \omega r^2}$$

$$\text{en vortex forcé : } \sigma^* = 1 - \frac{K_1}{2 \omega}$$

$$\text{en vortex constant : } \sigma^* = 1 - \frac{K_2}{2 \omega r}$$

Seul le vortex forcé conduit à un degré de réaction indépendant du rayon, ce type de loi génératrice est de ce fait également qualifié d'écoulement à degré de réaction constant.

### 7.7 – Coefficients de pression et de débit

Les coefficients de pression et de débit (ou coefficients de Rateau) sont calculables à partir de  $\Omega$  et du couple  $(\overline{\alpha}_m, \overline{\beta}_m)$  :

$$\psi = \frac{g}{\omega^2} \frac{H}{R_e^2} = \frac{1}{\Omega^2} \frac{1}{\Lambda^2} = \frac{4}{d^2 (c + \Omega^2)^2} \quad (123)$$

$$\phi = \frac{q_v}{\omega R_e^3} = \frac{1}{\Omega} \frac{1}{\Lambda^3} = \frac{8}{d^3 (c + \Omega^2)^3} \quad (124)$$

De par ces expressions, il convient de remarquer que la réduction de la taille d'une machine ( $\Lambda$ ) revient à augmenter à la fois  $\psi$  et  $\phi$ , c'est-à-dire à accroître la "charge" de la machine.

## VIII - DEFINITIONS DES DIFFERENTS CRITERES D'OPTIMISATION HYDRAULIQUE ET GEOMETRIQUE

Ce chapitre présente une méthode générale de classification et de comparaison des machines axiales en fonction de leurs performances hydrauliques et géométriques.

Elle permet, dans le cadre de la conception, de définir le meilleur compromis entre les différents critères d'optimisation. Elle permet aussi de déterminer le degré de perfectionnement d'une machine existante et de préciser quantitativement les différentes possibilités d'éventuelles améliorations. C'est un guide dans le choix du couple  $(\overline{\alpha}_m, \overline{\beta}_m)$  le mieux adapté à un problème donné.

### 8.1 - Paramètres géométriques

Au nombre de ces paramètres on rencontre principalement le rapport de moyeu T, le rayon spécifique  $\Lambda$  et le facteur de volume X.

Le rapport de moyeu T est un facteur de forme évoluant au même titre que  $\Lambda$  avec la vitesse spécifique  $\Omega$  et le couple  $(\overline{\alpha}_m, \overline{\beta}_m)$ . Ce dernier paramètre  $\Lambda$  est à l'image de la taille de la machine ; dans la mesure du possible, il est intéressant de le réduire au maximum en choisissant notamment  $\overline{\beta}$  petit.

Le facteur de volume X est un nombre sans dimension traduisant le volume de matière à mettre en œuvre pour réaliser une puissance hydraulique donnée.

Le volume V est celui correspondant au volume des pales du rotor et du stator, au volume du moyeu et au volume de l'enveloppe extérieure.

Le facteur de volume est défini par :

$$X = \frac{V \omega^3 R_e^2}{g q_v H} \quad (125)$$

En fonction des paramètres adimensionnels, X s'écrit aussi :

$$X = \frac{V \Omega^3 \Lambda^2}{R_e^3} \quad (126)$$

Ou encore :

$$X = \frac{V}{R_e^3} \frac{\Omega}{4} d^2 (c + \Omega^2)^2 \quad (127)$$

Dans ces relations V est calculé par :  $V = V_1 + V_2 + V_3$  (128)

$V_1$  : volume du moyeu et de la ceinture du rotor,  
 $V_2$  : volume du moyeu et de la ceinture du stator,  
 $V_3$  : volume des pales (rotor + stator).

## 8.2 – Bruit hydraulique ou aéraulique

Le bruit étudié ici est celui produit par les fluctuations de pression liées à la fréquence de passage des pales du rotor. Sous forme de puissance, nous retiendrons l'expression de Lowson :

$$W_m = \frac{m^2 Z_1^4}{2 \pi \rho Co^3} \omega^2 N_1^2 (m Z_1)^{-4} \quad (129)$$

avec :

$Co$  : vitesse du son dans le fluide  
 $Z_1$  : nombre de pales du rotor  
 $m$  : rang de l'harmonie étudié  
 $N_1$  : composante axiale à  $\bar{R}$  de la force aérodynamique sur chaque aubage du rotor (fig. 28).

La fréquence d'émission est donnée par :

$$f_m = m \cdot f_{Z_1} = m Z_1 \frac{\omega}{2 \pi} \quad (130)$$

La puissance acoustique associée  $W_m$  est donnée en dB par la définition :

$$L_w = 10 \cdot \log \frac{W_m}{10^{-12}} \quad (\text{en dB}) \quad (131)$$

Cette puissance acoustique est maximale pour  $m = 1$ , on obtient :

$$W_1 = \frac{\omega^2}{2 \pi \rho Co^3} N_1^2 \quad (132)$$

$$f_1 = Z_1 \frac{\omega}{2 \pi} \quad (133)$$

La puissance acoustique  $W_1$  peut être transformée à partir des relations (79) et (81) du chapitre V où le débit du tube de courant est égal à  $q_v/Z_1$ .

$$T_1^2 = \rho^2 \frac{q_v^2}{Z_1^2} Cu_2^2$$

$$N_1^2 = T_1^2 \operatorname{tg}^2 (\overline{\beta}_m - \varepsilon_1) = \rho^2 \frac{qv^2}{Z_1^2} Ca_1^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \overline{\alpha}_2 \cdot \operatorname{tg}^2 (\overline{\beta}_m - \varepsilon_1)$$

On obtient après simplification :

$$W_1 = \frac{\rho q_v^2 \omega^2}{Z_1^2 2 \pi Co^3} Ca_1^2 \operatorname{tg}^2 \overline{\alpha}_2 \operatorname{tg}^2 (\overline{\beta}_m - \varepsilon_1)$$

A partir de  $Ca_1$ , on peut également faire apparaître la hauteur  $H$  (relation (107)).

$$Ca_1^2 = \frac{g H}{K}$$

D'où la valeur :

$$W_1 = \frac{\rho \omega^2 q_v^2}{2 \pi Co^3 Z_1^2} \frac{g H}{K} \operatorname{tg}^2 \overline{\alpha}_2 \operatorname{tg}^2 (\overline{\beta}_m - \varepsilon_1)$$

En négligeant  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  dans ces diverses expressions, on obtient finalement en remplaçant  $K$  par sa valeur :

$$W_1 = \frac{\rho \omega^2}{\pi Co^3 Z_1^2} q_v^2 g H \frac{\operatorname{tg} \overline{\alpha}_m \operatorname{tg}^2 \overline{\beta}_m}{\operatorname{tg} \overline{\alpha}_m + \operatorname{tg} \overline{\beta}_m}$$

Ou encore :

$$W_1 = \frac{\rho \Omega^2}{\pi Co^3 Z_1^2} q_v (g H)^{5/2} \frac{\operatorname{tg} \overline{\alpha}_m \operatorname{tg}^2 \overline{\beta}_m}{\operatorname{tg} \overline{\alpha}_m + \operatorname{tg} \overline{\beta}_m} \quad (134)$$

De ces deux dernières relations on peut tirer les conclusions suivantes :

- Pour des performances ( $H$ ,  $q_v$ ) données, c'est la plus petite vitesse spécifique (ou le plus petite vitesse de rotation) qui conduit au bruit le plus faible.
- Pour une machine existante fonctionnant sur un réseau purement résistif (pas de hauteur géométrique), la puissance acoustique varie avec  $N^6$ .
- Le bruit est d'autant plus faible que  $\overline{\alpha}_m$  et  $\overline{\beta}_m$  sont petits.
- Pour  $m = 2$ , on aura :

$$W_2 = \frac{W_1}{4}$$

$$f_2 = 2 f_1$$

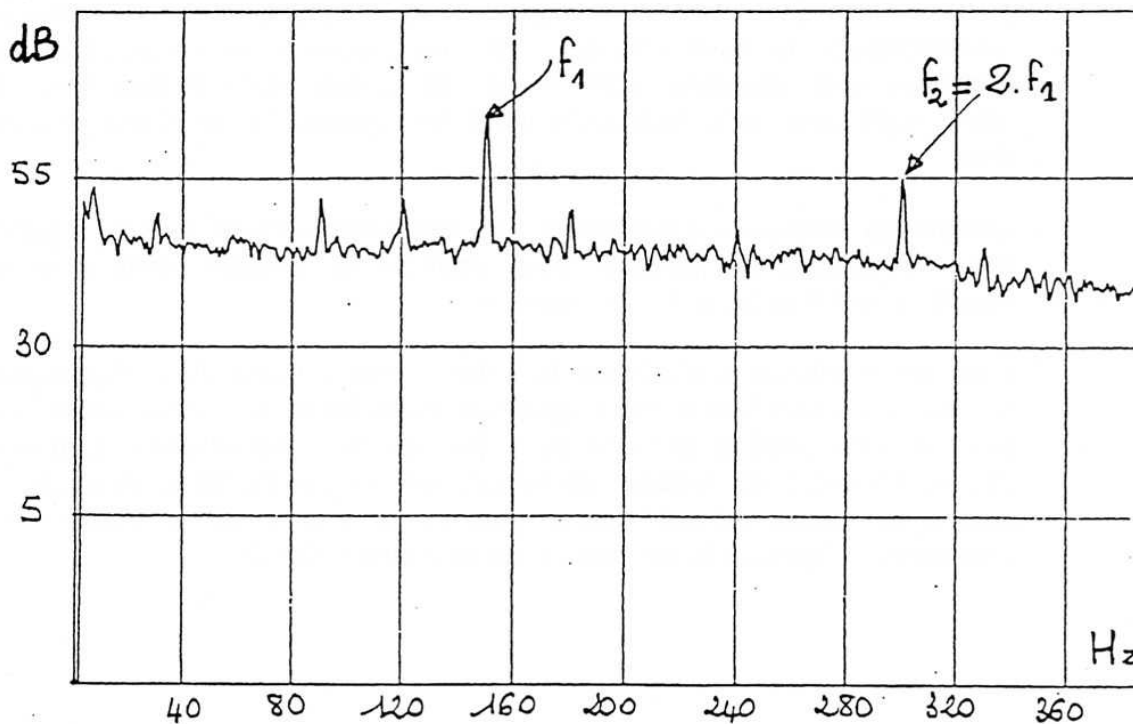
- Le bruit diminue quand le nombre d'aubage  $Z_1$  augmente.

### Remarque concernant l'écoulement réel :

La relation de Lawson n'est utilisable qu'au point d'incidence idéal du rotor en dehors de ce point, les sillages augmentent et provoquent une augmentation notable de  $W_m$ , difficilement prévisible par le calcul.

Le sillage est d'autant plus faible que le facteur de diffusion est petit et que le bord de fuite présente une grande finesse. La figure ci-dessous représente l'analyse spectrale de la fluctuation de pression mesuré à la sortie d'une pompe hélice ( $\Omega = 5$ ). La mesure effectuée à la périphérie de la conduite à un mètre à l'aval du stator.

On remarque sur ce spectre l'émergence liée au passage des pales (pics correspondant à  $m = 1$  et  $m = 2$ ) et le bruit large bande correspondant à la turbulence.



### 8.3 - Capacité d'aspiration (NPSH)

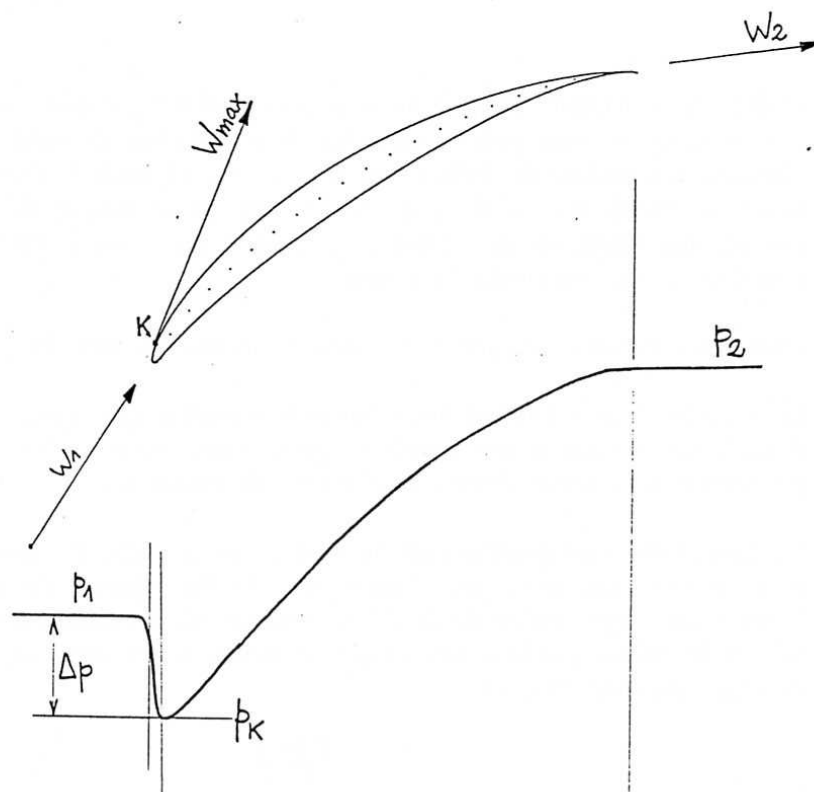
#### a) Mécanisme de la cavitation :

Parmi les nombreux critères d'optimisation, on peut également introduire pour le cas des pompes la capacité d'aspiration ou plus précisément le NPSH requis, défini comme "la charge nette requise à l'aspiration au-dessus de la pression de vapeur".

Au cours de son écoulement dans la roue, le fluide voit sa pression augmenter depuis la pression  $p_1$  jusqu'à la pression  $p_2$ . Cependant, cette variation n'est pas monotone et présente au voisinage de l'entrée de la roue (point K) une dépression dynamique  $\Delta p^*$  donnant en ce point particulier la pression minimale du circuit. La dépression dynamique est directement liée au contournement du bord d'attaque.

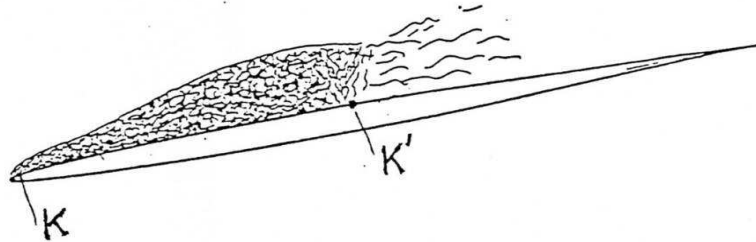
Elle correspond à la vitesse maximale d'extrados déjà examinée dans l'étude du facteur de diffusion local  $D_1$  (chapitre IV) ainsi qu'à l'apparition pour les machines à air d'une onde de choc.

Lorsque les conditions d'installation sont défavorables (forte hauteur d'aspiration), la pression au point K peut atteindre la pression limite pour un liquide, à savoir la pression de vapeur  $p_v$ . Dans ces conditions particulières, le point K sera le siège d'une vaporisation ponctuelle se manifestant par l'apparition d'une bulle de vapeur, immédiatement résorbée puisqu'à partir de K, la pression va continuellement augmenter (fig.33). L'examen des triangles de vitesses montre que la vitesse maximale, et donc la dépression maximale, est obtenue au rayon extérieur de la roue. C'est à ce rayon qu'apparaît la première bulle (cavitation physique).



**Figure 33 :** Evolution de la pression de l'entrée à la sortie de la roue.

Lorsque les conditions d'aspiration se dégradent encore, la pression diminue et la cavitation s'étend depuis K jusqu'à un autre point K' en formant entre K et K' une "poche de vapeur" plus ou moins stable attachée au profil (figure 34). L'extension de la poche s'effectue également radialement en descendant progressivement vers le pied de la pale.



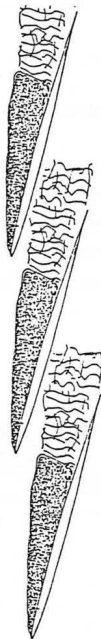
**Figure 34 :** Développement de la poche de vapeur à la surface du profil.

Lorsque les conditions d'aspiration se dégradent encore, le point K' progresse vers le bord de fuite puis commencent à se détacher de cette poche des filaments (ou lâchés de bulles) instables et de trajectoires aléatoires. Ces lâchés de bulles sont à l'origine de l'érosion caractéristique de cavitation, produite par implosion des bulles à la surface des aubages, de l'enveloppe extérieure et éventuellement du moyeu.

C'est le second stade critique de la cavitation (cavitation érosive).

Le troisième stade (cavitation industrielle) correspond à une chute des caractéristiques de la machine (on retient en général une chute de 3% de hauteur par rapport à la valeur obtenue en l'absence de cavitation).

Ce stade correspond généralement au passage de la poche de cavitation dans le col formé entre deux pales (voir figure 35) La présence de cette poche favorise une augmentation de la vitesse relative  $W_2$  conduisant à une réduction de la vitesse giratoire  $Cu_2$  et par là même, à une chute de la hauteur théorique (relative d'Euler).



**Figure 35 :** Position de la poche de vapeur dans le cadre de la chute de caractéristique.

Ainsi, en diminuant progressivement la pression d'entrée, on observe les trois stades caractéristiques de la cavitation.

- **Cavitation physique** : apparition de la première bulle de cavitation à la périphérie de la roue
- **Cavitation érosive** : apparition des lâchés de bulles.
- **Cavitation industrielle** : chute de la caractéristique hauteur-débit.

Entre le premier stade et le second stade apparaît un bruit caractéristique de cailloux roulés. Ce bruit émis par la machine va en croissant jusqu'à la cavitation industrielle puis diminue à cause du volume important de vapeur dans le liquide jouant un rôle d'amortisseur.

Le seul stade prévisible par le calcul est la cavitation physique ; les autres stades ne peuvent être déterminés qu'expérimentalement ou statistiquement.

**b) -NPSH requis :**

De par sa définition, le NPSH s'écrit :

$$\text{NPSH} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{C_1^2}{2g} - \frac{p_v}{\rho g} \quad (135)$$

En appliquant le théorème de Bernoulli entre le point 1 d'entrée et le point critique K situé au rayon  $R = R_e$ , on obtient :

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_K}{\rho g} = \Delta p^* = \left[ \frac{W_{\max}^2}{2g} - \frac{W_1^2}{2g} \right]_{r = R_e} \quad (136)$$

La dépression dynamique  $\Delta p^*$  s'écrit également par convention :

$$\Delta p^* = \lambda_d \left[ \frac{W_1^2}{2g} \right]_{r = R_e} \quad (137)$$

où  $\lambda_d$  est le coefficient de dépression dynamique dépendant principalement de l'épaisseur et de la cambrure des profils.

