



UEE PA6 – IFMAT et MASTER IMCE

**UNITE D'ENSEIGNEMENT
AERO-HYDRODYNAMIQUE INTERNE DES MACHINES**

TOME III

MACHINES CENTRIFUGES ET HELICO CENTRIFUGES

Novembre 2008

**R. REY – Professeur
F. BAKIR - Professeur**

- A -
TRAITEMENT GENERAL
DES EQUATIONS DE L'ECOULEMENT DANS LES
TURBOMACHINES

| | |
|--|--------------|
| I - PROPRIETES DU MOUVEMENT RELATIF | p. 6 |
| 1.1. Equation de continuité | |
| 1.2. Fonction potentiel | |
| 1.3. Equation dynamique en mouvement relatif | |
| II - ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL EN FLUIDE PARFAIT | p. 15 |
| III - MODELISATION EN FLUIDE REEL | p. 19 |
| 3.1. Projections de l'équation dynamique | |
| 3.2. Expressions en fonction de la géométrie de la machine | |
| 3.3. Equation intrinsèque | |
| IV - MODELE QUASI-TRIDIMENSIONNEL | p. 26 |
| 4.1. Ecoulement méridien moyen | |
| 4.2. Ecoulement aube à aube | |
| 4.3. Transformation en grille plane | |
| V - METHODES NUMERIQUES | |
| 5.1. Différences finies | |
| 5.2. Maillages | |

TRAITEMENT GENERAL DES EQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT DANS LES TURBOMACHINES

L'écoulement dans les turbomachines est généralement tridimensionnel, instationnaire, visqueux et turbulent.

Les équations applicables dans une roue, un redresseur, sont déjà établies, il s'agit de l'équation de continuité et de l'équation dynamique (Navier-Stokes). En fluide compressible, on rajoute à ce système l'équation de l'énergie et l'équation d'état du fluide.

La complexité du système d'équations obtenu exige un certain nombre de simplifications pour résoudre celles-ci dans un temps raisonnable.

Dans le cadre du problème direct, on sépare généralement l'écoulement en deux zones :

- les zones visqueuses situées au voisinage immédiat des parois : aubages, enveloppes : moyeu et carter extérieur,
- la zone saine où l'écoulement peut être considéré comme proche d'un écoulement en fluide parfait.

Ainsi, le calcul en mouvement relatif est effectué en plusieurs étapes :

- Une première étape traite le problème en fluide parfait : rotationnel dans les zones traversant les aubages de la roue mobile, irrotationnel pour le reste de l'écoulement.
- La seconde étape utilise les résultats de la première pour définir la géométrie des couches limites de parois et introduire les modèles de pertes : les frottements à la surface des aubages et des enveloppes, les pertes de désadaptation d'incidence et, éventuellement, les pertes secondaires liées aux jeux de fonctionnement.

Suivant la précision attendue, le calcul est soit arrêté à ce stade, soit recommencé à la première étape en écrivant les conditions aux frontières non plus à la surface des aubages et des enveloppes, mais à la surface de déplacement des couches limites.

Pour simplifier encore, on imposera un certain nombre d'hypothèses en supposant notamment l'écoulement permanent en moyenne et généralement axisymétrique.

Cette dernière simplification permet de considérer des surfaces de courant à symétrie de révolution, ce qui n'est réellement justifié que dans certaines machines axiales.

Malgré ces simplifications, l'aspect tridimensionnel de l'écoulement ne permet pas d'envisager de solution rapide du système d'équation sans avoir recours aux méthodes numériques s'appuyant sur les moyens de calcul les plus puissants.

En 1952, Wu a proposé un modèle quasi-tridimensionnel décomposant l'écoulement tridimensionnel en deux éléments bidimensionnels :

- **l'écoulement méridien** obtenu dans le plan (r, z) passant par l'axe de rotation de la machine et permettant de définir les nappes de courant (figure 1) ;