Ainsi, le NPSH peut s'écrire de deux manières :

$$\text{NPSH} = \frac{p_K}{\rho g} + \frac{C_1^2}{2g} + \lambda_d \left[ \frac{W_1^2}{2g} \right]_{r = R_e} - \frac{p_v}{\rho g}$$

ou :

$$\text{NPSH} = \frac{p_K}{\rho g} + \frac{C_1^2}{2g} + \left[ \frac{W_{\max}^2}{2g} - \frac{W_1^2}{2g} \right]_{r = R_e} - \frac{p_v}{\rho g}$$

Au seuil du premier stade de la cavitation, on observe :

$$\frac{p_k}{\rho g} = \frac{p_v}{\rho g} \quad (138)$$

d'où le NPSH correspondant à la première bulle de vapeur :

$$\text{NPSH}_r = \frac{C_1^2}{2g} + \lambda_d \left[ \frac{W_1^2}{2g} \right] \quad r = R_e \quad (139)$$

ou :

$$\text{NPSH}_r = \frac{C_1^2}{2g} + \left[ \frac{W_{\max}^2}{2g} - \frac{W_1^2}{2g} \right] \quad r = R_e \quad (140)$$

Nous avons étudié par ailleurs, le facteur de diffusion local  $D_1$  :

$$D_1 = \frac{W_{\max} - W_2}{W_{\max}}$$

Celui-ci peut être introduit dans le NPSH requis, on obtient :

$$\text{NPSH}_r = \frac{C_1^2}{2g} + \left[ \frac{W_2^2}{2g (1 - D_1)^2} - \frac{W_1^2}{2g} \right] \quad r = R_e \quad (141)$$

On peut aussi expliciter le coefficient de dépression dynamique par identification de (139) et (141) :

$$\lambda_d = \left[ \frac{W_2}{W_1} \frac{1}{(1 - D_1)} \right]^2 - 1 \quad r = R_e$$

ou

$$\lambda_d = \left[ \frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2} \frac{1}{(1 - D_1)} \right]^2 - 1 \quad r = R_e \quad (142)$$

Pour comparer aisément les machines entre elles, il est utile d'introduire un nombre adimensionnel caractérisant le NPSH requis ; c'est le paramètre de Thomas  $\sigma^{**}$  :

$$\sigma^{**} = \frac{\text{NPSH}_r}{H} \quad (143)$$

Comme les autres critères d'optimisation  $\sigma^{**}$  dépend du couple  $(\overline{\alpha}_m, \overline{\beta}_m)$  mais aussi de la vitesse spécifique et du facteur de diffusion à la périphérie de  $D_{1e}$ .

D'une manière générale, on peut retenir que pour réaliser des machines de forte capacité d'aspiration, il faut s'efforcer de choisir :

- une faible vitesse spécifique, ce qui revient à retenir une faible vitesse de rotation lorsque le choix de celle-ci est libre.
- un facteur de diffusion au rayon extérieur aussi faible que possible et compatible avec une cambrure positive.

Pour simplifier, on peut retenir  $D_{1e}$  la valeur :

$$D_{1e} = \frac{5}{6} D_e \quad (144)$$

où  $D_e$  est le facteur de diffusion global à la périphérie (voir chapitre IV).

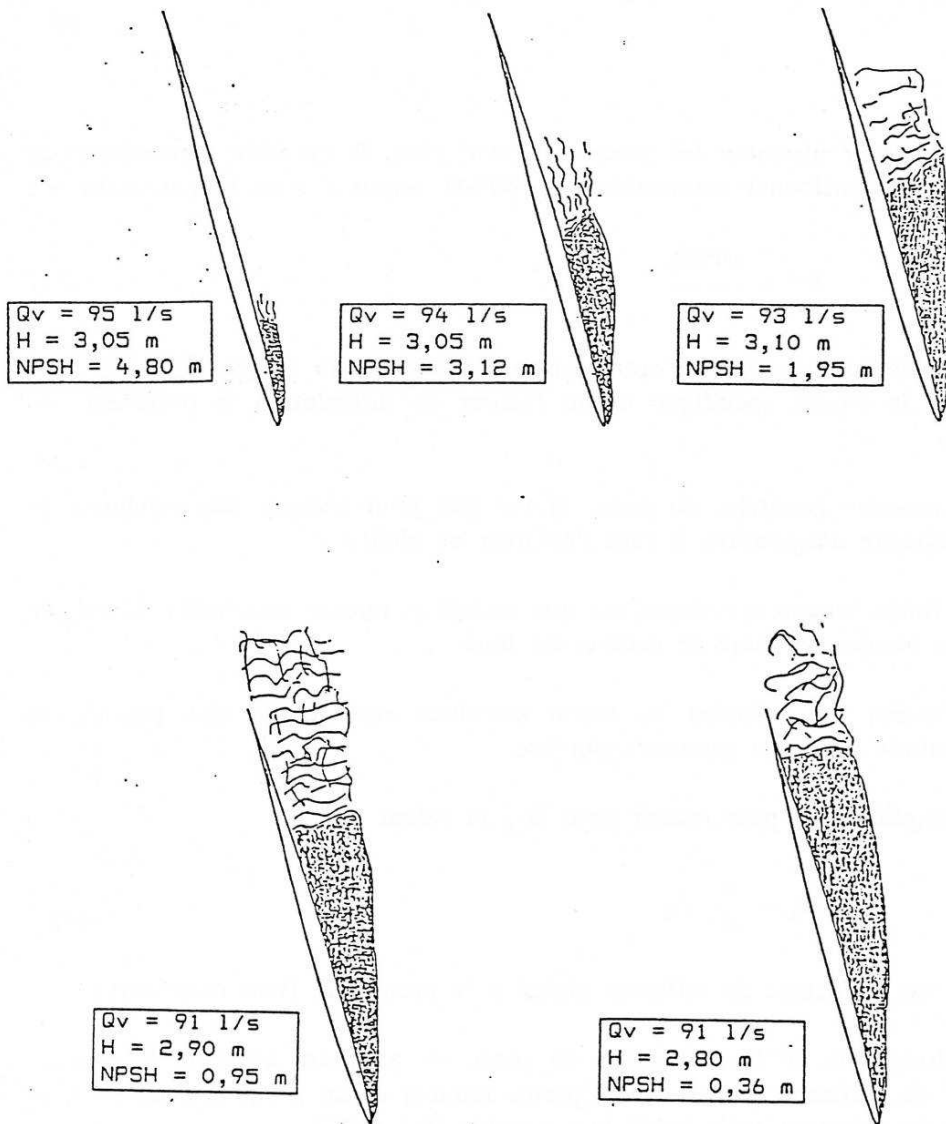
Ainsi donc, lors de la conception du rotor, on adoptera en pied de pale un facteur de diffusion global élevé (pertes faibles) et en périphérie de pale un facteur de diffusion aussi faible que possible (0,1 à 0,2).

Notons enfin, qu'un faible facteur de diffusion se traduit par un fort serrage (grandes cordes) et une faible cambrure caractérisée par un faible coefficient de dépression dynamique.

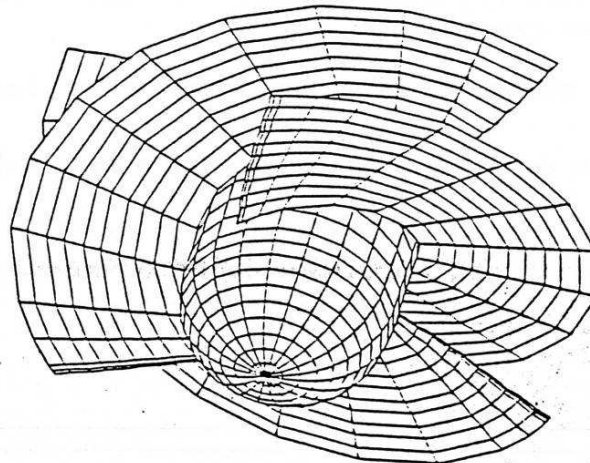
- un angle d'aubage  $\beta_1$  périphérie important, soit finalement un  $\overline{\beta}_m$  important,
- un rapport de moyeu faible correspondant à un  $\overline{\alpha}_m$  important.

La figure suivante donne l'évolution de la poche de vapeur attachée à la périphérie de la pale en fonction du NPSH disponible pour une machine dimensionnée suivant les principes précédents (inducteur axial).

## EVOLUTION DE LA CAVITATION



Nota: c'est à ce stade que nous obtenons le NPSH à 3%.



#### 8.4 - Choix optimal du couple $(\overline{\alpha}_m, \overline{\beta}_m)$

Nous avons vu que le choix du couple  $(\overline{\alpha}_m, \overline{\beta}_m)$  confère à la machine ses principales caractéristiques géométriques et hydrauliques.

Ce choix sera conditionné par les critères d'optimisation retenus pour répondre aux mieux au cahier des charges proposé :

- encombrement poids ( $\Lambda$ )
- rendement ( $\eta_H$ )
- NPSH ( $\sigma^{**}$ )
- stabilité de la caractéristique

L'optimisation de l'ensemble de ces paramètres se relève impossible, seul un compromis acceptable entre deux, voire trois critères est envisageable ; par exemple :

- NPSH et rendement
- taille et bruit
- stabilité, NPSH et rendement.

Nous avons porté sur la figure 36 l'évolution de quelques caractéristiques géométriques et hydrauliques dans l'espace  $(\overline{\alpha}_m, \overline{\beta}_m)$  pour une vitesse spécifique égale à 3.

On peut noter les points suivants :

##### **Point A :**

Optimisation simultanée du rendement et du NPSH  $(\overline{\alpha}_m = 25^\circ, \overline{\beta}_m = 57^\circ)$

##### **Point B :**

A rendement égal  $\Lambda$  passe de 0,72 à 0,60 soit une réduction d'encombrement de l'ordre de 16% :  $(\overline{\alpha}_m = 24^\circ, \overline{\beta}_m = 37^\circ)$

##### **Point C :**

Ce point, correspondant à des valeurs satisfaisantes du NPSH et du rendement, sera caractérisé par une caractéristique stable en débit partiel mais correspondra aussi à une augmentation de taille de 18% par rapport à A et de 41% par rapport à B :  $(\overline{\alpha}_m = 22^\circ, \overline{\beta}_m = 70^\circ)$

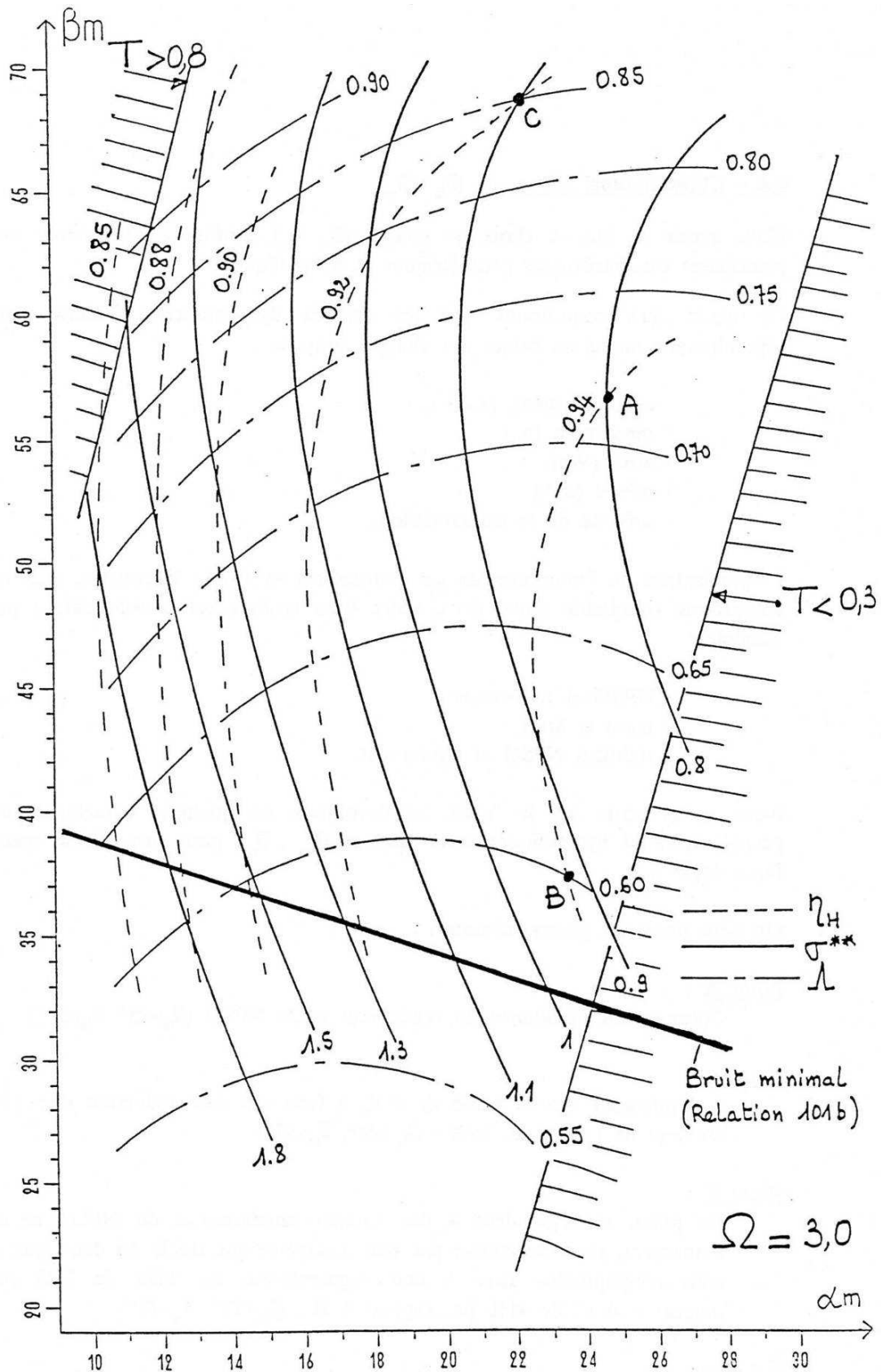


Figure 36 : Evolution des performances avec couple  $(\overline{\alpha_m}, \overline{\beta_m})$   
pour une vitesse spécifique égale à 3.

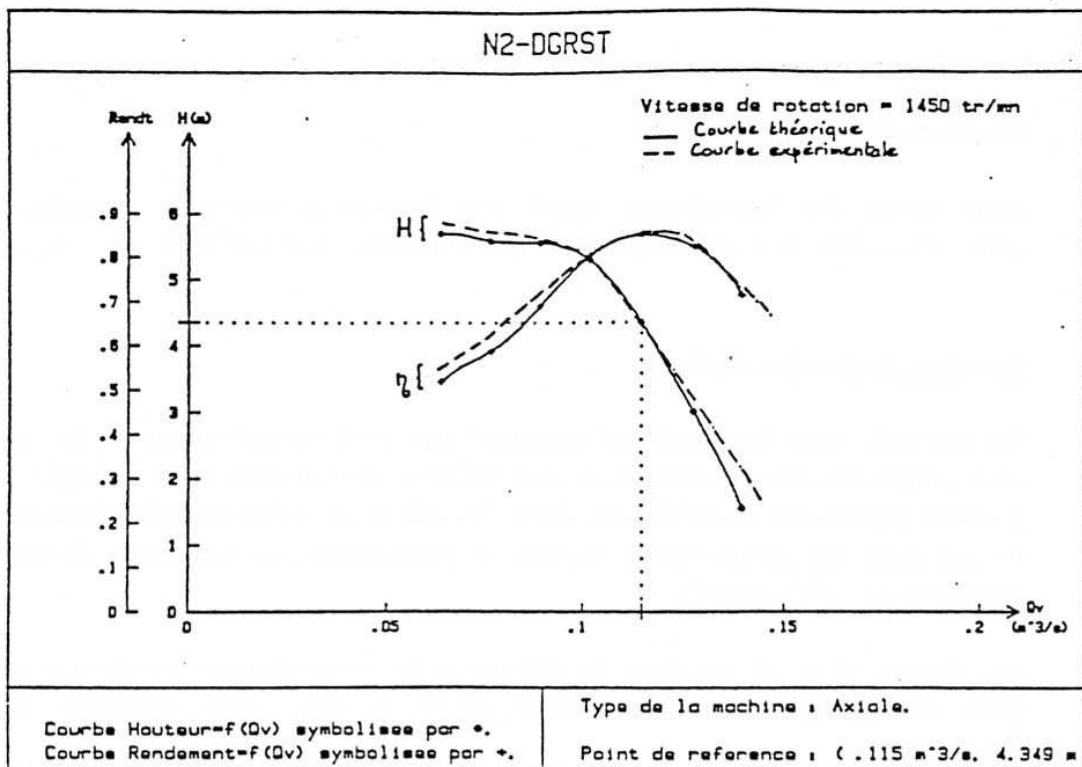
## Machines faiblement chargées

Pour les pompes hydrauliques, appelées à fonctionner sur toute l'étendue du débit, c'est dans la zone du point C s'effectuera le choix de  $(\overline{\alpha}_m, \overline{\beta}_m)$ .

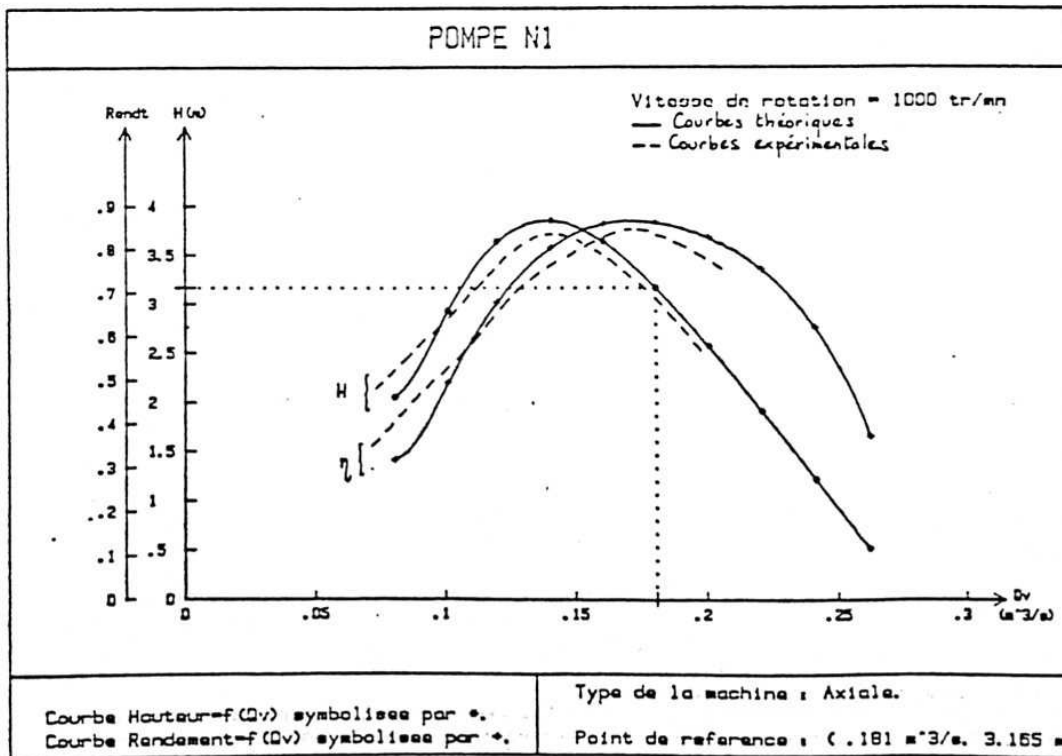
## Machines fortement chargées

Inversement, pour les machines aéronautiques où l'encombrement et le poids sont prépondérants, les tendances constructives se situeront dans la région du point B présentant toutefois une forte instabilité en débit partiel (phénomène de pompage des compresseurs axiaux) se manifestant par une chute de caractéristique en débit partiel.

Les figures 37 et 38 montrent la différence de comportement en débit partiel pour une pompe construite avec  $\overline{\beta}_m = 71,5^\circ$  et une autre construite avec  $\overline{\beta}_m = 50,5^\circ$ .