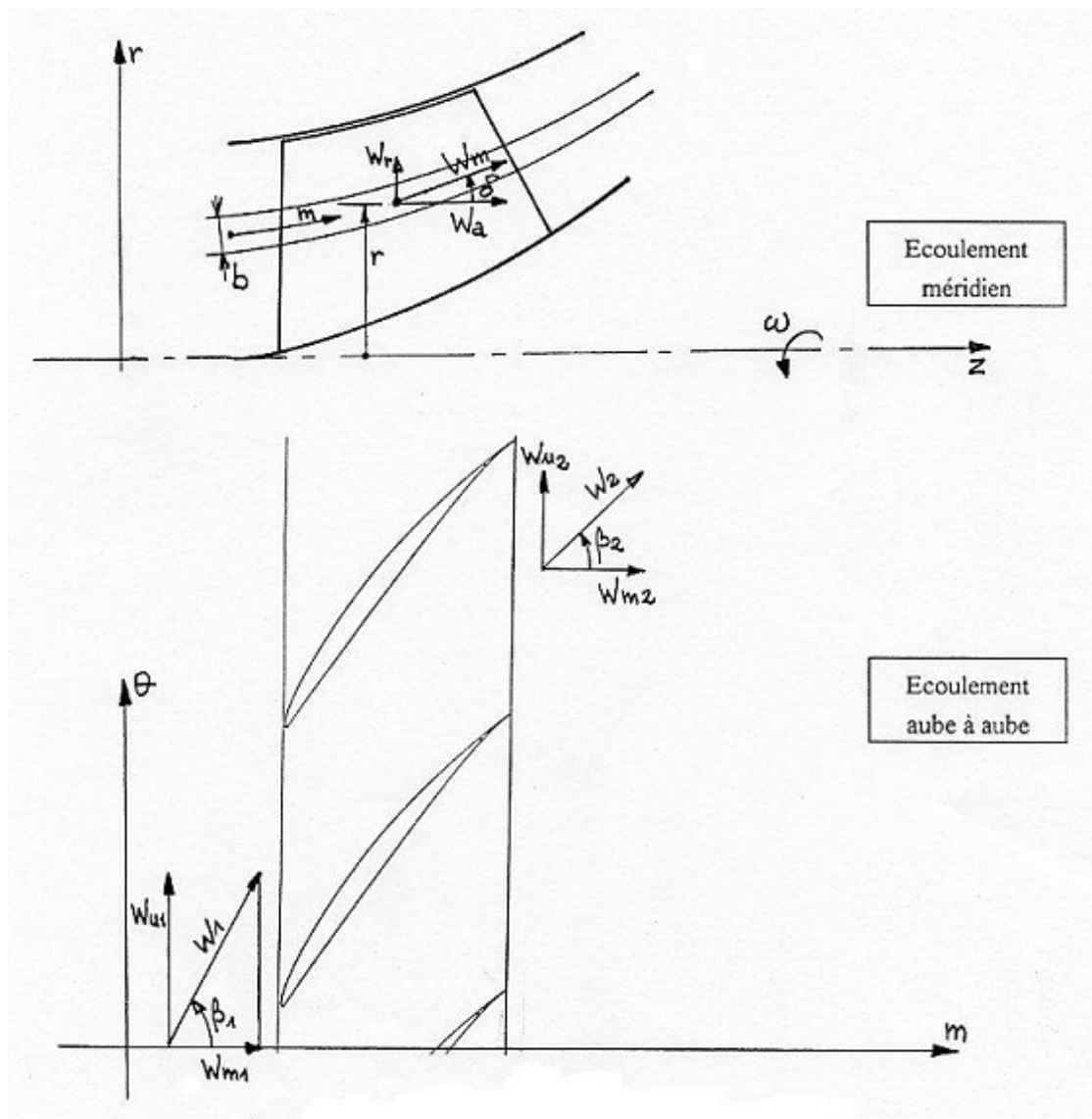


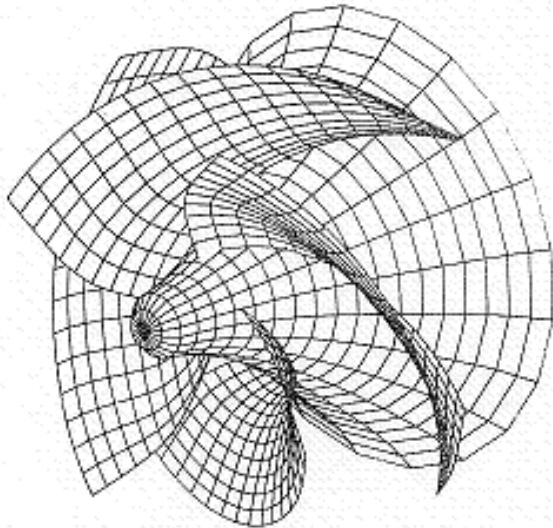
Figure 1 : Décomposition de l'écoulement tridimensionnel en deux écoulements bidimensionnels

- **l'écoulement aube à aube** obtenu dans le plan (m, θ) pour les divers tubes de courant définis dans l'étape précédente.

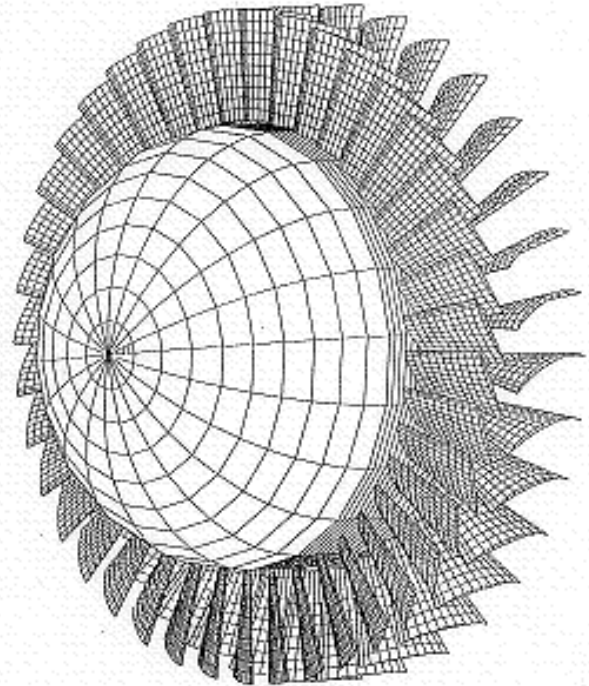
L'étude de l'écoulement aube à aube est grandement facilitée en ramenant celui-ci à un écoulement en grille d'aubes plane. Cette opération peut s'effectuer par l'intermédiaire d'une transformation conforme.

Suivant la précision attendue, il convient de mener cette étude sur 10 à 20 tubes de courant.

En fluide compressible, pour lequel la masse volumique varie non seulement avec la pression générée par la machine mais également avec la température, dépendant à la fois de la compression, des échanges avec l'extérieur et des pertes génératrices d'entropie, il est nécessaire de corriger l'écoulement méridien en fonction des résultats obtenus en écoulement aube à aube et ainsi de suite jusqu'à convergence complète de l'ensemble.



Roue de pompe hélico-centrifuge



Rotor et stator d'un compresseur axial

I - PROPRIETES DU MOUVEMENT RELATIF

En présence d'aubages animés d'un mouvement d'entraînement $\vec{U} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, correspondant à la mise en rotation du rotor à la vitesse angulaire ω , on introduit la notion de vitesse relative \vec{W} . En respectant les règles de composition des champs de vitesses, la vitesse relative \vec{W} sera issue la relation vectorielle :

$$\vec{C} = \vec{U} + \vec{W} \quad (1)$$

La vitesse absolue \vec{C} correspond à la vitesse d'une particule fluide mesurée dans le repère fixe. Dans le repère mobile lié au rotor, la même particule sera animée de la vitesse \vec{W} . L'introduction de la vitesse relative permet de ramener l'étude de l'écoulement autour des aubages mobiles à celle de l'écoulement autour des mêmes aubages immobilisés artificiellement. Ainsi, sur le plan purement cinétique, on peut supposer dans une première approximation que l'ensemble des relations établies avec la vitesse absolue \vec{C} peuvent être utilisées en remplaçant \vec{C} par la vitesse relative \vec{W} grâce à laquelle on vérifiera notamment la condition de glissement sur les aubages.

Cette manipulation n'est pourtant justifiée que dans le cas restreint des équations qui ne sont pas fondées sur l'hypothèse d'irrotationnalité de l'écoulement. Pour les autres, et notamment celles faisant appel à la fonction potentiel ϕ , une correction faisant intervenir la vitesse instantanée de rotation $\vec{\omega}$, est nécessaire.

Introduite par Stodola, cette particularité de l'écoulement relatif est décrite par la relation générale :

$$\text{rot } \vec{C} = \text{rot } \vec{W} + 2 \vec{\omega} \quad (2)$$

montrant que si l'écoulement absolu est irrotationnel, l'écoulement relatif est quant à lui rotationnel :

$$\text{rot } \vec{W} = -2 \vec{\omega} \quad (3)$$

Relation qui s'écrit aussi d'après l'annexe R.14 :

$$\text{rot } \vec{W} = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial W_a}{\partial \theta} - \frac{\partial W_u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_a}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r W_u)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} = -2\omega \end{cases} \quad (4)$$

Les conséquences sont nombreuses :

* Partant d'un écoulement absolu (aubages réellement immobiles), l'écoulement relatif ne peut être obtenu qu'en superposant à celui-ci un tourbillon d'intensité $-\bar{\omega}$ appelé tourbillon relatif.

* Le transfert énergétique entre les aubages et le fluide peut donc s'effectuer par l'intermédiaire de la circulation (machines axiales), du tourbillon relatif (machine centrifuge) ou encore par les deux modes à la fois (machines hélico-centrifuges).

* La présence de ce tourbillon confère à l'écoulement relatif inter-aubages ses propriétés essentielles :

- non axisymétrique ($\partial/\partial\theta \neq 0$)

- non permanent mais de caractère périodique s'illustrant par les relations :

| |
|--|
| $W(r, z, \theta) = W\left(r, z, \theta + \frac{2\pi}{Na}\right)$ |
| $C(r, z, \theta) = C\left(r, z, \theta + \frac{2\pi}{Na}\right)$ |

où Na représente le nombre d'aubages.

Suivant les applications, on peut considérer l'écoulement comme permanent en moyenne.

* L'existence du tourbillon relatif est à l'origine du glissement, particulièrement important dans la prévision des performances des machines centrifuges et hélico-centrifuges.

1.1. Equation de continuité

On se place dans le cas général de l'écoulement dans l'espace inter-aubages correspondant à une grille d'aube tridimensionnelle dans laquelle on fait apparaître en coordonnées cylindriques les composantes des vitesses absolue \vec{C} , relative \vec{W} et d'entraînement \vec{U} :

$$\vec{C} \begin{cases} C_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \\ C_u = \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} \\ C_a = \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{cases} \quad \vec{W} \begin{cases} W_r \\ W_u \\ W_a \end{cases} \quad \vec{U} \begin{cases} 0 \\ U = \omega r \\ 0 \end{cases}$$

L'écoulement absolu étant irrotationnel, la vitesse \vec{C} dérive d'un potentiel ϕ comme l'indiquent ses composantes C_r , C_u et C_a .

La figure 2a fait apparaître la vue méridienne et la vue de face de la grille d'aube retenue. On définit dans cette figure trois directions particulièrement importantes :

- la direction m décrivant une ligne de courant méridienne, la composante méridienne C_m assurant le débit et l'angle δ formé entre la direction méridienne et l'axe Oz .

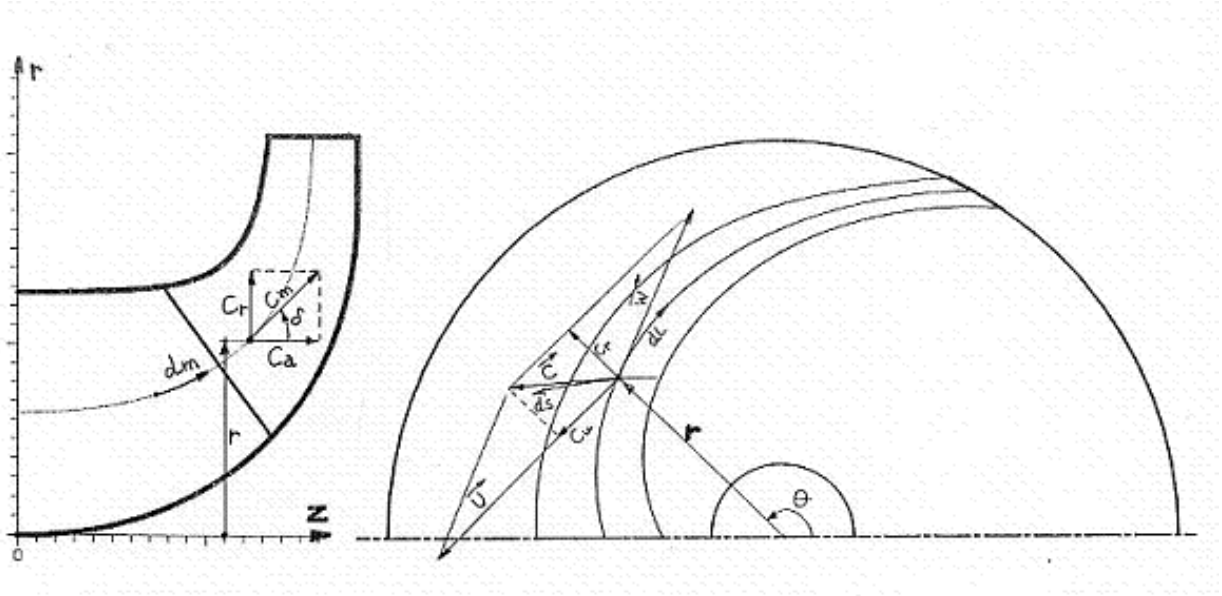


Figure 2a : vue méridienne et vue de face

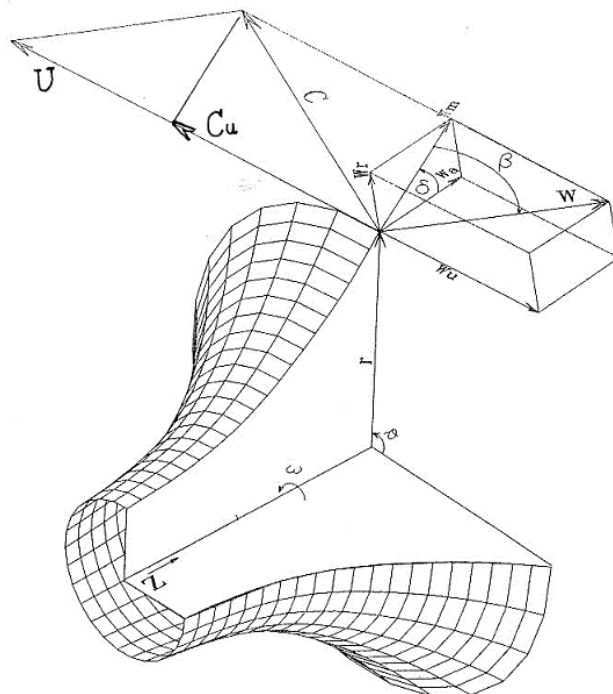


Figure 2b : écoulement dans une grille tridimensionnelle

- la direction dl correspondant à la ligne de courant relative,
- la direction ds correspondant à la ligne de courant absolue.