*Figure 37 : Pompe construite avec  $\overline{\beta}_m = 71,5^\circ$ .*



*Figure 38 : pompe construite avec  $\overline{\beta}_m = 50,5^\circ$ .*

## IX - LOGICIEL DE DIMENSIONNEMENT ET ANALYSE DES PERFORMANCES DES MACHINES AXIALES

### 9.1 - Dimensionnement

L'ensemble des lois de réflexions et de pertes ainsi que les principes généraux relatifs au calcul direct et inverse sont regroupés dans un logiciel de dimensionnement et d'analyse des performances dont l'organigramme général est donné page suivante.

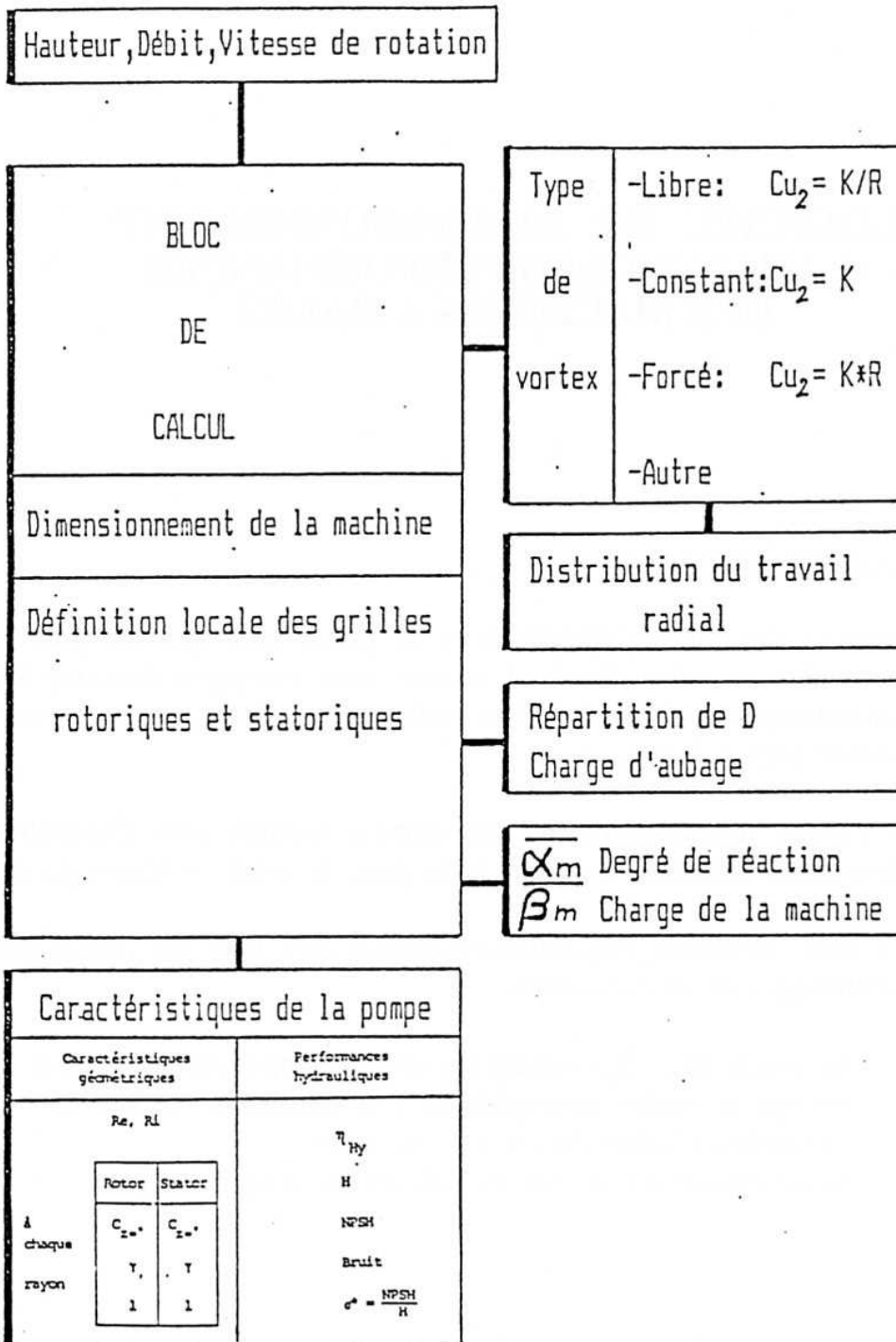
Sous l'aspect dimensionnement, les données d'entrée sont essentiellement les performances attendues, à savoir, la hauteur, le débit, la vitesse de rotation.

Dans cette démarche, l'opérateur/concepteur doit fixer un certain nombre de caractéristiques et de paramètres :

- le couple  $(\overline{\alpha}_m, \overline{\beta}_m)$  suivant les critères d'optimisation retenus
- le type de vortex correspondant à la distribution radiale de travail
- le nombre d'aubes du rotor et du stator
- la répartition du facteur de diffusion le long de la pale.

PROGRAMME DE DIMENSIONNEMENT

HELICES ET HELICO-CENTRIFUGES



Suivant la discrétisation radiale retenue (5, 10 ou 20 tubes de courant annulaires), on procède à la définition locale des grilles rotoriques et statoriques : cambrure, corde, angle de calage.

On présente sur les tableaux suivants les résultats du dimensionnement d'une machine axiale : on peut noter en fonction du rayon (variant ici de  $R_i = 0,070\text{m}$  à  $R_e = 0,157\text{m}$ ) les valeurs de  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_m$ ,  $\gamma$ , corde, cambrure, l'angle de perte  $\epsilon$ , le facteur de diffusion et le serrage des profils.

Les paramètres constructifs peuvent être relevés :

- Au rayon moyen  $\bar{R}$  :  $\overline{\beta}_m = 60^\circ$  et  $\overline{\alpha}_m = 20^\circ$ .
- Le facteur de diffusion rotorique varie de 0,60 en pied de pale jusqu'à 0,30 à la périphérie.
- Le facteur de diffusion statorique varie, quant à lui, de 0,60 à 0,45.

Un programme de tracé tridimensionnel permet de visualiser la morphologie des pales et d'apprécier les difficultés de réalisation.

\*\*\*\*\*

\* CARACTERISTIQUES DU ROTOR \*

\*\*\*\*\*

* RAYON	* BETA 1	* BETA 2	* BETA M	* GAMA R	* CORD R	* Czoo R	* EPSIR	* FD R	* SIGR
* 0.0700	52.20	6.02	34.89	24.57	0.1843	2.3798	1.76	0.60	1.68
* 0.0787	55.42	21.73	42.75	33.96	0.1810	1.8922	1.63	0.59	1.46
* 0.0875	58.18	33.63	48.71	41.37	0.1777	1.4982	1.53	0.56	1.29
* 0.0962	60.58	42.39	53.33	47.08	0.1744	1.2070	1.47	0.52	1.15
* 0.1050	62.67	48.89	57.01	51.53	0.1711	0.9976	1.43	0.48	1.04
* 0.1138	64.49	53.84	60.00	55.05	0.1678	0.8476	1.40	0.44	0.94
* 0.1225	66.11	57.69	62.48	57.91	0.1645	0.7398	1.40	0.40	0.85
* 0.1313	67.54	60.78	64.57	60.28	0.1612	0.6621	1.40	0.37	0.78
* 0.1400	68.82	63.31	66.36	62.28	0.1579	0.6063	1.41	0.34	0.72
* 0.1488	69.96	65.41	67.90	63.98	0.1546	0.5667	1.42	0.32	0.66
* 0.1576	70.99	67.19	69.26	65.46	0.1513	0.5392	1.44	0.30	0.61

\*\*\*\*\*

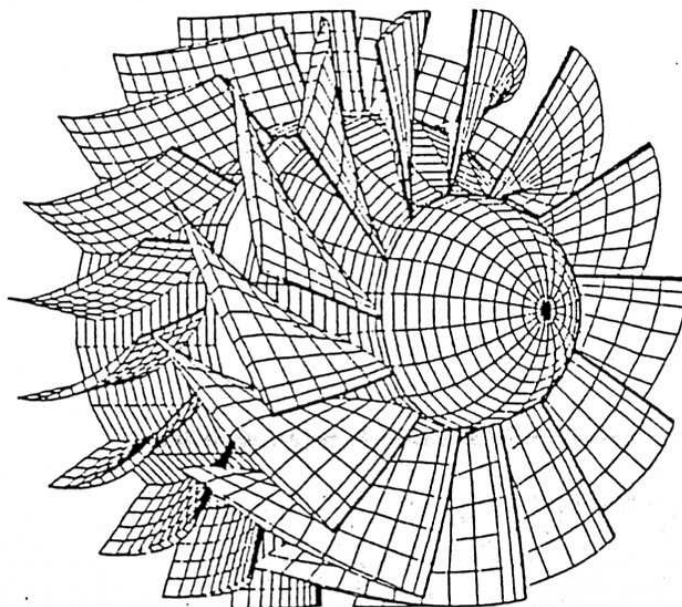
\*\*\*\*\*

\* CARACTERISTIQUES DU STATOR \*

\*\*\*\*\*

* RAYON	* ALFA 2	* ALFA M	* GAMA S	* CORD S	* Czoo S	* EPSIS	* FD S	* SIGS
0.0700	49.81	30.62	20.77	0.1369	2.6479	1.62	0.60	1.56
0.0787	46.45	27.74	19.80	0.1369	2.5681	1.44	0.57	1.38
0.0875	43.43	25.33	18.77	0.1369	2.4997	1.31	0.55	1.24
0.0962	40.71	23.28	17.72	0.1369	2.4393	1.21	0.53	1.13
0.1050	38.26	21.52	16.71	0.1369	2.3849	1.13	0.51	1.04
0.1138	36.05	20.00	15.75	0.1369	2.3351	1.06	0.50	0.96
0.1225	34.05	18.67	14.84	0.1369	2.2890	1.01	0.49	0.89
0.1313	32.24	17.51	14.00	0.1369	2.2460	0.97	0.48	0.83
0.1400	30.60	16.47	13.22	0.1369	2.2057	0.93	0.47	0.78
0.1488	29.10	15.55	12.49	0.1369	2.1678	0.90	0.46	0.73
0.1576	27.73	14.72	11.82	0.1369	2.1319	0.88	0.45	0.69

\*\*\*\*\*



## 9.2 – Analyse des performances

La géométrie définie précédemment est figée dans cette version du logiciel. Pour la vitesse de rotation imposée, on applique les règles du problème direct destinées à définir en fonction du débit les triangles de vitesses correspondants. Pour tenir compte des propriétés du fluide réel, on introduit une distribution de vitesse débitante prenant en considération les couches limites de parois (moyeu, enveloppe extérieure) : loi déficitaire en conduite annulaire.

On définit ainsi rayon par rayon, la hauteur moyenne produite ainsi que les pertes et le rendement :

$$H = \frac{1}{qV} \sum_{i=1}^n H_i \cdot \Delta q_i$$

$$H_E = \frac{1}{qV} \sum_{i=1}^n H_{Ei} \cdot \Delta q_i$$

$$\eta_{Hgl} = \frac{H - \Delta h}{H_E}$$

où  $n$  représente le nombre de tubes de courant,  $\Delta q_i$  le débit circulant dans le tube et  $H_i$  la hauteur produite (définie par la relation 99). La hauteur théorique  $H_{Ei}$  est calculée de la même façon mais avec  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ .

Pertes de paroi  $\Delta h$  sont accessibles à partir des relations 121 et suivantes :

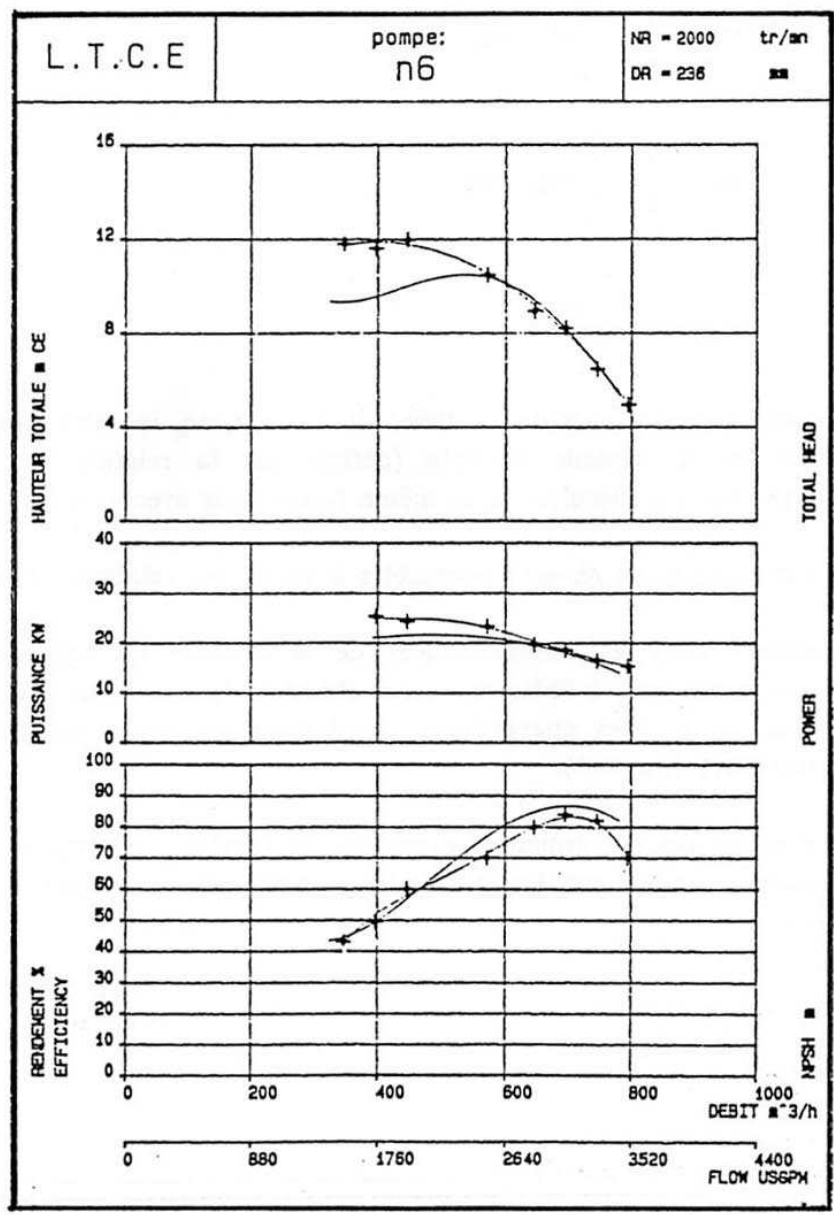
On obtient ainsi les caractéristiques de la machine en fonction du débit : rendement, hauteur, NPSH, puissance absorbée (pompe N6). Elles permettent d'évaluer les qualités énergétiques (rendement maximal), aspiration (NPSH) et adaptatives (stabilité).

L'examen de ces performances permettra de remédier à certains inconvénients éventuels en modifiant les paramètres constructifs à l'étape de dimensionnement.

```

*****
*           N= 2000           DGAMA= 0           *
*****
* DEBIT(m3/s) | ETAM | HAUTEUR(m) | N.P.S.H.d | N.P.S.H.c | PA. (kW) *
*-----*-----*-----*-----*-----*-----*
* 0.0902182 | 0.4299 | 9.2922 | 4.799 | 2.017 | 19.132 *
* 0.1082877 | 0.4951 | 9.6364 | 5.119 | 2.301 | 20.676 *
* 0.1263606 | 0.5742 | 9.9382 | 5.473 | 2.575 | 21.456 *
* 0.1444363 | 0.6854 | 10.3852 | 5.862 | 2.880 | 21.471 *
* 0.1625144 | 0.7959 | 10.3446 | 6.286 | 3.233 | 20.720 *
* 0.1805947 | 0.8556 | 9.2741 | 6.745 | 3.640 | 19.204 *
* 0.1986769 | 0.8572 | 7.4421 | 7.240 | 4.104 | 16.921 *
* 0.2167607 | 0.8204 | 5.3520 | 7.772 | 4.624 | 13.873 *
* 0.2348460 | 0.7470 | 3.2612 | 8.339 | 5.202 | 10.057 *
* 0.2529328 | 0.7426 | 1.8793 | 8.944 | 5.835 | 6.280 *
* 0.2710208 | 0.7269 | 1.4469 | 9.586 | 6.523 | 5.292 *
*****

```



- C -

DEVELOPPEMENTS  
COMPLEMENTAIRES

## I - DISTRIBUTION DE VITESSES A LA SURFACE DE LA PLAQUE PLANE

Le calcul de cette distribution s'effectue sur la base de la transformation conforme (ch.C). Les relations (C.5) et suivantes permettent le calcul de la distribution de vitesses à la surface de la plaque plane à partir de la vitesse complexe  $C'_1$  à la surface du cercle :

$$C'_2 = \frac{C'_1}{\frac{df}{dz_1}}$$

$C'_1$  est donnée par le système (C.11) et le développement (C.56) :

$$C'_1 = \frac{dF}{dz_1} = (C_{r_1} - i C_{u_1}) \exp(-i\theta_1)$$

soit :

$$C'_1 = i \left[ 2 C_o \sin(\theta_1 - \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right] \exp(-i\theta_1)$$

Dans le cas particulier étudié ici ( $b = a$ ), la transformation est issue de la fonction :

$$f = z_1 + \frac{a^2}{z_1}$$

et

$$\frac{df}{dz_1} = 1 - \frac{a^2}{z_1^2}$$

donnant sur le cercle, pour  $z_1 = a \exp(i\theta_1)$  :

$$\frac{df}{dz_1} = 1 - \exp(-2i\theta_1)$$

d'où la valeur de  $C'_2$  :

$$C'_2 = i \left[ 2 C_o \sin(\theta_1 - \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right] \frac{\exp(-i\theta_1)}{1 - \exp(-2i\theta_1)}$$

Examinons d'abord le dernier terme X :

$$X = \frac{\exp(-i\theta_1)}{1 - \exp(-2i\theta_1)} = \frac{\cos \theta_1 - i \sin \theta_1}{1 - \cos 2\theta_1 + i \sin 2\theta_1}$$

Multiplions haut et bas par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$X = \frac{(\cos\theta_1 - i \sin\theta_1)(1 - \cos 2\theta_1 - i \sin 2\theta_1)}{(1 - \cos 2\theta_1)^2 + \sin^2 2\theta_1}$$

Développons le numérateur et le dénominateur en remarquant que :

$$\left| \begin{array}{l} \cos 2\theta_1 = 2 \cos^2 \theta_1 - 1 \\ \sin 2\theta_1 = 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \end{array} \right.$$

$$X = \frac{-2i \sin \theta_1}{4 \sin^2 \theta_1} = -\frac{i}{2 \sin \theta_1}$$

d'où la valeur de  $C'_2$  :

$$C'_2 = \frac{1}{2 \sin \theta_1} \left[ 2 C_o \sin (\theta_1 - \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right] \quad (15)$$

$C'_2$  est un réel, ce qui est parfaitement logique sachant que la plaque est portée par l'axe Ox et que la vitesse est tangente à cette ligne de courant particulière ( $C'_2$  est égale à sa composante axiale  $u_2$ ).