Attention, seules les composantes U, Cu et Wu sont en vraie grandeur sur la vue de face de la figure 2a.

De ces figures, on déduit les relations géométriques suivantes :

| | |
|--|-----|
| $\begin{aligned} C_r &= C_m \sin \delta & dr &= dm \sin \delta \\ C_a &= C_m \cos \delta & dz &= dm \cos \delta \\ C_m &= W_m \end{aligned}$ | (5) |
|--|-----|

La loi de composition des vitesses donne la liaison entre les composantes des différentes vitesses :

$$\vec{C} = \begin{cases} C_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = W_r \\ C_u = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = U + W_u = \omega r + W_u \\ C_a = \frac{\partial \phi}{\partial z} = W_a \end{cases} \quad (6)$$

Reprenons la forme (A-18) de l'équation de continuité en coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{C}) = 0} \quad (7)$$

ou
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r C_r) + \frac{\partial(\rho C_u)}{r \partial \theta} + \frac{\partial(\rho C_a)}{\partial z} = 0$$

En reportant les composantes Cr, Cu, Ca issues de (6) dans l'équation de continuité et en remarquant que :

$$\frac{\partial(\rho \omega r)}{r \partial \theta} = 0$$

celle-ci se transforme en :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r W_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho W_u)}{r \partial \theta} + \frac{\partial(\rho W_a)}{\partial z} = 0$$

ou
$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{W}) = 0} \quad (8)$$

L'équation de continuité s'écrit donc de façon identique en mouvement relatif (8) et en mouvement absolu (7).

1.2. Fonction potentiel

Ecrivons maintenant la différentielle totale de ϕ (R.26) :

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} dr + \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} r d\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz \quad (9)$$

D'après le système (6), cette différentielle est calculable de deux façons : en remplaçant les différents $\frac{\partial\phi}{\partial r}$, $\frac{\partial\phi}{r\partial\theta}$ et $\frac{\partial\phi}{\partial z}$ par les composantes directes de \vec{C} ou par les composantes issues de la composition des vitesses.

Dans le premier cas, on obtient :

$$d\phi = C_r dr + C_u \cdot r d\theta + C_a dz$$

En utilisant les relations géométriques du système (5), $d\phi$ s'écrit :

$$d\phi = C_m dm \sin^2\delta + C_u r d\theta + C_m dm \cos^2 \delta$$

Soit après groupement et simplification :

$$d\phi = C_m dm + C_u r d\theta = C ds \quad (10)$$

Cette forme classique a été établie en bidimensionnel en (A-45). Partant des autres composantes, la relation (10) peut aussi s'écrire :

$$d\phi = W_m \cdot dm + (U + W_u) r d\theta$$

$$d\phi = W_m dm + W_u r d\theta + \omega r^2 d\theta$$

Et finalement :

$$d\phi = W dl + \omega r^2 d\theta = d\phi_R + d\phi_E \quad (11)$$

Le potentiel de l'écoulement absolu irrotationnel peut donc s'écrire comme la superposition des pseudo-potentiels relatif et d'entraînement.

1.3. Equation dynamique en mouvement relatif

L'équation générale de la dynamique des fluides parfaits s'écrit dans le repère absolu (relation B8) :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{C}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \text{grad } (gh) \quad (12)$$

relation dans laquelle l'accélération $\vec{\Gamma}$ prend la forme vectorielle issue de la relation A12 :

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + \text{grad } \frac{C^2}{2} - \vec{C} \wedge \text{rot } \vec{C} \quad (13)$$

Lorsque \vec{C} est issue de la composition des vitesses relative \vec{W} et d'entraînement $\vec{U} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$:

$$\vec{C} = \vec{W} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

L'accélération absolue peut être calculée à partir de la dérivée suivante :

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{d\vec{W}}{dt} + \frac{d\vec{U}}{dt} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{W} \quad (14)$$

Relation issue de la composition des accélérations où l'accélération absolue est constituée de la somme des accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis.

D'après l'équation (13), les accélérations relative et d'entraînement s'écrivent :

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \text{grad } \frac{W^2}{2} - \vec{W} \wedge \text{rot } \vec{W} \quad (15)$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \text{grad } \frac{U^2}{2} - \vec{U} \wedge \text{rot } \vec{U} \quad (16)$$

$$\text{avec } \vec{U} \wedge \text{rot } \vec{U} = \begin{vmatrix} 0 & \omega r & 0 \\ \omega r & 0 & 2\omega^2 r \\ 0 & 2\omega & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 2 \text{grad } \frac{U^2}{2}$$

D'où la relation (16) pour $\omega = \text{cte}$:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = -\text{grad } \frac{U^2}{2}$$

La relation (14) s'écrit maintenant :

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} \right) - \vec{W} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} + 2 \vec{\omega} \wedge \vec{W}$$

En remarquant que :

$$-\vec{W} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} + 2 \vec{\omega} \wedge \vec{W} = -\vec{W} \wedge \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} + 2 \vec{\omega} \right) = -\vec{W} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{C} \quad (17)$$

On obtient l'expression de l'équation dynamique en mouvement relatif pour un fluide barotrope :

$$\boxed{-\overrightarrow{\text{grad}} \left[\int \frac{dp}{\rho} + gh + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} \right] = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - \vec{W} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{C}} \quad (18)$$

Simplifications :

Pour un écoulement absolu irrotationnel, la relation (2) indique que le second terme du second membre s'annule.

On peut alors intégrer l'équation (18) sur une ligne de courant relative pour obtenir la relation de Bernoulli en mouvement relatif :

$$\int \frac{dp}{\rho} + gh + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} + \int \frac{\partial W}{\partial t} dl = \text{cte}(t) \quad (19)$$

où le second terme est une constante d'intégration dépendant du temps.

En introduisant le potentiel relatif ϕ_R défini précédemment, la relation de Bernoulli s'écrira également :

$$\int \frac{dp}{\rho} + gh + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} + \frac{\partial \phi_R}{\partial t} = \text{cte}(t) \quad (20)$$

Enfin, dans le cadre d'un écoulement relatif permanent, on obtient la forme générale utilisable sur l'ensemble de l'écoulement :

$$\boxed{\int \frac{dp}{\rho} + gh + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} = \text{cte}} \quad (21)$$

En dehors des écoulements à surface libre, les termes liés à la pesanteur sont généralement négligeables par rapport aux autres termes. En fluide incompressible, le terme de pression s'écrit :

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho} \int dp = \frac{p}{\rho}$$

Expressions énergétiques :

Dans le cadre de l'écoulement isentropique défini comme l'écoulement d'un fluide parfait sans échange de chaleur avec l'extérieur, l'enthalpie h du fluide s'écrit :

$$h = \int \frac{dp}{\rho} \quad (22)$$

et l'enthalpie d'arrêt ou enthalpie totale H :

$$H = h + \frac{C^2}{2} = \int \frac{dp}{\rho} + \frac{C^2}{2} \quad (23)$$

On définit aussi la rothalpie I par la somme :

$$I = h + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} = \int \frac{dp}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} \quad (24)$$

Introduite dans l'équation d'Euler (18) en mouvement relatif, celle-ci s'écrit de manière plus compacte :

$$\boxed{-\vec{\text{grad}} I + \vec{f} = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - \vec{W} \wedge (\vec{\text{rot}} \vec{W} + 2\vec{\omega})} \quad (25)$$

Dans ces conditions, le théorème de Bernoulli en écoulement permanent et irrotationnel s'écrit, en négligeant les forces de volume :

$$I = \int \frac{dp}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} = \text{cte} \quad (26)$$

L'enthalpie d'un fluide ne peut varier que dans le cas d'un écoulement en grille mobile où est mise en oeuvre la vitesse d'entraînement U issue généralement d'une rotation.

La variation d'enthalpie entre l'entrée 1 et la sortie 2 d'une grille mobile s'écrit, d'après (23) :

$$\Delta H = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} \quad (27)$$

Parallèlement, l'équation (26) permet d'écrire :

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2}$$

D'où la première forme cinématique de l'équation l'Euler des turbomachines :

$$\Delta H = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} \quad (28)$$

On démontre, à partir des triangles de vitesses des figures 2a ou 2b, la relation géométrique classique :

$$\frac{C^2}{2} + \frac{U^2}{2} - \frac{W^2}{2} = U C u$$

D'où la deuxième forme cinématique de l'équation d'Euler :

$$\Delta H = U_2 C u_2 - U_1 C u_1$$

Concernant les pompes et les ventilateurs, on utilise la hauteur totale d'élévation au lieu de la variation d'enthalpie :

$$H_{th} = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2g} = \frac{U_2 C u_2 - U_1 C u_1}{g} \quad (29)$$

S'agissant d'un fluide parfait, l'expression ci-dessus est qualifiée de hauteur théorique.

Inversement, pour une grille de turbine, la hauteur cédée par le fluide est donnée par la relation :

$$H_{th} = \frac{U_1 C u_1 - U_2 C u_2}{g}$$

II - ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL EN FLUIDE PARFAIT

Reprenons les équations déjà présentées dans le cadre du fluide parfait.

Les composantes de la vitesse absolue s'expriment à partir des composantes de la vitesse relative \vec{W} et de la vitesse d'entraînement \vec{U} (relation 6) :

$$\vec{C} = \begin{cases} Cr = Wr \\ Cu = Wu + \omega r \\ Ca = Wa \end{cases} \quad (30)$$

Pour un fluide compressible, l'équation de continuité, issue de l'équation (D-9), s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r Wr)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho Wu)}{r \partial \theta} + \frac{\partial (\rho Wa)}{\partial z} = 0 \quad (31)$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r Cr)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho Cu)}{r \partial \theta} + \frac{\partial (\rho Ca)}{\partial z} = 0 \quad (32)$$

L'hypothèse d'un écoulement irrotationnel permet d'écrire le système issu de A-14 :

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial Ca}{\partial \theta} - \frac{\partial Cu}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial Cr}{\partial z} - \frac{\partial Ca}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r Cu) - \frac{1}{r} \frac{\partial Cr}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (33)$$

La partie aubée de la roue gouverne les échanges énergétiques entre le fluide et le milieu extérieur par l'intermédiaire de la composante giratoire Cu communiquée au fluide .

Celle-ci évolue au cours de la traversée de la roue en fonction de l'influence conjuguée de la forme des aubages et des lignes de courant.

Remarque :

Dans l'hypothèse d'un écoulement entièrement axisymétrique s'écrivant notamment :

$$\begin{cases} \frac{\partial Cr}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial Cu}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial Ca}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (34)$$

Le système (33) permettra d'écrire le système suivant, issu des première et troisième composantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial C_u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} (rC_u) = 0 \end{cases}$$

et de définir la distribution de vitesse giratoire :

$$\boxed{C_u = \frac{K}{r}} \quad (35)$$

correspondant au vortex libre où K est une constante.

Inversement, lorsque l'écoulement imposé par les aubages ne suit pas la loi du vortex libre, celui-ci ne peut être considéré comme axisymétrique.

Dans le cas particulier de l'écoulement irrotationnel tridimensionnel, la vitesse absolue dérive d'un potentiel ϕ et l'on pose :

$$\vec{C} = \vec{U} + \vec{W} = \vec{\text{grad}} \phi = \begin{cases} C_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = W_r \\ C_u = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = W_u + \omega r \\ C_a = \frac{\partial \phi}{\partial z} = W_a \end{cases}$$

En régime permanent, l'équation de continuité peut être développée en dérivant les divers produits figurant dans (32). On obtient alors, en introduisant le potentiel ϕ , l'équation à résoudre :

$$\boxed{\nabla^2 \phi + \frac{\vec{\text{grad}} \rho}{\rho} \cdot \left[\vec{\text{grad}} \phi \right] = 0} \quad (36)$$

où $\nabla^2 \phi$ est le laplacien de ϕ en coordonnées cylindriques :

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

Conditions aux limites :

En général, celles-ci s'expriment par les conditions suivantes :

- condition de glissement sur les aubes :

$$\vec{W} \cdot \vec{n} = 0 \quad (37)$$

\vec{n} étant le vecteur normal à la surface.

- condition de périodicité en amont et en aval des aubes :

$$\vec{C}(r, \theta, z) = \vec{C}\left(r, \theta + \frac{2\pi}{Na}, z\right) \quad (38)$$

où Na représente le nombre d'aubages de la roue.