### Valeurs particulières :

Adoptons la condition de Kutta (relation C.22) en remplaçant  $\Gamma$  par sa valeur dans (15) :

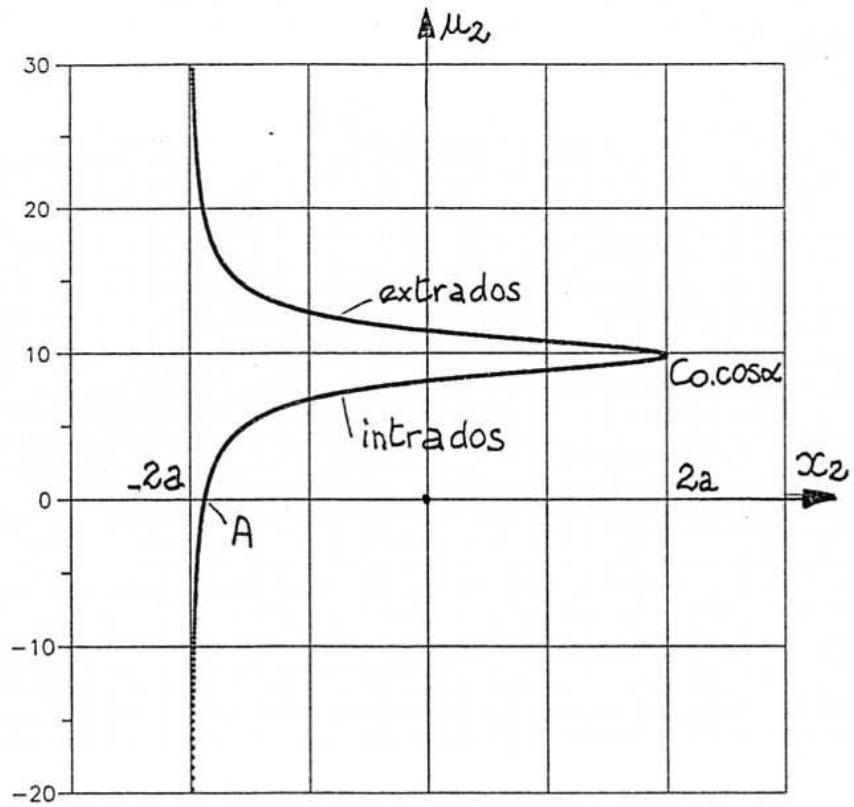
$$u_2 = \frac{C_o}{\sin \theta_1} \left[ \sin (\theta_1 - \alpha) + \sin \alpha \right] \quad (16)$$

en notant que  $\sin (\theta_1 - \alpha) = \sin \theta_1 \cos \alpha - \cos \theta_1 \sin \alpha$

On obtient :

$$u_2 = C_o \left[ \cos \alpha + \sin \alpha \left( \frac{1}{\sin \theta_1} - \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_1} \right) \right] \quad (17)$$

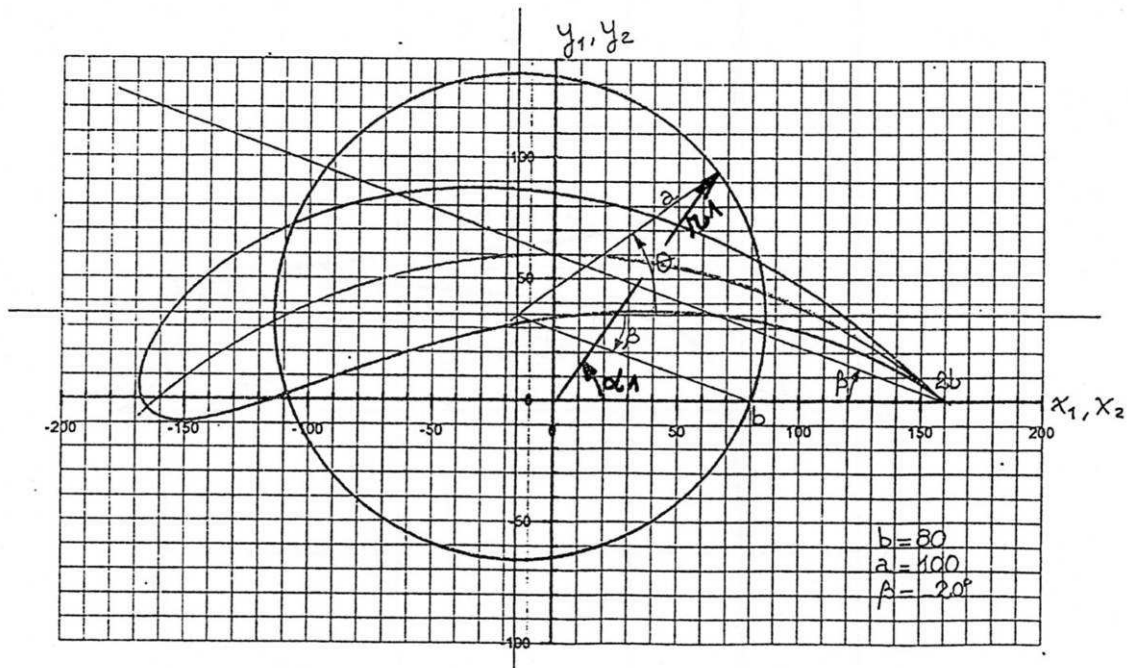
A titre d'exemple, la figure 3 donne l'évolution des vitesses pour  $\alpha = 10^\circ$  sur l'intrados et l'extrados de la plaque plane.



La vitesse au bord de fuite est égale à  $Co \cdot \cos \alpha$ , la vitesse au bord d'attaque est infinie. Lorsque l'incidence est nulle, la vitesse devient partout égale à  $Co$ .

## II - EXPRESSION ANALYTIQUE DU CHAMP DE VITESSES A LA SURFACE D'UN PROFIL JOUKOVSKI

Reprenons la figure 5 du chapitre C ainsi que les éléments de la transformation générale cercle-profil.



**Figure 4 : Transformation de Joukowski**

Les coordonnées du centre sont données par :

$$\begin{cases} x_0 = b - a \cos \beta \\ y_0 = -a \sin \beta \end{cases} \quad \text{avec } \beta \text{ négatif.}$$

et 
$$z_0 = x_0 + i y_0 = b - a \exp(i \beta) \quad (18)$$

Les coordonnées d'un point sur le cercle sont facilement calculables (le rayon du cercle est égal à a) :

$$\begin{cases} x_1 = a \cos \theta + x_0 \\ y_1 = a \sin \theta + y_0 \end{cases}$$

$$z_1 = z_0 + a \exp(i \theta) \quad (19)$$

Soit d'après (18) :

$$z_1 = b + a [\exp(i \theta) - \exp(i \beta)] \quad (20)$$

en posant par convention :

$$z_1 = r_1 \exp(i \alpha_1) \quad (21)$$

et en identifiant à (20), on aura (annexe R9) :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = \sqrt{a^2 (\sin \theta - \sin \beta)^2 + [b + a (\cos \theta - \cos \beta)]^2} \\ \alpha_1 = \arctg \left[ \frac{a (\sin \theta - \sin \beta)}{b + a (\cos \theta - \cos \beta)} \right] \end{array} \right. \quad (22)$$

L'extrados du profil ira de  $\theta = \beta$  à  $\pi - \beta + 2\alpha$  et l'intrados de  $\theta = \pi - \beta + 2\alpha$  à  $2\pi + \beta$ .  
Le potentiel complexe correspondant à l'écoulement autour du cylindre est donné par la relation (C.29) :

$$F(z_1) = C_0 \left[ (z_1 - z_0) \exp(-i \alpha) + \frac{a^2 \exp(i \alpha)}{(z_1 - z_0)} \right] + \frac{i \Gamma}{2 \pi} \ln \left[ \frac{z_1 - z_0}{a} \exp(-i \alpha) \right]$$

D'où l'on peut calculer la vitesse complexe  $C_1'$  :

$$C_1' = \frac{dF(z_1)}{dz_1} = C_0 [\exp(-i \alpha) - \exp[i(\alpha - 2\theta)]] + \frac{i \Gamma}{2 \pi a} \exp(-i \theta) \quad (23)$$

La transformation de Joukowski définit d'abord la géométrie du profil :

$$z_2 = f(z_1) = z_1 + \frac{b^2}{z_1} \quad (24)$$

$$\text{soit} \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1 + \frac{b^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2} \\ y_2 = y_1 - \frac{b^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \end{array} \right. \quad (25)$$

Puis le champ de vitesses :

$$\boxed{C'_2 = \frac{C'_1}{\frac{df}{dz_1}}} \quad (26)$$

Calculons  $\frac{df}{dz_1}$  :

$$\frac{df}{dz_1} = 1 - \frac{b^2}{z_1^2} = 1 - \frac{b^2}{r_1^2} \exp(-2i\alpha_1) \quad (27)$$

On pose :  $\frac{df}{dz_1} = r_2 \exp(i\alpha_2)$

D'où les valeurs de  $r_2$  et  $\alpha_2$  :

$$\left. \begin{array}{l} r_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{r_1^2} \cos 2\alpha_1\right)^2 + \frac{b^4}{r_1^4} \sin^2 2\alpha_1} \\ \alpha_2 = \arctg \frac{\frac{b^2}{r_1^2} \sin 2\alpha_1}{1 - \frac{b^2}{r_1^2} \cos 2\alpha_1} \end{array} \right\} \quad (28)$$

Revenons au calcul de la vitesse à surface du profil :

$$C'_2 = \frac{C'_1}{r_2} \exp(-i\alpha_2)$$

Soit d'après (23) :

$$C_2' = \frac{C_0}{r_2} \left[ \exp[-i(\alpha + \alpha_2)] - \exp[i(\alpha - 2\theta - \alpha_2)] \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi a r_2} \exp[-i(\theta + \alpha_2)]$$

et  $C_2' = u_2 - i v_2$

D'où les composantes de la vitesse à la surface du profil :

$$\left| \begin{array}{l} u_2 = \frac{C_0}{r_2} \left[ \cos(\alpha + \alpha_2) - \cos(\alpha - 2\theta - \alpha_2) \right] + \frac{\Gamma}{2\pi a r_2} \sin(\theta + \alpha_2) \\ v_2 = \frac{C_0}{r_2} \left[ \sin(\alpha + \alpha_2) + \sin(\alpha - 2\theta - \alpha_2) \right] - \frac{\Gamma}{2\pi a r_2} \cos(\theta + \alpha_2) \end{array} \right. \quad (29)$$

La circulation permettant de respecter la condition de Kutta est donnée par :

$$\Gamma = 4\pi a C_0 \sin(\alpha - \beta) \quad (30)$$

- D -

EXERCICES D'APPLICATION

ET PROBLEMES

## EXERCICES SE RAPPORTANT AU CHAPITRE A

### Exercice 1:

La figure suivante donne les éléments principaux de la transformation cercle-profil de Joukowski.

Les axes  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  sont confondus et portent les différentes échelles en mm.

1 - Relever sur la figure les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $\beta$  :

$$a =$$

$$b =$$

$$\beta =$$

2 - Positionner sur la même figure les points  $F_2$ ,  $G_2$  et  $H_2$ , transformés des points  $F_1$ ,  $G_1$  et  $H_1$  situés sur le cercle.

$$x_{F_2} =$$

$$x_{G_2} =$$

$$x_{H_2} =$$

$$y_{F_2} =$$

$$y_{G_2} =$$

$$y_{H_2} =$$

3 - Pour  $\alpha = 20^\circ$  et  $C_0 = 10$  m/s, calculer la circulation  $\Gamma$  et la portance par unité d'envergure du profil. On supposera que le fluide est de l'eau.

$$\Gamma =$$

$$F_z =$$

4 - Positionner le point d'arrêt  $A_1$  sur le cercle et le point d'arrêt  $A_2$  sur le profil.

$$x_{A_1} =$$

$$x_{A_2} =$$

$$y_{A_1} =$$

$$y_{A_2} =$$

5 - Calculer la vitesse du fluide au point  $H_2$ .

En déduire la pression locale pour une pression à l'infini amont égale à 1 bar absolu.

$$C_2 =$$

$$p_2 =$$



## Problème 1 :

### Dimensionnement d'une hélice éolienne

Notation : 13/20. Les parties I, II, et III sont indépendantes.

L'éolienne étudiée ici est constituée d'une hélice dont l'axe de rotation est horizontal et, à tout instant, parallèle à la direction du vent (figure 1).

La machine est composée de  $Z$  pales identiques formées de profils NACA 0015 dont les performances sont données en figure 3 pour un allongement infini. Le serrage des pales est suffisamment faible pour considérer chaque pale comme un profil isolé.

#### I – DIMENSIONNEMENT GLOBAL

Le dimensionnement de la pale s'effectue pour la vitesse caractéristique du site d'installation (vent nominal issu des données météorologiques locales) en s'imposant une rapidité spécifique satisfaisante. Ce paramètre libre, qui fixe un compromis acceptable entre rendement et tenue mécanique, est défini par le rapport entre la vitesse périphérique de la machine  $U_e$  et la vitesse du vent  $C_0$ .

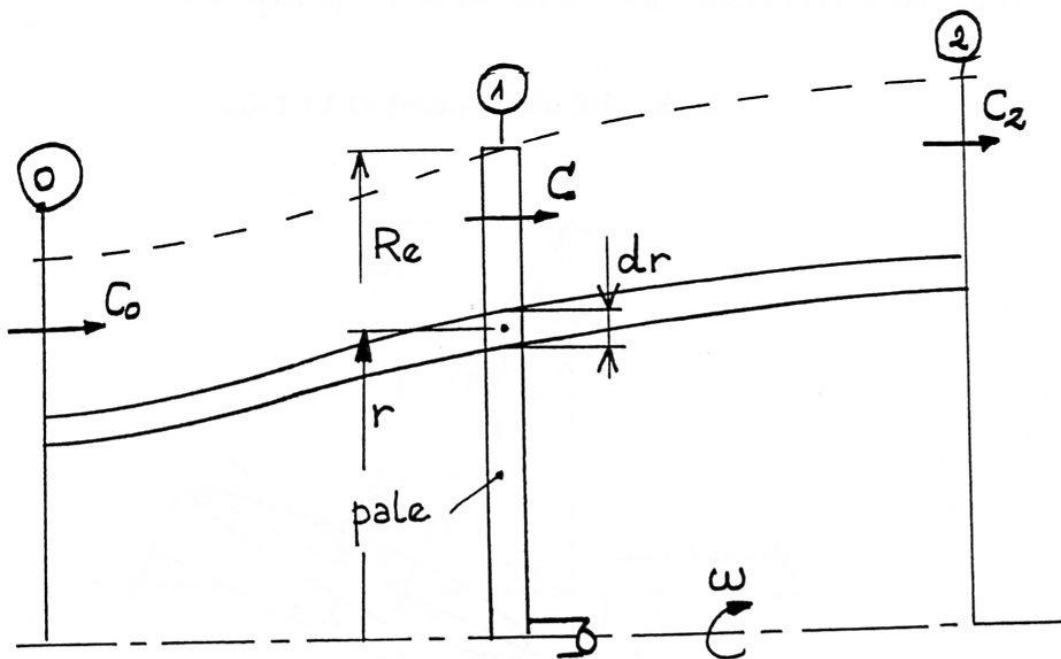


Figure 1 : Modèle global de Fronde – Betz.

La récupération de l'énergie du vent s'effectuant exclusivement sur l'énergie cinétique de celui-ci, on observe un épanouissement du tube de courant enveloppant l'hélice. Dans les différentes sections normales, la vitesse du vent est supposée constante.

1 - Exprimer, en fluide parfait, en fonction de  $C_0$  et  $C_2$ , l'énergie par unité de masse récupérée par l'hélice.

En déduire pour un débit massique  $Q$  la puissance correspondante.

2 - Déterminer  $Q$  en fonction de la masse volumique de l'air  $\rho$ , du rayon de l'hélice  $R_e$  et de la vitesse  $C$ .

3 - En admettant que la vitesse  $C$  est la moyenne arithmétique de  $C_0$  et  $C_2$  et en posant  $x = \frac{C_2}{C_0}$ , montrer que la puissance cédée par le vent présente un maximum égal à :

$$P_{th} = \frac{16}{27} \rho \pi R_e^2 \frac{C_0^3}{2} \quad (1)$$

pour un  $x$  à définir.

4 - Calculer le rayon  $R_e$  de la pale pour atteindre une puissance de 100 kW en vent nominal. On retiendra les conditions de fonctionnement suivantes :

- $C_0 = 12,5$  m/s et  $C = 8,33$  m/s
- Le rendement global de l'ensemble formé par l'hélice, le multiplicateur et le récepteur est égal à 0,65.

5 - Calculer la vitesse angulaire pour imposer une rapidité spécifique de 6.

## II – ETUDE DE L'ELEMENT DE PALE

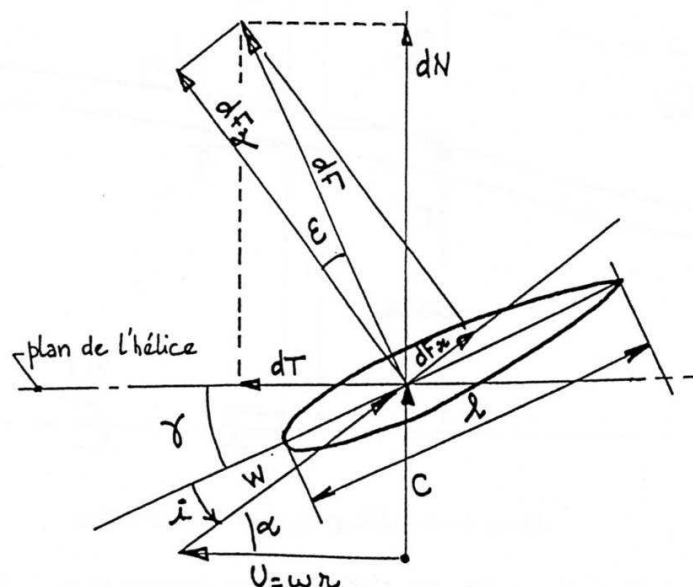


Figure 2 : Configuration des vitesses des efforts et des angles au rayon  $r$

La figure 2 ci-dessus montre une coupe cylindrique effectuée au rayon  $r$  quelconque. On notera sur cette figure :

- Les différents efforts aérodynamiques générés par le vent relatif  $\vec{W}$  issu de la composition des vitesses absolue  $C$  et d'entraînement  $\vec{U}$ .

- Les différents angles :

$\alpha$  : angle du vent relatif

$\gamma$  : angle de calage de la pale

$i$  : angle d'incidence ( $i = \alpha - \gamma$ )

**6** - Calculer, en fonction des coefficients aérodynamiques du profil retenu et pour une envergure élémentaire  $dr$ , les efforts élémentaires de portance et de traînée  $dF_z$ , et  $dF_x$ ,

**7** - En déduire, en fonction de  $\alpha$ ,  $dF_z$ , et  $dF_x$ , les paramètres suivants :

a - L'effort utile  $dT$ .

b - La puissance élémentaire  $dP$  reçue par l'élément de pale.

c - La même puissance en fluide parfait  $dP_{th}$ .

**8** - Panant des valeurs calculées en 7b et 7c :

Déterminer le rendement aérodynamique local  $\eta$ .

Déduire de l'expression précédente l'angle d'incidence le mieux adapté pour optimiser ce rendement.

Définir à partir de la figure 3 les valeurs numériques de  $i$ ,  $C_z$  et  $C_x$ .

**9** - En extrapolant cette règle constructive du pied de pale à la périphérie, déterminer la loi de vrillage définie par la fonction  $\gamma(r)$ . On vérifiera que l'angle de calage à la périphérie est pratiquement nul.