Résolution :

La plupart des calculs 3D potentiels sont traités par des méthodes d'éléments finis s'appuyant sur un maillage fixe pendant tout le calcul. La finesse de ce maillage permet une bonne prise en compte de la géométrie des frontières et notamment des aubages. Nous reviendrons en détail sur les méthodes numériques à la fin de ce chapitre.

En fluide compressible :

La masse volumique du fluide variant avec la pression et la température, il est nécessaire à chaque étape, de calculer la pression grâce à l'équation d'Euler des turbomachines (26) :

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{\omega^2 r^2}{2} = I_0 = \text{cte} \quad (39)$$

L'hypothèse d'un écoulement isentropique ou non permettra d'évaluer en tout point la température puis la masse volumique.

Celle-ci sera modifiée dans l'équation (36) à chaque étape du calcul qui sera répété jusqu'à satisfaction du critère de convergence.

Dans le cas d'un fluide parfait subissant une compression adiabatique, on écrira :

$$\rho = \frac{p}{rT} = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1) C_p T} \quad (40)$$

$$T = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \quad (41)$$

$$\text{soit } \rho = \frac{\gamma p_0}{(\gamma - 1) T_0} \left[\frac{I_0 - \frac{W^2 - U^2}{2}}{C_p T_0} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (42)$$

avec

- γ : exposant isentropique du gaz
- C_p : chaleur massique du gaz
- p_0 et T_0 : pression et température en un point quelconque de l'écoulement amont, par exemple à l'entrée de la machine
- I_0 : rothalpie, constante pour tout l'espace inter-aubages

En fluide incompressible :

L'équation à résoudre est ici l'équation (36) avec $\rho = \text{cte}$:

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0} \quad (43)$$

Malgré sa simplicité apparente, le calcul en incompressible pose d'importants problèmes numériques.

III - MODELISATION EN FLUIDE REEL

En dehors des zones visqueuses, l'écoulement sain peut être modélisé à partir de la relation (18) :

$$-\overrightarrow{\text{grad}} \left[\int \frac{dp}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} \right] + \vec{f} = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - \vec{W} \wedge \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} + 2 \vec{\omega} \right) \quad (44)$$

avec $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} + 2 \vec{\omega} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{C}$

Rappelons les définitions suivantes relatives au fluide réel :

enthalpie : $h = \int \frac{dp}{\rho} + \int T dS$ (45a)

entropie : $TdS = d(Qe + \tau_f)$ (45b)

où Qe représente l'apport de chaleur du milieu extérieur et τ_f le travail des forces frottement. Sauf cas très exceptionnels, pour les turbomachines, on considère l'écoulement interne comme adiabatique.

enthalpie totale : $H = h + \frac{C^2}{2}$ (46)

rothalpie : $I = h + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2}$ (47)

En remplaçant h par sa valeur issue de (46) dans (47), on obtient la relation :

$$I = H + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} - \frac{C^2}{2} \quad (48)$$

Soit, en retenant la relation (29) liée au triangle des vitesses :

$$\boxed{I = H - UCu} \quad (49)$$

Utilisons maintenant la relation (45 a) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left[\int \frac{dp}{\rho} \right] = \overrightarrow{\text{grad}} h - T \overrightarrow{\text{grad}} S \quad (50)$$

En introduisant cette valeur dans (44), on fait ainsi apparaître la rothalpie I :

$$\boxed{-\vec{\text{grad}} I + T \vec{\text{grad}} S + \vec{f} = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - \vec{W} \wedge \left(\vec{\text{rot}} \vec{W} + 2 \vec{\omega} \right)} \quad (51)$$

Il s'agit, sous cette forme, de l'équation de Crocco représentant l'expression énergétique de l'équation dynamique [réf. 225]. Le terme $\vec{\text{grad}} S$ est associé aux pertes génératrices d'entropie (frottements) et aux échanges de chaleur avec l'extérieur. Pour les évolutions adiabatiques, on écrira d'après (45 b) :

$$T \cdot \vec{\text{grad}} S = \vec{f}_D$$

\vec{f}_D correspond la dissipation, elle est introduite pour matérialiser les pertes par frottement. Cet effort par unité de masse est colinéaire à \vec{W} mais de sens opposé (figure 3).

Remarque :

Pour un ailettage fixe correspondant à un distributeur ou un redresseur, la relation (51) se transforme en remplaçant la vitesse relative par la vitesse absolue d'une part et en annulant ω d'autre part. La rothalpie devient l'enthalpie et on obtient ainsi :

$$-\vec{\text{grad}} H + T \vec{\text{grad}} S + \vec{f} = \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} - \vec{C} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{C} \quad (52)$$

3.1. Projections de l'équation dynamique

Les divers termes figurant dans l'équation dynamique en mouvement relatif (44) sont projetés sur les trois directions principales du repère (r, θ , z).

On obtiendra successivement :

$$\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\vec{\text{grad}} \frac{W^2}{2} = \begin{vmatrix} W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + W_u \frac{\partial W_u}{\partial r} + W_a \frac{\partial W_a}{\partial r} \\ W_r \frac{\partial W_r}{r \partial \theta} + W_u \frac{\partial W_u}{r \partial \theta} + W_a \frac{\partial W_a}{r \partial \theta} \\ W_r \frac{\partial W_r}{\partial z} + W_u \frac{\partial W_u}{\partial z} + W_a \frac{\partial W_a}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\vec{\text{grad}} \frac{U^2}{2} = \begin{vmatrix} \omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \frac{\partial W_r}{\partial t} \\ \frac{\partial W_u}{\partial t} \\ \frac{\partial W_a}{\partial t} \end{vmatrix}$$

D'après la relation (33) :

$$\vec{\text{rot}} \vec{W} + 2 \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial W_a}{\partial \theta} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \\ \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_a}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r W_u)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} + 2 \omega \end{vmatrix} \quad (53)$$

$$\vec{W} \wedge (\vec{\text{rot}} \vec{W} + 2 \vec{\omega}) = \begin{vmatrix} W_u \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r W_u)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} + 2 \omega \right] - W_a \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_a}{\partial r} \right] \\ W_a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W_a}{\partial \theta} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \right] - W_r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r W_u)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} + 2 \omega \right] \\ W_r \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_a}{\partial r} \right] - W_u \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W_a}{\partial \theta} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \right] \end{vmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{vmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_z \end{vmatrix} \quad \vec{f}_D = \begin{vmatrix} -f_D \cos \beta \sin \delta \\ -f_D \sin \beta \\ -f_D \cos \beta \cos \delta \end{vmatrix} \quad (54)$$