**10** - Pour un nombre de pales  $Z$  fixé, quel principe retenir à chaque rayon pour calculer la corde du profil.

### III – FONCTIONNEMENT PAR VENT VARIABLE

Il s'agit d'évaluer ici le fonctionnement de la machine en présence d'un vent différent du vent nominal.

Pour cela on se référera à la périphérie de la machine et on retiendra une vitesse de rotation invariable.

11 - Définir la vitesse de vent maximale admissible pour la pale. Le profil proposé est-il bien adapté à cette situation. Quelle amélioration est envisageable.

12 - Inversement, déterminer la vitesse minimale de vent.

13 - Quel élément de la machine est conditionné par la valeur de l'effort dN (figure 2).

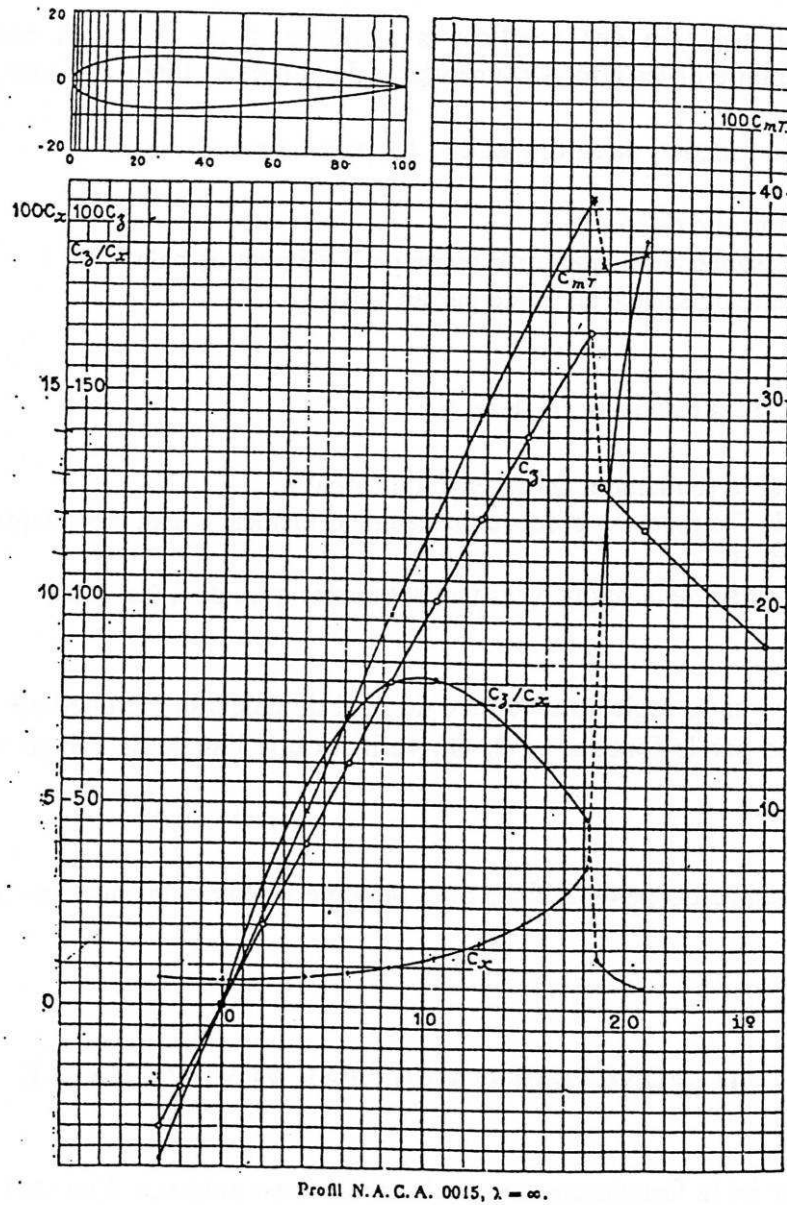


Figure 3 : Coefficients caractéristiques du profil NACA 0015 en fonction de l'angle d'indice  $i$

## Problème 2 – PROPULSION D'UNE VEDETTE RAPIDE

On se propose de réaliser la première étape du dimensionnement d'un ensemble portant et propulsif destiné à l'équipement d'une vedette de transport rapide.

Deux dispositifs sont mis en place : le dispositif avant I est constitué d'une aile hydrodynamique de corde  $l$  et d'envergure  $L$  permettant de supporter sensiblement la moitié du poids  $P$  du bateau et le dispositif arrière II, intégrant le même dispositif qu'à l'avant avec le propulseur (figure 1). L'objectif poursuivi est d'obtenir, pour la vitesse de croisière, le déjaugeage (\*) du bateau. La résistance à l'avancement dans l'eau (majoritaire), est alors réduite à la seule traînée des dispositifs I et II.

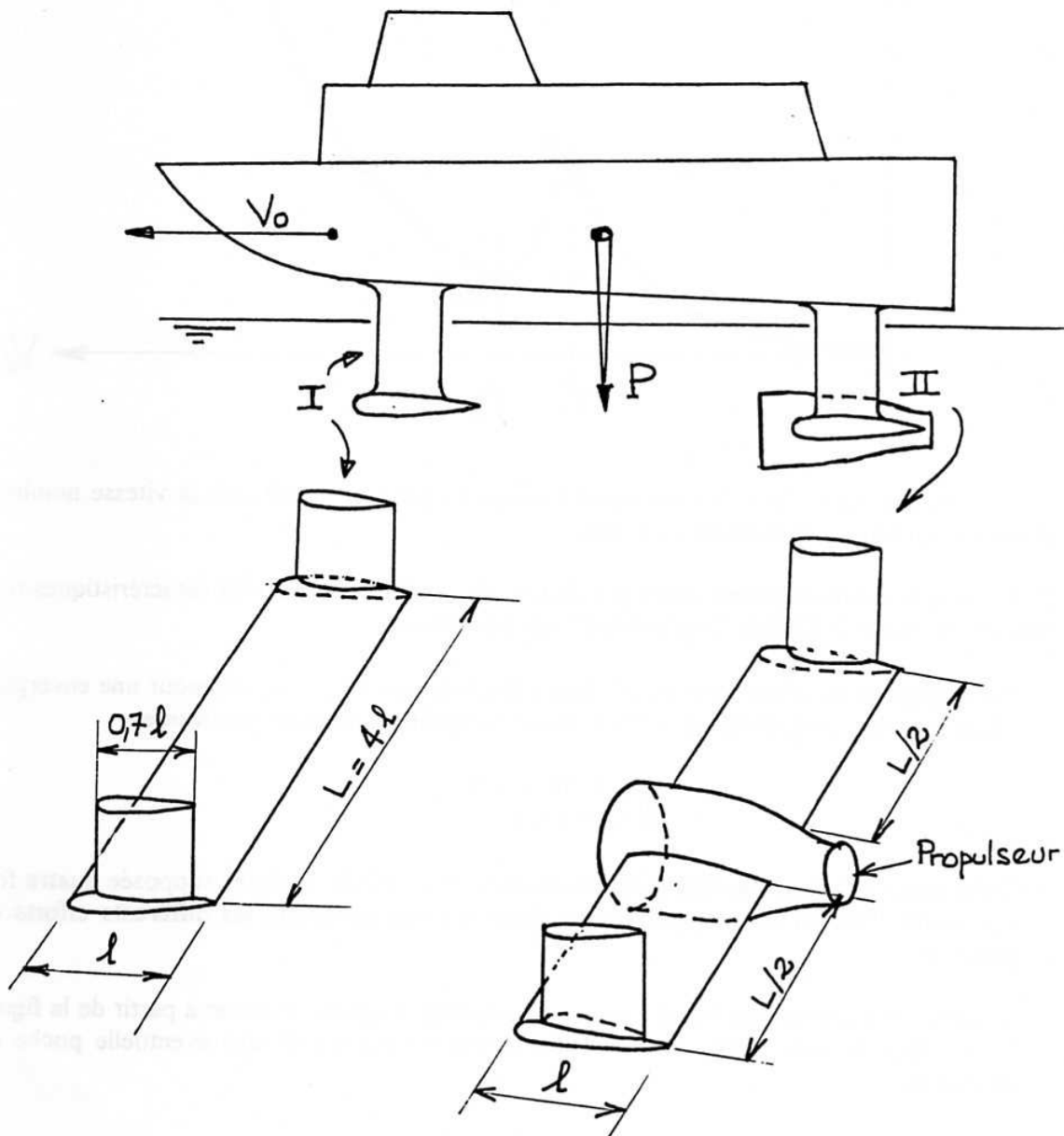


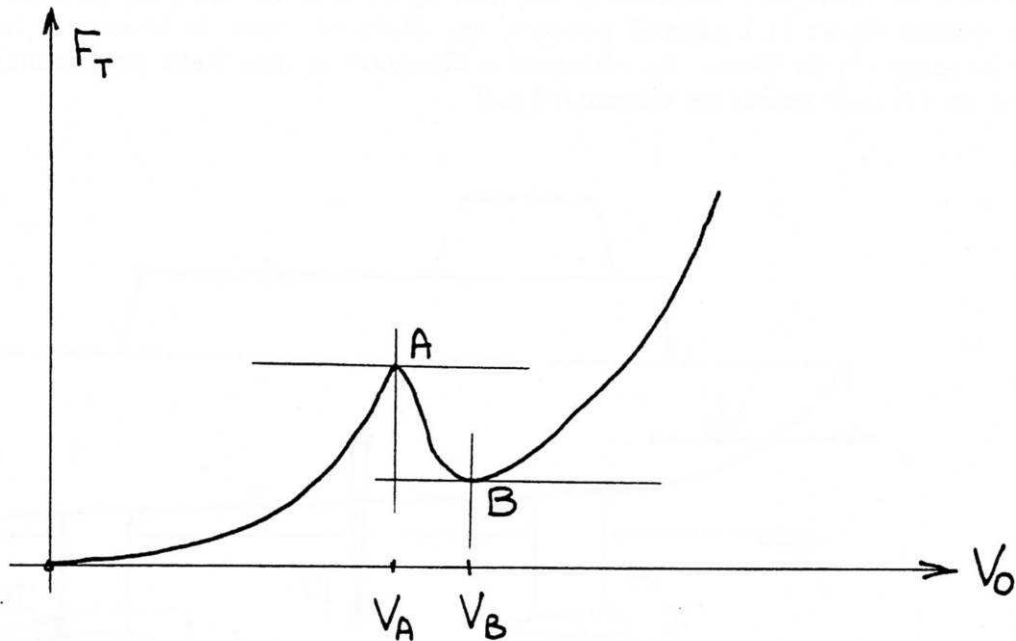
Figure 1 : Dispositif portant et système de propulsion.

(\*) Elévation du bateau au-dessus de la surface de l'eau.

## I - Première partie

### A - Dimensionnement global du dispositif portant : {8 points}

1 - Pour la charge nominale  $P$ , la résistance totale à l'avancement  $F_T$  présente en fonction de la vitesse d'avance  $V_0$ , l'allure ci-dessous :



Commenter l'allure de cette caractéristique et préciser quelle sera la vitesse nominale d'avance (ou vitesse de croisière) à retenir.

- 2 - L'aile hydrodynamique est constituée d'un profil NACA 0015 dont les caractéristiques sont données en figure 2. Définir l'angle d'incidence à adopter.
- 3 - En négligeant les effets d'extrémité, définir la géométrie de chaque aile pour une envergure 4 fois supérieure à la corde ( $L = 4 l$ ) et dans les conditions nominales suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} P = 300\,000 \text{ N} \\ V_0 = 8 \text{ m/s} \end{array} \right.$$

- 4 - Déterminer la traînée de chaque aile et en déduire la traînée totale  $F_T$  supposée quatre fois supérieure. Justifier cette hypothèse en détaillant sommairement les différents efforts en présence.
- 5 - Localiser le point de plus basse pression à la surface du profil. Préciser à partir de la figure 3, la valeur de cette pression et conclure quant à l'étendue d'une éventuelle poche de cavitation

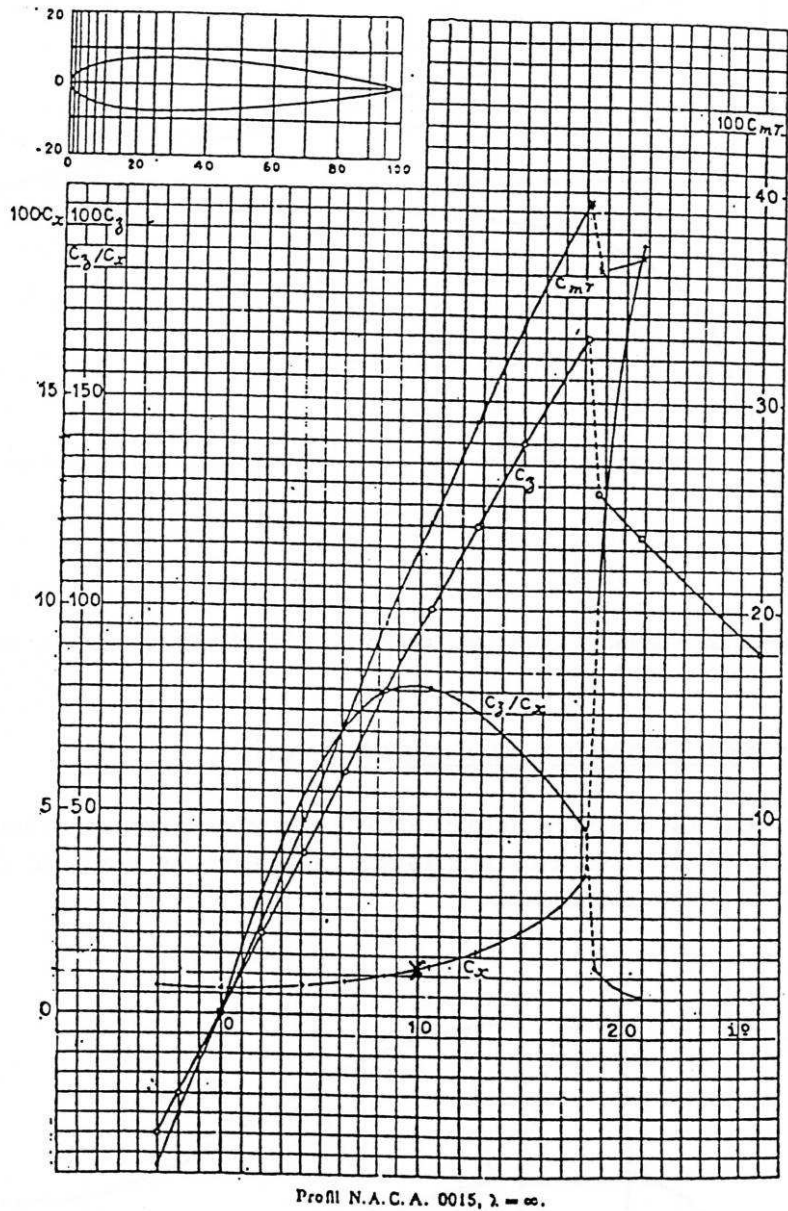


Figure 2 : Caractéristiques du profil NACA 0015

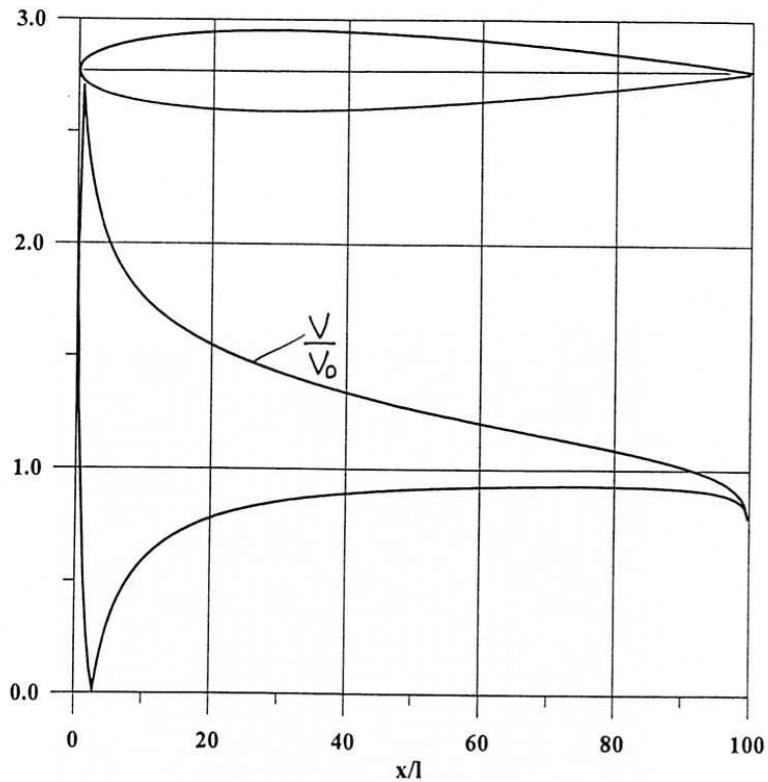
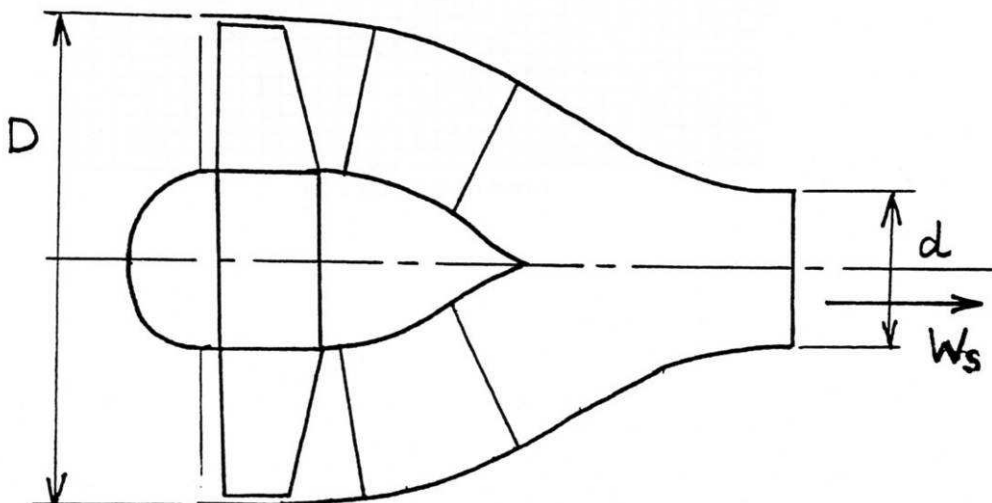


Figure 3 : champ de vitesse à la surface du profil NACA 0015 pour une incidence de  $10^\circ$

**B - Dimensionnement global du propulseur : (4 points)**

Le propulseur est constitué d'une hélice carénée se comportant comme une pompe axiale de diamètre  $D$  débitant dans une tuyère propulsive de diamètre  $d$  et d'un moyeu contenant le moteur (figure ci-dessous).



### Hypothèses :

- a • On néglige l'effet de la proximité de la surface libre.
- b • L'écoulement dans la tuyère s'effectue sans pertes
- c • La vitesse d'avance  $V_0$  est négligeable par rapport à la vitesse d'éjection  $W_s$ .
- d • Le rapport  $\frac{d}{D}$  est faible devant l'unité.

6 - Calculer la poussée du propulseur en fonction de  $W_s$  et  $d$ .

7 - Déterminer le débit et la hauteur à générer par la pompe en fonction des mêmes éléments.