Les trois équations donnent après simplifications :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\partial W_r}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + W_u \frac{\partial W_r}{r \partial \theta} + W_a \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{(W_u + \omega r)^2}{r} - f_r + f_D \cos \beta \sin \delta \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} &= \frac{\partial W_u}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_u}{\partial r} + W_u \frac{\partial W_u}{r \partial \theta} + W_a \frac{\partial W_u}{\partial z} + \frac{W_r}{r} (W_u + 2 \omega r) - f_\theta + f_D \sin \beta \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial W_a}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_a}{\partial r} + W_u \frac{\partial W_a}{r \partial \theta} + W_a \frac{\partial W_a}{\partial z} - f_z + f_D \cos \beta \cos \delta \end{aligned} \quad (55)$$

Toutes ces équations ainsi que celle de continuité peuvent être écrites sous la forme générale appelée forme conservative [réf. 109] :

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rE)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{S}{r} + H} \quad (56)$$

avec :

$$Q = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho W_r \\ \rho W_u \\ \rho W_a \end{vmatrix} \quad E = \begin{vmatrix} \rho W_r \\ p + \rho W^2_r \\ \rho W_r W_u \\ \rho W_r W_a \end{vmatrix} \quad (57)$$

$$F = \begin{vmatrix} \rho W_u \\ \rho W_r W_u \\ p + \rho W^2_u \\ \rho W_u W_a \end{vmatrix} \quad G = \begin{vmatrix} \rho W_a \\ \rho W_a W_r \\ \rho W_a W_u \\ p + \rho W^2_a \end{vmatrix} \quad (58)$$

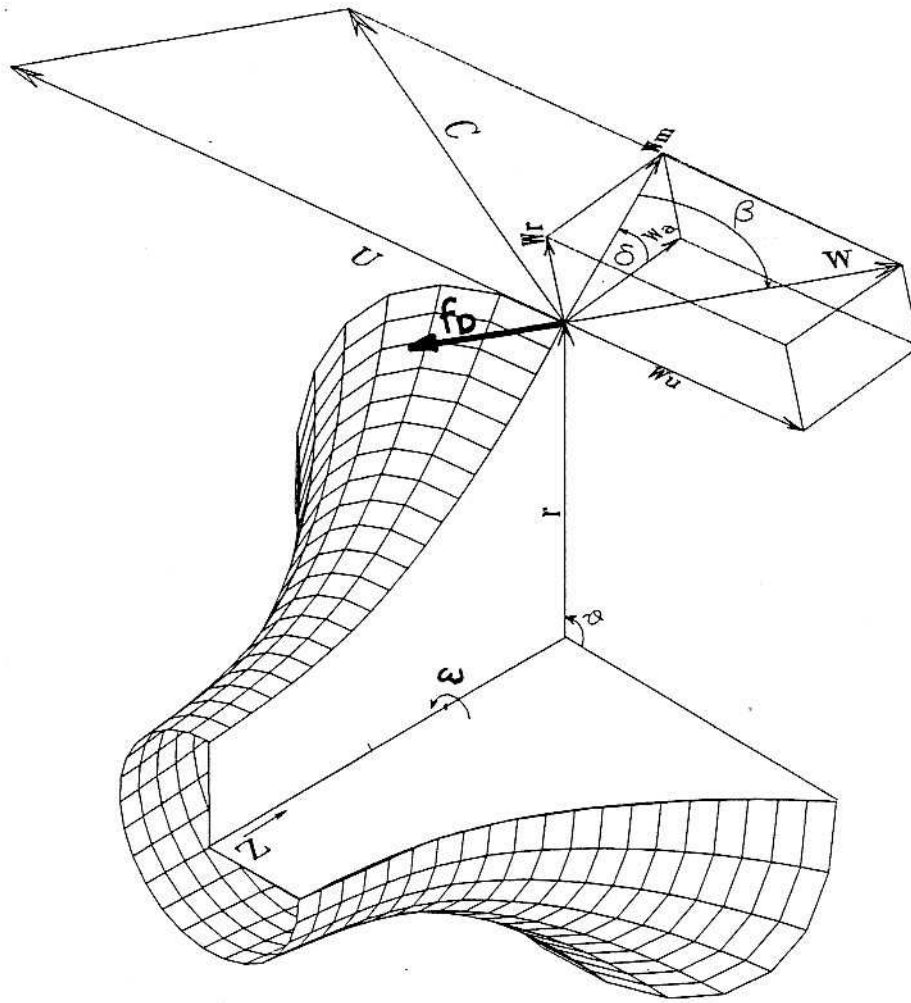
$$S = \begin{vmatrix} 0 \\ p + \rho (W_u + \omega r)^2 \\ -\rho W_r (W_u + 2\omega) \\ 0 \end{vmatrix} \quad H = \begin{vmatrix} 0 \\ \rho [f_r - f_D \cos \beta \sin \delta] \\ \rho [f_\theta - f_D \sin \beta] \\ \rho [f_z - f_D \cos \beta \cos \delta] \end{vmatrix} \quad (59)$$

La première ligne de ce système correspond à l'équation de continuité, les trois lignes suivantes sont les projections de l'équation dynamique dans l'ordre r , θ , z .

Cette forme conservative constitue la base des méthodes de résolution **pseudo-instationnaire** où la solution stationnaire constitue la solution asymptotique en temps [réf. 223 et 224].

3.2. Expressions en fonction de la géométrie de la machine

La géométrie de la machine est introduite à partir de la conicité des lignes de courant δ et de l'angle d'aubage β (figure 3).



Définitions relatives à l'écoulement tridimensionnel

On notera, sur cette figure, les relations géométriques suivantes :

$$\begin{aligned} W_r &= W_m \sin \delta \\ W_u &= W_m \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad 2 \quad (60)$$

$$\begin{aligned} W_a &= W_m \cos \delta \\ \sin \delta &= \frac{dr}{dm} \\ \cos \delta &= \frac{dz}{dm} \end{aligned} \quad (61)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{rd\theta}{dm}$$

$$\vec{f}_D = \begin{cases} -f_D \cos \beta \sin \delta \\ -f_D \sin \beta \\ -f_D \cos \beta \cos \delta \end{cases} \quad (62)$$

On adoptera les hypothèses suivantes :

- L'écoulement s'effectue sur des surfaces de révolution et on admettra la simplification :

$$\frac{\partial \delta}{\partial \theta} = 0 \quad (63)$$

- L'écoulement suit partout la direction moyenne imposée par les aubages :

$$\frac{\partial \beta}{\partial \theta} = 0 \quad (64)$$

Cette hypothèse n'est généralement valable que dans le cadre d'une infinité d'aubages (hypothèse d'Euler).