8 - Partant de la traînée totale  $F_T$  calculée en 4, définir pour  $d = 250$  mm les paramètres suivants :

$$W_s \text{ (m/s)}, q_v \text{ (m}^3\text{/s)}, H \text{ (m)}$$

9 - Dans les mêmes conditions, déterminer :

- La vitesse de rotation  $N$  de la pompe permettant de fixer une vitesse spécifique  $\Omega = 4,5$
- La puissance absorbée  $P_a$ , le rendement global estimé étant égal à 70%.

Quelles sont vos conditions

10 - Le propulseur étant immergé de 1,5 m, calculer le NPSH disponible de la pompe ainsi que le NPSH requis estimé à partir d'une vitesse spécifique d'aspiration  $S = 200$ .  
La condition de non-cavitation est-elle vérifiée ?

11 - On souhaite définir la tuyère la mieux adaptée au propulseur. Pour cela on calculera les éléments du tableau ci-dessous :

d (mm)	$W_s$ (m/s)	$q_v$ (m <sup>3</sup> /s)	H (m)	N (tr/mn)	$P_a$ (kW)
150					
200					
250					

Quelles sont vos remarques concernant ces résultats.

12-Revenir sur la réalité de l'hypothèse c. Reprendre les questions 6 et 7 et exprimer la poussée, le débit et la hauteur en fonction de  $W_s$ ,  $V_0$  et  $d$  ( $W_s$  sera considérée comme la vitesse relative et  $V_0$  la vitesse d'entraînement).

## PROBLEME – ETUDE D'UN ROTOR D'HELICOPTERE

Le rotor est un ensemble formé de 2 pales indéformables tournant à vitesse angulaire  $\omega$  dans un plan sensiblement horizontal. Son rayon extérieur est égal à  $R_e = 6$  m (figure 1). Chaque pale est constituée d'un profil NACA 0012 de section et calage  $\gamma$  constants le long du rayon. La corde 1 du profil est égale à 200 mm.

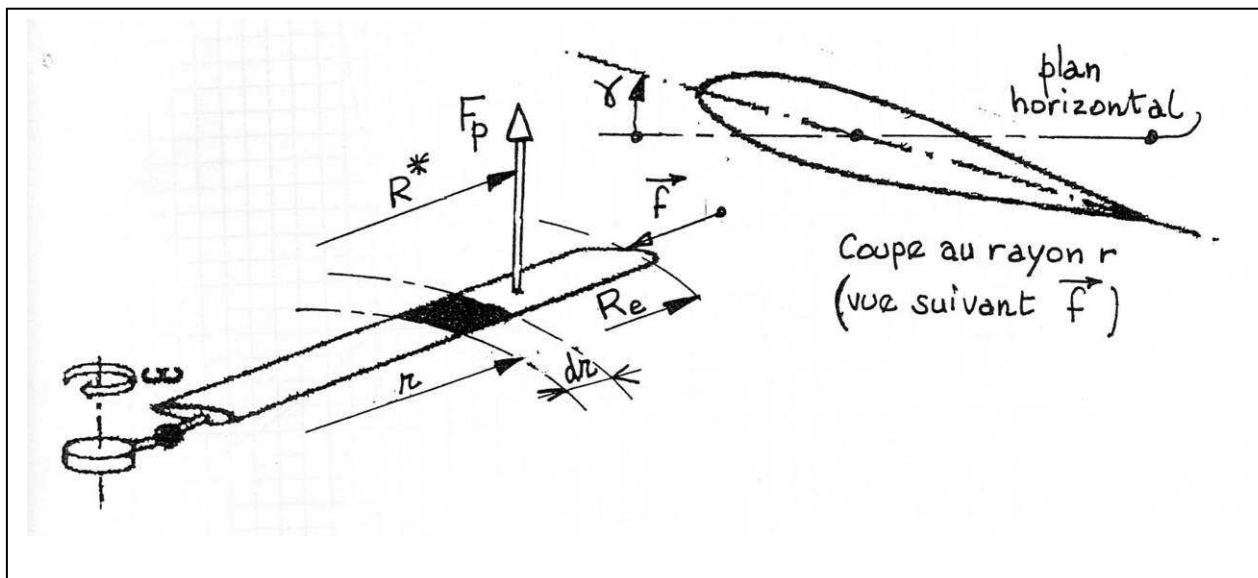


Figure 1 : Définitions géométriques de la pale et du profil.

### I – VOL STATIONNAIRE

La vitesse absolue de l'air, générée par le débit du rotor, est supposée verticale, uniforme dans tout le rotor, et égale à  $C_o$ .

- 1- Exprimer la vitesse locale d'entraînement  $U$  pour l'élément de pale d'envergure  $dr$  représenté en figure 1. Définir graphiquement le triangle de vitesses, en déduire la vitesse relative  $W$  et l'angle d'incidence  $i$ .
- 2- Pour le même élément de pale, exprimer les forces de portance et de traînée élémentaires  $dF_z$  et  $dF_x$  en fonction des coefficients  $C_z$  et  $C_x$  du profil.
- 3- Dans une première étape, on néglige  $C_o$  par rapport à  $U$ , Pour un allongement supposé infini, montrer que la portance totale par pale  $F_p$  s'écrit :

$$F_p = \rho C_z 1Re \frac{U_e^2}{6}$$

Où l'on déterminera  $U_e$ .

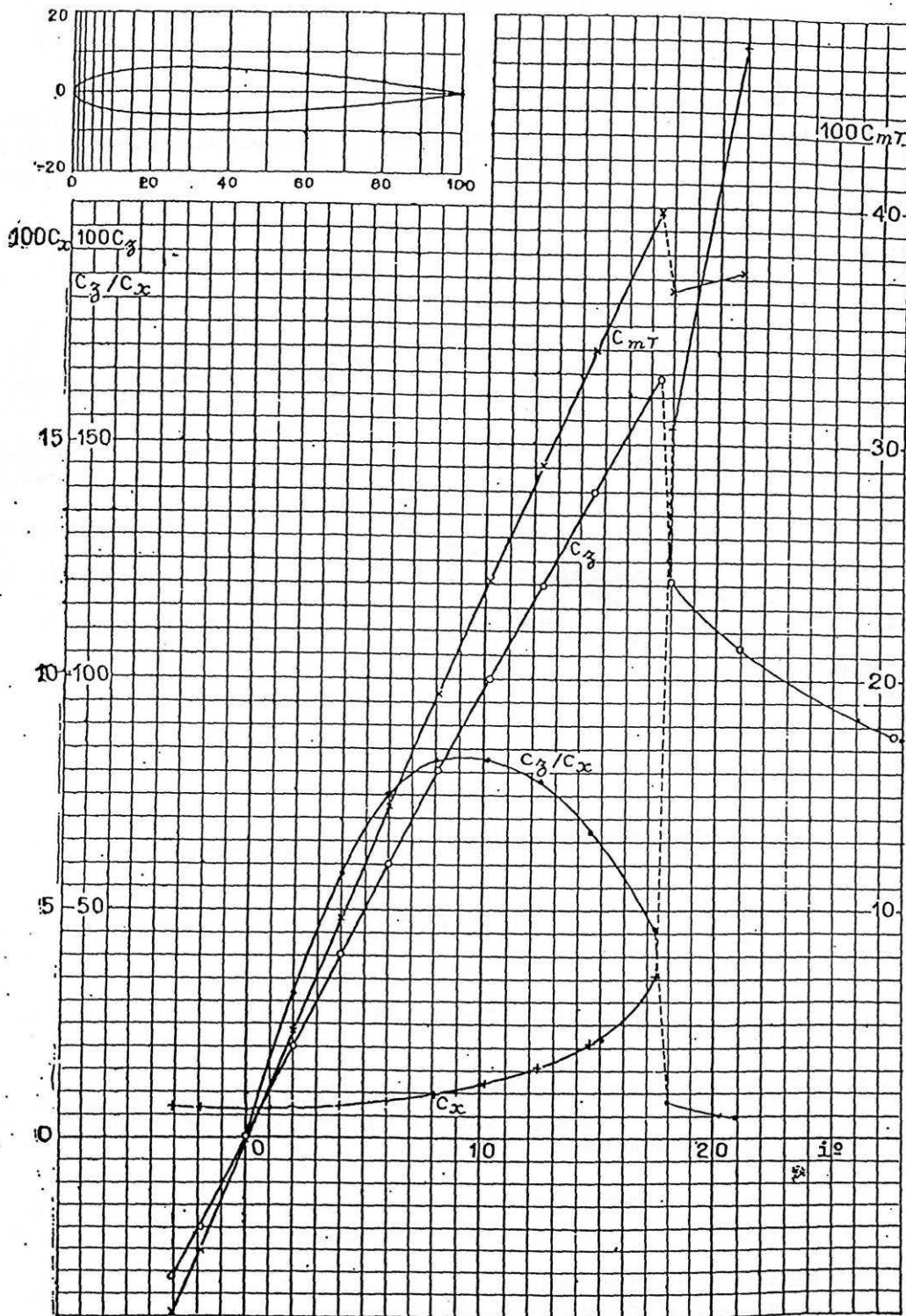
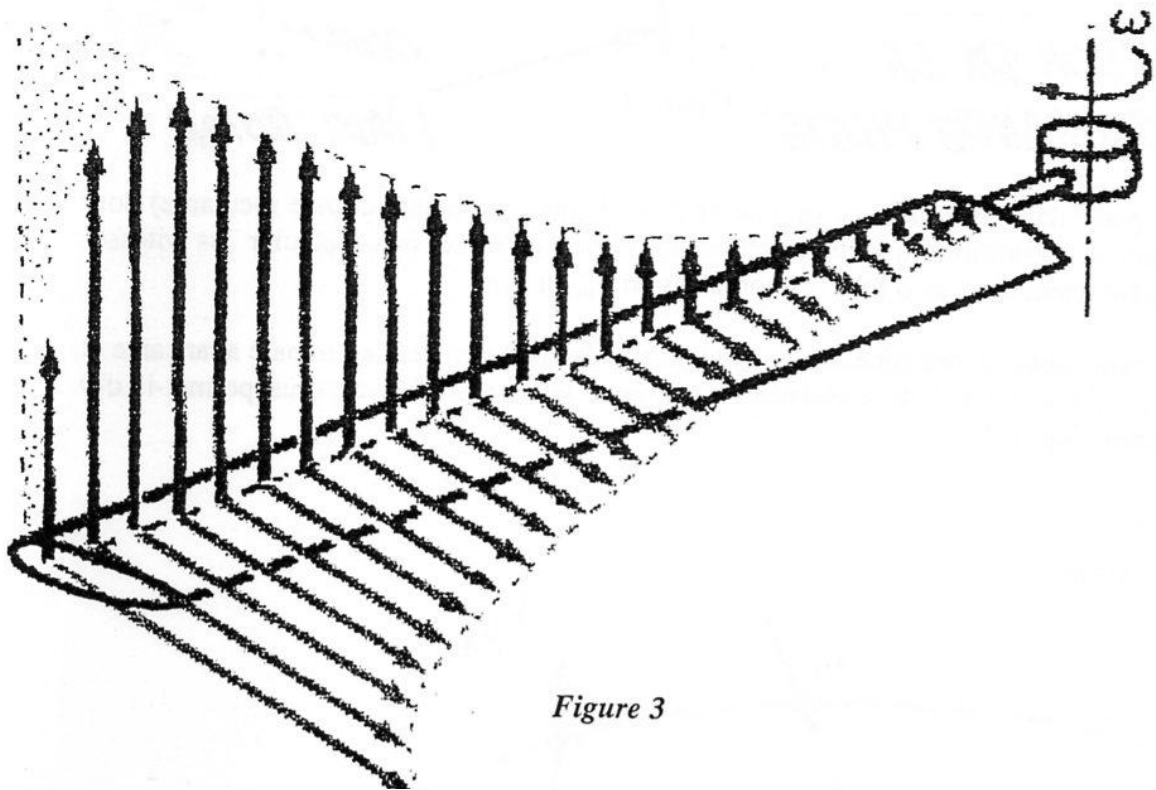


Figure 2 - Profil N. A. C. A. 0012,  $\lambda = \infty$ .

- 4 - Calculer le rayon d'application  $R^*$  de cet effort résultant en écrivant l'égalité des moments par rapport au centre de rotation :

$$F_p R^* = \int_0^{Re} r \cdot dF_z$$

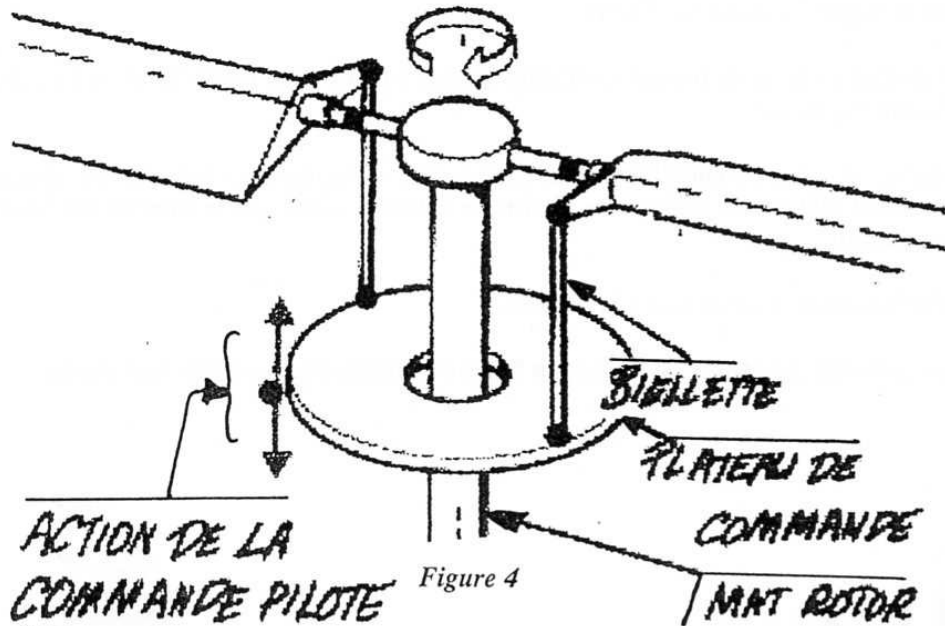
- 5 - Partant de la traînée élémentaire, définir dans les mêmes conditions, l'expression du couple résistant  $C_r$  exercé sur l'arbre.
- 6 - En se plaçant au point de finesse maximale, définir, à partir de la figure 2, les valeurs des coefficients  $C_z$  et  $C_x$ .
- 7 - Déterminer la vitesse d'entraînement du rotor pour  $r = Re$ , destinée à porter une charge totale de 40 000 N. En déduire la vitesse de rotation, ainsi que le nombre de Mach correspondant.
- 8 - Calculer la puissance nécessaire à la rotation.
- 9 - L'allure générale des efforts est donnée en figure 3. Commenter les différentes allures.



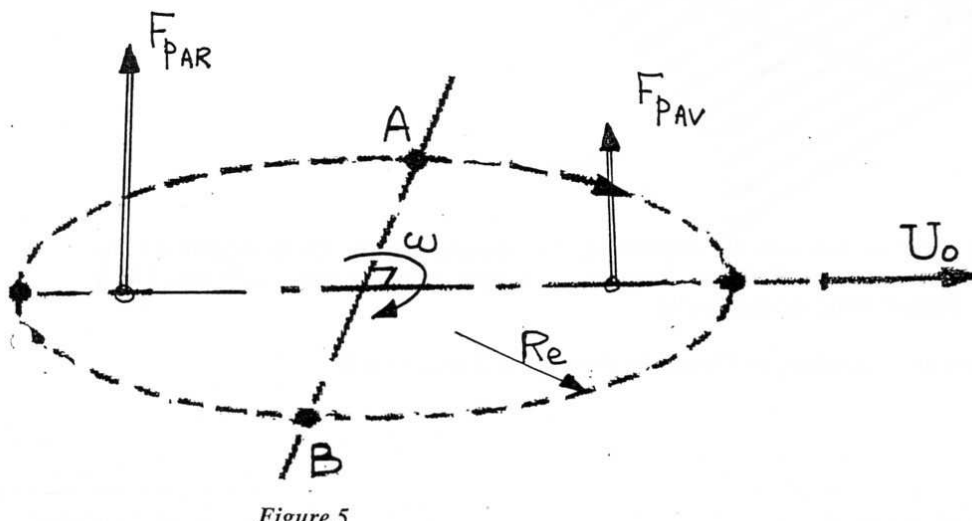
- 10 - A partir du théorème des Quantités de mouvement, calculer  $C_o$  en rapport avec la portance totale de 40 000 N. Pour cela, on supposera que la vitesse débitante, loin à l'amont du rotor, est négligeable.
- 11 - Revenir sur la validité de l'hypothèse formulée en 3 pour  $Re$  et  $R^*$ .

## II – VOL AVEC TRANSLATION

La vitesse de déplacement de l'hélicoptère est désignée par  $U_0$ . L'avancement est obtenu par variation, sur un tour, de l'angle de calage de la pale par l'intermédiaire de l'inclinaison du plateau de commande (figure 4). Cette inclinaison s'effectue dans le plan de symétrie de l'hélicoptère, elle provoque une dissymétrie de la portance avant-arrière (figure 5) qui conduit à l'inclinaison du plan de rotation (figure 6).



- 12 - On se place dans les positions angulaires A et B (pale avançante et pale reculante) pour les mêmes conditions que précédemment. Pour  $U_0 = 80$  m/s, calculer les vitesses d'entraînement en A et B puis les portances en  $F_{pA}$  et  $F_{pB}$ .
- 13 - Quels problèmes seront générés par cette dissymétrie de portance entre pale avançante et pale reculante en vol de translation. Comment le dispositif ci-dessous permet-il d'y remédier (figure 7).



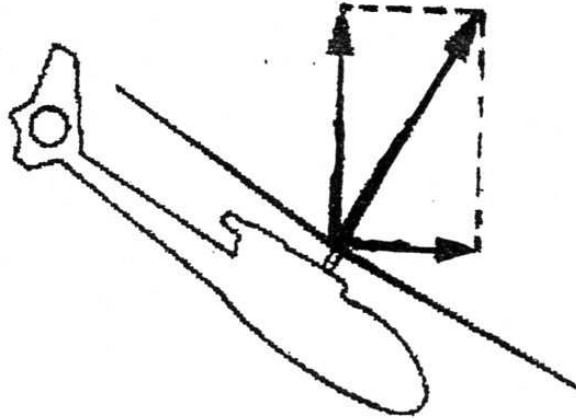


Figure 6

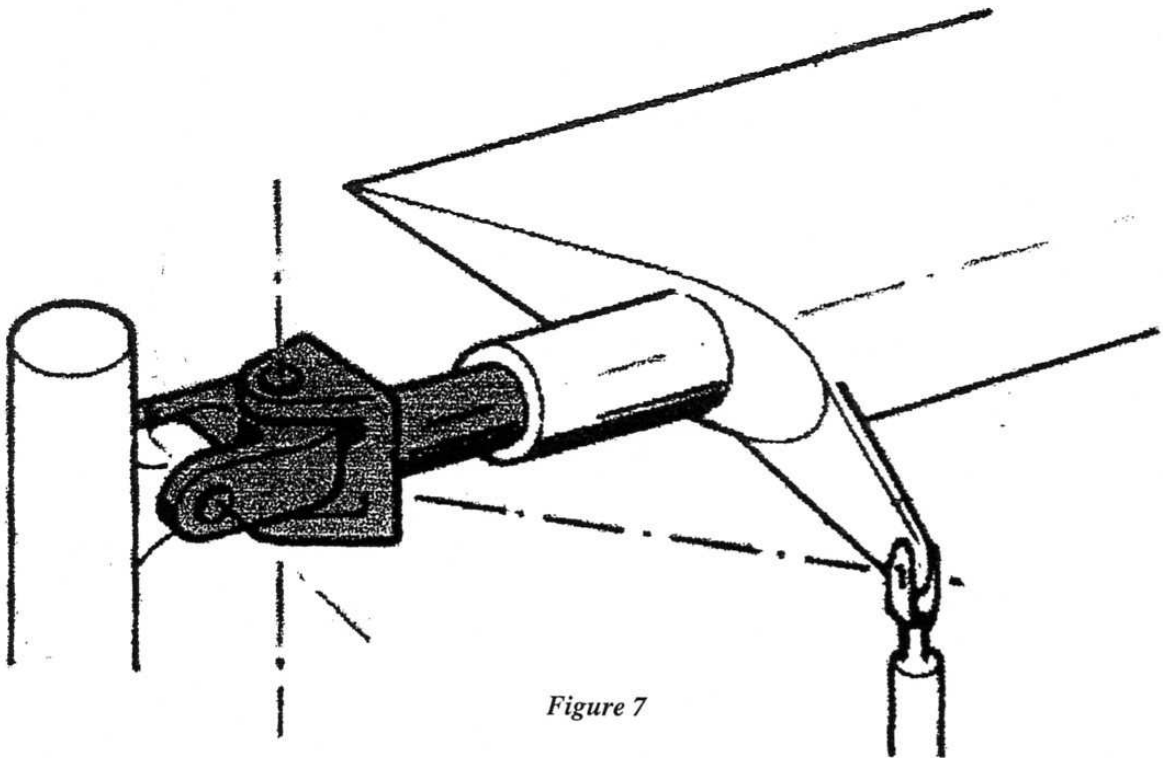


Figure 7

## EXERCICES SE RAPPORTANT AU CHAPITRE B

### PROBLEME I : Etude d'un ventilateur axial

Le figure 1 représente un ventilateur à usage industriel (tunnel de séchage) conçu pour travailler à vitesse de rotation  $N = 2000$  tr/mn et ayant un rayon spécifique  $\Lambda = 0,7$ .

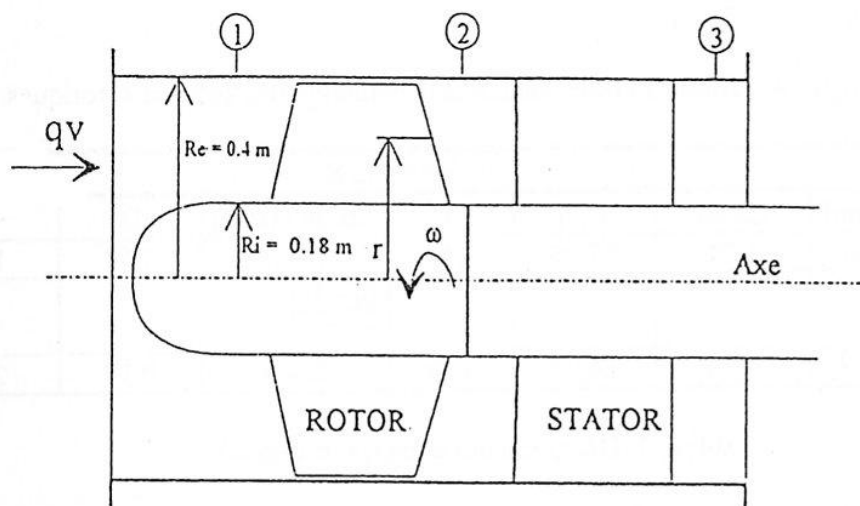


Figure 1

#### PARTIE A.

1.- Trouver à l'aide du diagramme A le couple de valeurs  $(\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m)$ .

$$(\bar{\alpha}_m =$$

$$\bar{\beta}_m) =$$

2.- faire une analyse critique de ce couple  $(\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m)$ .

3.- Donner le débit de dimensionnement.

$$q_v = \quad [ \quad ]$$

4.- Calculer la hauteur moyenne ou hauteur de dimensionnement.

$$\bar{H} = \quad [ \quad ]$$

5.- Calculer la vitesse spécifique  $\Omega$  de ce ventilateur.

$$\Omega =$$

## PARTIE B.

En suivant l'hypothèse du vortex libre ( $C_{u2} = K_3/r$ ) et pour d'aubages égal à 11 pour le rotor et 17 pour le stator :

6.- Calculer la constance du vortex libre  $K_3$  en prenant un  $\eta_{Hgl} = 1$ .

$$K_3 = \quad [ \quad ]$$

7.- Compléter le tableau I correspondant à la finition des aubages rotoriques.

ROTOR							
r	r [mm]	$C_{z\infty 0}$	$\gamma [^\circ]$	$\sigma$	Corde 1 [mm]	D	$\varepsilon_2 [^\circ]$
Ri	180	1,74	37,26	1,45	148,1	0,59	1,64
$\bar{R}$					$\left(\frac{l_i + l_e}{2}\right)$		
Re	400	0,16	69,30	0,98	224,3	0,19	2,67

Tableau I : Définition des aubages rotoriques.

8.- Compléter le tableau II correspondant à la finition des aubages statoriques au rayon moyen.

STATOR							
r	r [mm]	$C_{z\infty 0}$	$\gamma [^\circ]$	$\sigma$	Corde 1 [mm]	D	$\varepsilon_2 [^\circ]$
$\bar{R}$						0,46	

Tableau II : Définition des aubages statoriques.

## PARTIE C.

Réaliser un calcul approché (seulement au rayon moyen) des éléments suivants :

9.- Rendement moyen  $\bar{\eta}_H$ .

$$\bar{\eta}_H =$$

10.- Hauteur réelle fournie par ce ventilateur H (prendre  $f = 0,02$ ).

$$H = \quad [ \quad ]$$

11.- Rendement global obtenu  $\eta_{Hgl}$ .

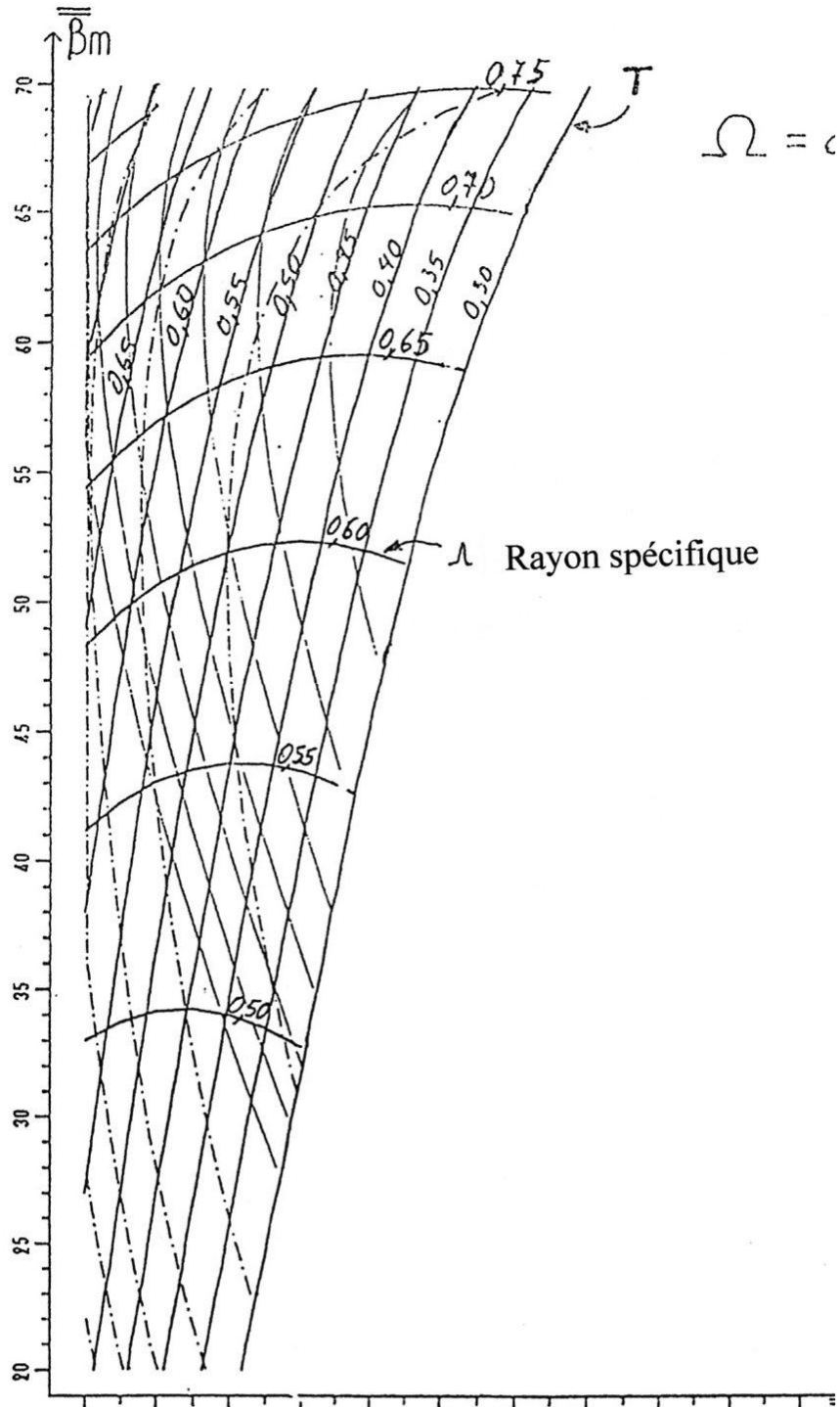
$$\eta_{Hgl} =$$

12.- Fréquence et le niveau de puissance acoustique correspondant au fondamental sachant que la célérité du son est de 343 m/s.

$F_1 =$

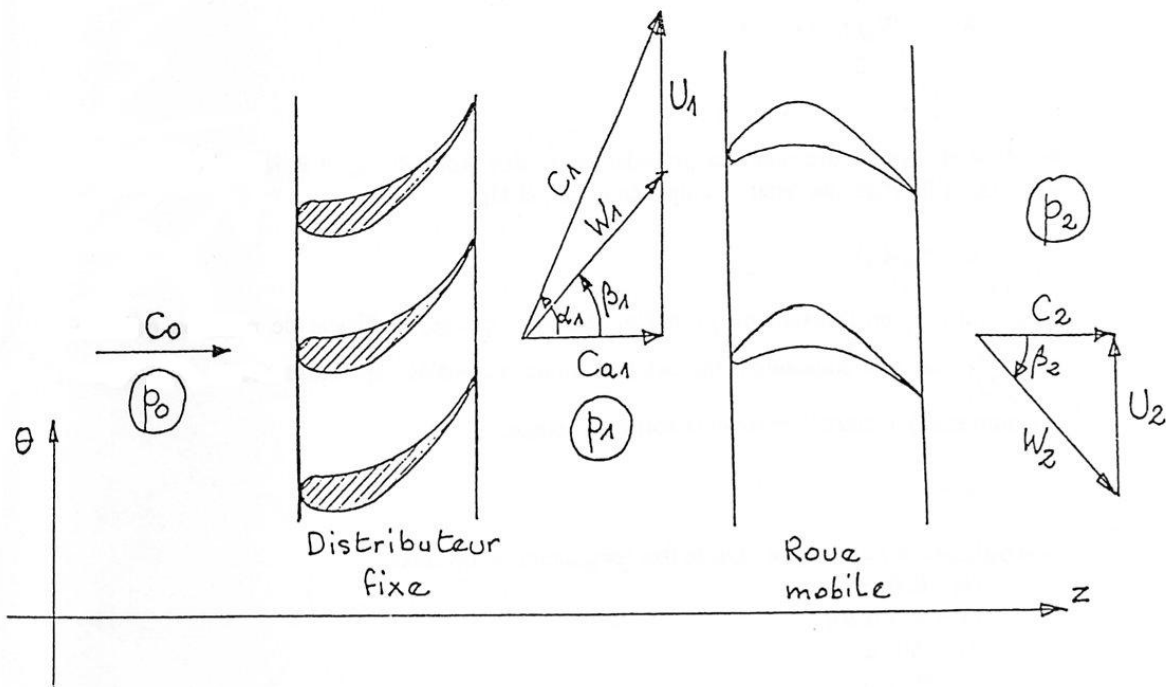
$L_w =$

13.- Quelles solutions pratiques suggérez-vous pour réduire ces nuisances acoustiques ?



## Problème II : Etude d'une turbine hydraulique

La présente étude porte sur un étage de turbine hydraulique à action, turbine de grande puissance massique utilisée dans les applications de transmission de puissance où l'encombrement et la masse sont prépondérants (applications spatiales, pompage diphasique offshore, etc.). L'étage est constitué d'un distributeur (grille fixe) et d'une roue tournant à la vitesse de rotation  $N$  (grille mobile). L'envergure des aubages est constante de l'entrée à la sortie de l'étage et égale à  $b$ . Une coupe cylindrique effectuée au rayon moyen  $R$  de l'ailetage forme les deux grilles suivantes.



### A - Conditions nominales de fonctionnement (4 points)

En phase de dimensionnement et dans les conditions nominales, on retient les hypothèses suivantes :

- Le fluide est parfait et incompressible
- L'écoulement est permanent et axisymétrique
- les vitesses absolues sont axiales à l'entrée du distributeur et en sortie de roue.

La roue à action a pour particularité de n'être soumise à aucune poussée axiale ce qui simplifie la réalisation du palier-butée.

1 - Calculer la vitesse débitante  $C_a$  en fonction du débit  $q_v$ , de l'envergure  $b$  et du rayon  $R$

$$C_a =$$

2- Calculer  $\tan \beta_1$  et  $\tan \beta_2$  en fonction de  $\tan \alpha$  et  $\varphi = \frac{C_a}{U_1}$  le coefficient de débit (on prendra les angles positifs dans le sens trigonométrique).

$$\operatorname{tg}\beta_1 =$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 =$$

3- En supposant la rothalpic constante, définir la relation entre  $W_1$  et  $W_2$  pour respecter la condition d'équilibre axial de la roue ( $p_1 = p_2$ ). En déduire  $\operatorname{tg}\beta_2$  en fonction de  $\operatorname{tg}\beta_1$ .

$$W_1 = f(W_2) =$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 =$$

4- Montrer à partir des relations précédentes ou des propriétés géométriques des triangles de vitesses qu'il existe une relation simple entre  $Cu_1$  et  $U_1$  :

$$Cu_1 = g(U_1) =$$

5- Calculer  $\pi$  en fonction de  $p_o$  et  $Cu_1$ . Montrer que le coefficient de pression' défini par  $\Psi = \frac{\Delta p}{\rho U_1^2}$  est une constante dans ces conditions nominales.  $\Delta p$  représente la différence de pression statique entre l'entrée et la sortie de l'étage.

$$\Psi =$$

**6- Application numérique** On se fixe les grandeurs suivantes :

$$N_0 = 6000 \text{tr/mn}$$

$$q_v = 370 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\Delta p = 50 \text{ bars}$$

$$R = 80 \text{ mm}$$

$$b = 4 \text{ mm}$$

Calculer les éléments cinématiques suivants :

$$U_1 =$$

$$Ca =$$

$$\varphi =$$

$$\beta_2 =$$

$$\beta_1 =$$

$$\alpha_1 =$$

$$\Psi =$$

Calculer la puissance théorique  $P_{th}$  cédée à l'étage dans ces conditions. En conclure quant à la puissance massique de la turbine. Quel est selon vous son inconvénient majeur.

$$P_{th} =$$

### **B - Fonctionnement hors nominal (3 points)**

Dans cette parité, le débit est supposé constant et la vitesse de rotation varie en fonction du couple, résistant exercé sur l'arbre.

Dans le triangle de vitesses situé à l'amont de la roue, l'angle  $\alpha$  reste constant et l'angle  $\beta_1$  peut varier. En sortie de roue, la vitesse absolue n'est donc plus axiale.

1- En se référant au point nominal défini numériquement à la question A-6, calculer par le modèle de Ruden l'angle de portance nulle  $\tau$  de la grille rotorique pour un serrage des profils égal à l'unité.

2- Pour deux vitesses hors nominal, l'une correspondant à  $N_1 = 0,8 N_0$  et l'autre à  $N_2 = 1,2 N_0$ , dresser le tableau numérique suivant :

	$\beta_1$ (°)	$\beta_2$ (°)	$C_{u2}$ m/s	$\Delta p$ bars	$C_{th}$ mN	$P_{th}$ kW
$N_1$						
$N_2$						

On calculera  $\Delta p$  par la relation d'Euler simplifiée :

$$\Delta p = \rho U_1 (C_{1r} - C_{u2})$$

$C_{th}$  représente le couple moteur et  $P_{th}$  la puissance.

### **C – Etude de la grille rotorique (3 points)**

$$W_1 = W_2 = 72 \text{ m/s}$$

$$\beta_1 = 45^\circ$$

$$\beta_2 = 45^\circ$$

1- Le maillage donné sur la figure ci-dessous représente les lignes de courant et les équipotentielles avec un pas identique. En se référant à l'échelle du dessin, définir sur le maillage la vitesse maximale  $W_{max}$  et la vitesse minimale  $W_{min}$ . Calculer ces valeurs et les localiser sur la figure.

$$W_{max} =$$

$$W_{min} =$$

2- Compte-tenu de la déflexion produite, calculer la circulation  $\Gamma$  associée à chaque aubage.

$$\Gamma =$$

3- Dédire de la relation de Joukovski l'effort de portance  $F_z$  une envergure  $b = 4 \text{ mm}$ .

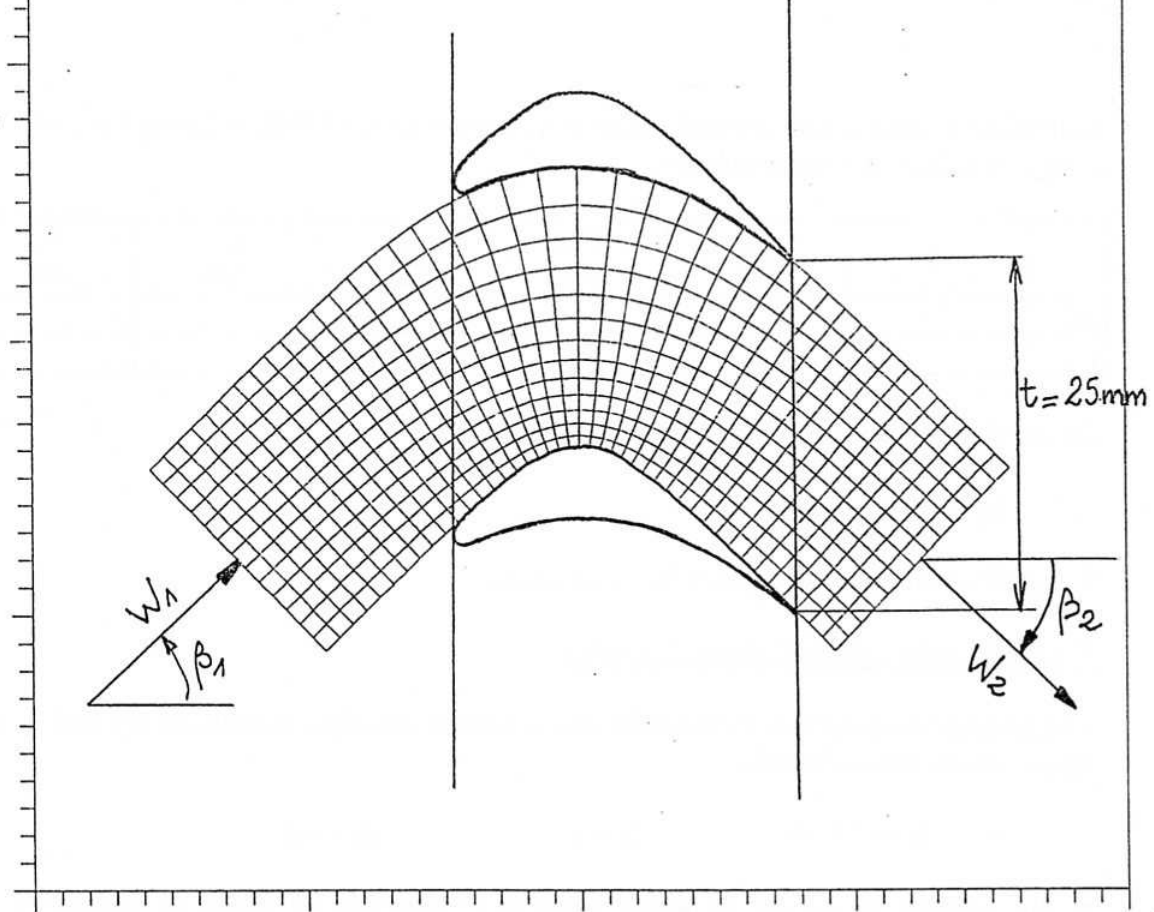
$$F_z =$$

4- Pour 20 aubages enroulés au rayon moyen  $R = 80 \text{ mm}$ , calculer le couple et la puissance théorique cédée à la roue à la vitesse de rotation de 6000 tr/mn.

$$C_{th} =$$

$$P_{th} =$$

# Maillage en iso $\Psi$ et iso $\Phi$



## Problème 4

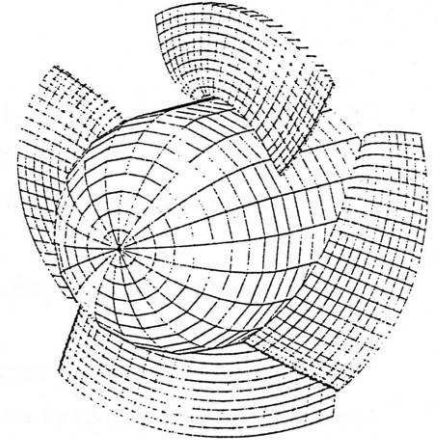
### ETUDE D'UNE POMPE AXIALE

Le point de calcul d'une pompe axiale (figure ci-dessous est le suivant :

$$H = 4,75$$

$$q_v = 293,1 \text{ l/s}$$

$$N = 1000 \text{ tr/mn}$$



En se fixant le couple  $\overline{\alpha_m} = 21^\circ$ ,  $\overline{\beta_m} = 70^\circ$ , et en supposant :  $\overline{\alpha_r} = 1,8^\circ$  et  $\overline{\alpha_g} = 1,4^\circ$ .

#### I – DIMENSIONNEMENT GLOBAL.

- 1.- Calculer le rayon extérieur  $R_e$  et le rayon du moyeu  $R_i$ .
- 2.- Pour 4 aubages au rotor et en suivant le vortex libre, calculer au rayon le profil (Cambrure  $Cz_{\infty 0}$ , angle de calage  $\gamma$ , serrage  $\sigma$  et corde  $l$ ) pour un facteur de diffusion de 0,33. Prendre  $\eta_{Hgl} = 0,926$ .

#### II – CALCUL DE L'AUBAGE.

Pour des questions de facilité de réalisation le profil obtenu précédemment est conservé (en cambrure et corde) tout le long du rayon.

- 3 - En traçant les triangles de vitesses en  $R_e$ , calculer les valeurs suivantes (On supposera la vitesse axiale uniforme) :

$$Cu_2(R_e)$$

$$\gamma(R_e)$$

- 4 - Donner l'évolution de  $Cu_2$  et préciser le type de vortex ainsi réalisé.

### III - CAVITATION.

5 - Calculer au débit nominal le NPSH requis de la pompe sachant que la section au col est égale à  $S_c = 0,37 S_1$ ,  $S_1$  étant la section d'entrée de l'aubage. Le coefficient de dépression dynamique  $\lambda$  est pris égal à 0,3.

En déduire la vitesse spécifique d'aspiration.

On se propose d'utiliser cette pompe pour pomper de l'eau à 20 °C, dans un réservoir à surface libre dont le niveau est maintenu constant.

6 - Calculer la hauteur maximale d'aspiration de cette pompe dans le cas où le critère de cavitation choisi est d'assurer une marge de 1 mètre entre le NPSH disponible et le NPSH requis de la pompe au point nominal. La pompe est-elle en aspiration ou en charge.

On retiendra, pour ce calcul, les conditions suivantes :

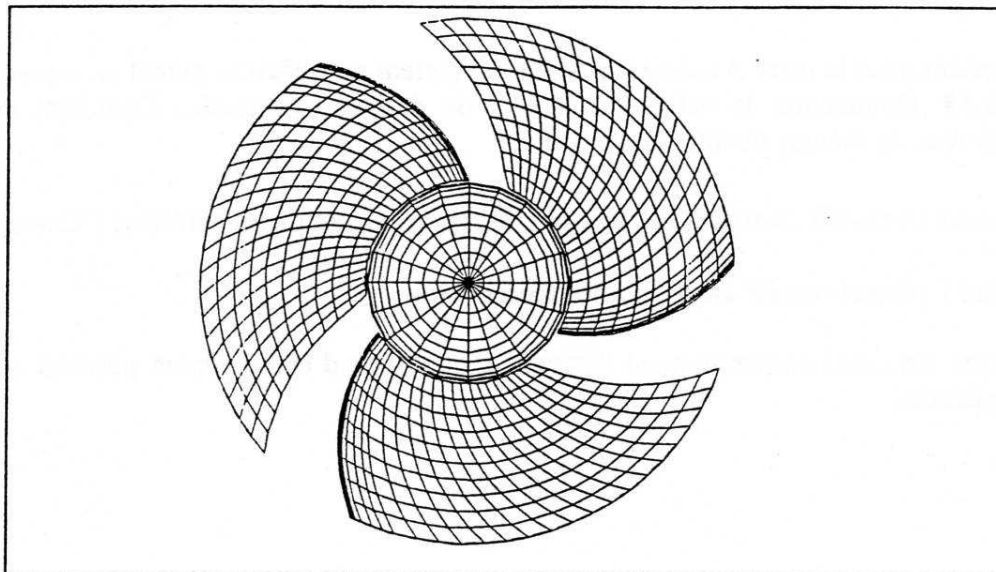
La tension de vapeur saturante  $\frac{P_v}{\rho g} = 0,2 \text{ m}$ .

La pression atmosphérique  $\frac{P_{atm}}{\rho g} = 10,2 \text{ m}$ .

La perte de charge entre le plan d'eau et l'entrée de la pompe est négligée.

#### Problème IV – Deuxième partie

Dans cette deuxième partie, on se propose de poursuivre le dimensionnement du propulseur nécessaire à cette application navale. La figure ci-dessous schématise la vue de face de cette machine.



Vue de face du propulseur.

La partie active génératrice de la pression sera assimilée à une pompe supposée immobile (point fixe avec  $V_0 = 0$ ), dont le cahier des charges est le suivant :

$$H = 7,84 \text{ m}$$

$$q_v = 2190 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$N = 1431 \text{ tr/min}$$

1 - Calculer la vitesse spécifique et rappeler l'importance de celle ci dans le dimensionnement des pompes.

2 - On se propose de réaliser cette pompe en vortex constant; commenter les avantages et inconvénients liés aux trois types de vortex élémentaires.

3 - On retient le couple  $(\overline{\alpha_m}, \overline{\beta_m})$  ci dessous,

$$\overline{\alpha_m} = 19,5^\circ$$

$$\overline{\beta_m} = 73^\circ$$

Faire une analyse critique de ce couple.

4 - Calculer les dimensions principales de la pompe, à savoir, le rayon intérieur ( $R_i$ ) et le rayon extérieur ( $R_e$ ). On adoptera  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1,2^\circ$ .

5 - Pour un rendement hydraulique global  $\eta_{Hgl} = 0,874$  et en supposant, à la sortie du rotor et au rayon moyen que la vitesse axiale est égale à la vitesse moyenne, calculer la distribution radiale de la vitesse axiale à la sortie du rotor pour le vortex proposé.

6 - On retient pour le rotor 3 aubages ainsi qu'un facteur de diffusion global au rayon extérieur égal à 0,18. Commenter la valeur du facteur de diffusion proposée. Comment définir les valeurs limites du facteur de diffusion ?

7 - Toujours en vortex constant, calculer la grille rotorique au rayon extérieur ( $C_{z\infty 0}, \gamma, \sigma$ )

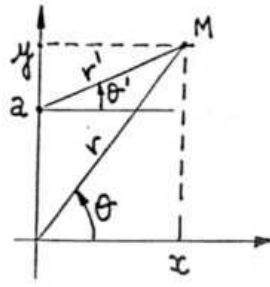
8 Donner l'encombrement axial du rotor ainsi obtenu.

9 - Compte-tenu de l'encombrement disponible, quel type d'entraînement pourrait convenir à cette application.

- E -

**ANNEXES ET RAPPELS**

### R.9. - Changement de repère



$$r' = \sqrt{x^2 + (y - a)^2}$$

$$\theta' = \text{arc tg } \frac{y - a}{x}$$

### R.10. - Rappel

$$\text{arc tg } a - \text{arc tg } b = \text{arc tg } \frac{a - b}{1 + ab}$$

### R.11. - Rappel

$$f = \text{arc tg } u \quad df = \frac{du}{1 + u^2}$$

### R.12. - Rappels

$$\int \frac{dx}{(x - a)^n} = -\frac{1}{(n - 1)(x - a)^{n-1}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{arc tg } \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{xdx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2)$$

**R.13. - En utilisant les relations suivantes :**

$$\left| \begin{array}{l} \cos(\alpha + 2\beta) = \cos \alpha \cos 2\beta - \sin \alpha \sin 2\beta \\ \sin(\alpha + 2\beta) = \sin \alpha \cos 2\beta + \cos \alpha \sin 2\beta \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta \\ \cos 2\beta = 1 - 2 \sin^2 \beta = 2 \cos^2 \beta - 1 \end{array} \right.$$

On obtient :

$$\left| \begin{array}{l} Co \left[ 2 \cos \alpha \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \beta \right] = \sin \beta \frac{\Gamma}{2\pi a} \\ Co \left[ 2 \sin \alpha \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \right] = \cos \beta \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{array} \right.$$

conduisant à la même relation :

$$2 Co \sin(\alpha + \beta) = \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

soit :  $\Gamma = 4\pi a Co \sin(\alpha + \beta)$

**R.14. - Mouvement relatif**

Ecrivons l'irrotationnalité de l'écoulement absolu :

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{C}} = 0$$

En coordonnées cylindriques, cette relation vectorielle s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{C}} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial C_a}{\partial \theta} - \frac{\partial C_u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_a}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r C_u)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial C_r}{\partial \theta} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

- F -

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

## 1) OUVRAGES GENERAUX

- 101 - R. COMOLET : « Mécanique expérimentale des fluides »  
1982 - Ed. Masson - Paris
- 102 - R. OUZIAUX et J. PERRIER : « Mécanique des fluides appliquée »  
1972 - Ed. Dunod - Paris
- 103 - A. HOUBERECHE : « Les turbines »  
1972 - Ed. Vander - Louvain
- 104 - KARASSIK : « Pump Handbook »  
1976 - Ed. Mc Graw Hill Co - New York
- 105 - I. RYHMING : « Dynamique des fluides »  
1985 - Ed. Presses Polytechniques Romandes
- 106 - G.T. CSANADY : « Theory of turbomachinery »  
1964 - Ed. Mc Graw Hill Co - New York
- 107 - G. MEAUZE et A. CARRERE : « Etude aérodynamique de l'écoulement dans les aubages de machines tournantes »  
1984 - Cours à l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace
- 108 - F. LEBOEUF, R. VOUILLARMET, P. FERRAND : « Aérothermodynamique des turbomachines »  
Cours de l'Ecole Centrale de Lyon
- 109 - B. LAKSHINARAYANA : « An assessment of computational fluid dynamic techniques in the analysis and design of turbomachinery »  
1991 - Journal of Fluid Engineering - ASME - Vol. 113
- 110 - D. ALTHAUS, F.X. WORTMANN : « Stuttgarter profilkatalog I »  
1981 - Ed. VIEWEG - Wiesbaden
- 111 - F.W. RIEGELS : « Results from wind-tunnel investigations »  
1961 - Ed. Butterworths - London

- 112 - F. GIRERT : « Aérodynamique B2 »  
1977 - Cours du CNAM
- 113 - D. ALTHAUS : « Profilpolaren für den modellflug »  
1980 - Ed Neckar - Verlag - Villingen

## 2) PUBLICATIONS ET COMMUNICATIONS

- 201 - E. BONATAKI, P. CHAVIAROPOULOS, K.D. PAPAILIOU : « An inverse inviscid method for the design of quasi-three-dimensional turbomachinery cascade »  
ASME - journal of Fluids Engineering - March 1993 - Vol. 115
- 202 - Document CETIM - HYD/CD - 85 Ni049  
Mai 1985
- 203 - M.H. FAGARD : « Etude des écoulements décollés en grilles d'aubes en régime sous-sonique compressible »  
Thèse de Doctorat - LEMFI - Paris VI - 1993
- 204 - T.S. LUU, B. VINEY, L. BENCHERIF : « Inverse problem using S2-S1 approach for the design of the turbomachine with splitter blades »  
Revue Française de Mécanique - p. 209-224 - n° 1992.3 - FRANCE
- 205 - A.A. FAY : « Simple performance model for pumps »  
Pumping Machinery - ASME - FED. Vol. 154 - p. 119-125 - 1993
- 206 - M. JAREMCZAK : « Analyse théorique et expérimentale du bruit hydraulique des pompes centrifuges »  
Thèse de Doctorat - Université de Lille - FRANCE - 1992
- 207 - F.C. VISSER, J.J.H. BROUWERS : « Review of status of potential flow calculations in radially bladed pump impellers »  
Pumping machinery - ASME FED. Vol. 154 - p. 219-226 - 1993
- 208 - J. CHAUVIN, R.A. VAN DEN BRAEMBUSSCHE, P. LUBUNGA, C. LOUDET :  
« Calcul de l'écoulement dans le plan circonférentiel d'une roue mixte »  
Institut Von Karman - Rhodes - Belgique - 1973

- 209 - G. ASSASSA et K.D. PAPAILIOU : « An integral method for calculating turbulent boundary layers with separations »  
1979 - ASME - Journal of fluid engineering - Vol. 100 - p. 110-116
- 210 - WU C.H. : « A general theory of three dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial, radial and mixed-flow types »  
NACA - TN 2604 - 1952
- 211 - MARSH M. : « A digital computer program for the through flow fluid mechanics in an arbitrary turbomachine using a matrix method »  
Reports et Memoranda - N° 3509 - 1966
- 212 - BOSMAN C. et MARSH M. : « Improved method for calculating the flow in turbomachine, including a consistent loss model »  
JSME - Vol. 16 - N° 1 - 1974
- 213 - BOSMAN C. et EL SHAARAWI . : « Quasi three dimensional numerical solutions of flow in turbomachines »  
ASME - 1977
- 214 - DAVIS W.R. et MILLAR D. : « A comparison of the matrix and streamline curvative methods of axial flow turbomachinery analysis from a user's point of view »  
ASME - 1975
- 215 - RIBAUD Y. et SOVRANO R. : « Calculs théoriques d'écoulements dans les turbomachines radiales. Calcul de l'écoulement moyen »  
ONERA - NT N° 1/3086 - 1973
- 216 - NOVAK R.A. : « Streamline curvative computing procedures for fluid-flow problems »  
ASME - 1967
- 217 - SENOO Y. et NAKASE Y. : « An analysis of flow through a mixed flow impeller »  
ASME - 1972
- 218 - FROST D. : « A streamline curvature through-flow computer program for analysing the flow through axial-flow turbomachines »  
Reports and Memoranda - N° 3687 - 1970

- 219 - WILKINSON D.H.
- 220 - NOVAK R.A. et HEARSEY R.H. : « A nearly three-dimensional intrablade computing system for turbomachinery »  
ASME - 1977
- 221 - HIRSCH C.H. et WARZEE G. : « A finite element method for the axisymmetric flow computation in a turbomachine »  
INJME - Vol. 10 - 1976
- 222 - HONG TUAN HA : « Etablissement d'un programme de calcul de l'écoulement méridien d'une turbomachine radiale par la méthode des éléments finis »  
Journal de Mécanique Appliquée - N° 4 - 1979
- 223 - DENTON J.D. et SINGH U.K. : « Time marching methods for turbomachinery flows calculation »  
VKI - Lectures series - 1979
- 224 - VEUILLOT J.P. : « Calculation of the quasi-three dimensional flow in a turbomachine blade row »  
ASME - N° 76- GT-56 - 1976
- 225 - CROCCO L. : « A suggestion for the numerical solution of the steady Navier-Stokes equations »  
AIAA - Vol. 3 - N° 10
- 226 - KATSANIS T. : « Computer program for calculating velocities and streamlines on a blade-to-blade surface of a turbomachine »  
NASA - TN 4525 - 1968  
NASA - TN 8430 - 1977
- 227 - WEISS P. : « Etude théorique et expérimentale de la compression diphasique. Application au pompage de liquides aérés »  
1996 - Thèse de Doctorat - LEMFI - ENSAM - Paris
- 228 - BELAMRI T. : « Modélisation des écoulements par la méthode des singularités »  
1994 - DEA Conversion de l'Energie - Filière I - LEMFI - ENSAM - Paris

- 229 - ROUBI M. : « Mise en oeuvre numérique et analyse critique de différents modèles de couche limite »  
1995 - DEA Conversion de l'Energie - Filière I - LEMFI - ENSAM - Paris
- 230 - KUS U. : « Contribution à la prédiction des performances globales et locales des grilles d'aubes »  
1995 - Thèse de Doctorat - LEMFI - ENSAM - Paris
- 231 - HERRIG L., EMERY C., ERWIN R. : « Systematic two dimensional cascade tests of NACA 65 - Series compressor blades at low speeds »  
1957 - NACA TN 3916
- 232 - REY R. : « Méthode générale de détermination d'un étage de turbomachine axiale de compression »  
1981 - Thèse de Doctorat d'Etat - Paris VI
- 233 - NOGUERA R. : « Contribution à la maîtrise du dimensionnement et du fonctionnement des turbomachines axiales - Etude des débits partiels et de la cavitation »  
1987 - Thèse de Doctorat d'Etat - Paris VI
- 234 - BAKIR F. : « Méthode de dimensionnement et d'analyse des machines de compression hélico-centrifuges en régime incompressible »  
1992 - Thèse de Doctorat - LEMFI - ENSAM - Paris
- 235 - KOUIDRI S. : « Etude théorique et expérimentale de l'influence des paramètres constructifs sur les caractéristiques aéroacoustiques des ventilateurs axiaux »  
1993 - Thèse de Doctorat - LEMFI - ENSAM - Paris