En remplaçant dans l'équation (55) W_r , W_u et W_a par leurs valeurs issues de (60) et en utilisant les systèmes (61) et (62), on obtiendra les projections suivantes (annexe R-21).

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= W_m \sin \delta \frac{dW_m}{dm} + W_m^2 \cos \delta \frac{d\delta}{dm} - \frac{W_m^2}{r} \operatorname{tg}^2 \beta - \omega^2 r \\ &\quad - 2 \omega W_m \operatorname{tg} \beta + f_D \cos \beta \sin \delta \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} &= W_m \operatorname{tg} \beta \frac{dW_m}{dm} + W_m^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \frac{d\beta}{dm} + \frac{W_m^2}{r} \operatorname{tg} \beta \sin \delta \\ &\quad + 2 \omega W_m \sin \delta + r \frac{d\omega}{dt} + f_D \sin \beta \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= W_m \cos \delta \frac{dW_m}{dm} + W_m^2 \sin \delta \frac{d\delta}{dm} + f_D \cos \beta \cos \delta \end{aligned} \quad (65)$$

Ces composants font apparaître l'accélération méridienne, l'accélération liée à la courbure des lignes de courant, la force centrifuge absolue, l'accélération de Coriolis, les termes de dissipation et le terme transitoire.

3.3. Equation intrinsèque

L'équation intrinsèque s'obtient en écrivant la différentielle totale de $p(r, \theta, z)$:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{r \partial \theta} d\theta + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (66)$$

En remplaçant chaque dérivée partielle par sa valeur issue de (65), on obtient l'équation suivante dans laquelle dl représente l'élément de ligne de courant relative :

$$\frac{dp}{\rho} = U dU - W dW - \frac{d\omega}{dt} r \sin \beta dl - f_D dl \quad (67)$$

avec $dl = dm / \cos \beta$ (68)

Enfin, en intégrant de l'entrée à la sortie de l'aube :

$$\boxed{\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \left[\frac{U^2}{2} \right]_1^2 - \left[\frac{W^2}{2} \right]_1^2 - \frac{d\omega}{dt} \int_1^2 r \sin \beta dl - \int_1^2 f_D dl} \quad (69)$$

L'écoulement suivant la direction moyenne imposée par les aubages, les deux premiers termes correspondent à l'équation d'Euler des turbomachines.

Le troisième terme est un terme transitoire se manifestant en cours de croissance ($d\omega/dt > 0$) ou de décroissance ($d\omega/dt < 0$) de la vitesse de rotation.

Le dernier terme représente les pertes globales subies par le fluide : frottement sur les aubages et les flasques, pertes de désadaptation d'incidence.

IV - MODELE QUASI-TRIDIMENSIONNEL

Le modèle quasi-tridimensionnel ou modèle 2.5 D consiste à décomposer l'écoulement tridimensionnel en deux écoulements bidimensionnels couplés : l'un constitué de l'écoulement méridien (r, z) et l'autre de l'écoulement aube à aube (m, θ).

4.1. Écoulement méridien moyen

Les hypothèses retenues pour l'étude de l'écoulement méridien sont les suivantes :

- Il est supposé permanent en mouvement relatif :

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

- Il correspond à l'écoulement aube à aube moyenné en θ , il est ainsi considéré comme axisymétrique.

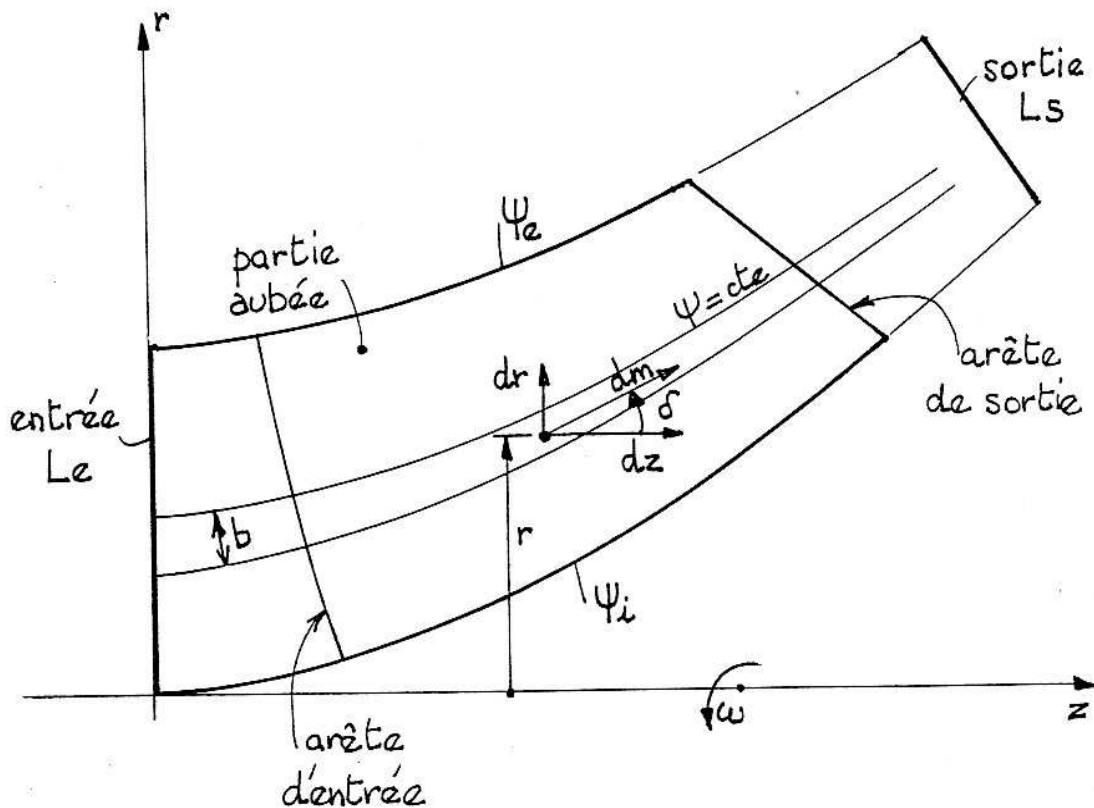


Figure 4 : Définition de la veine fluide en vue méridienne

L'objectif poursuivi consiste à définir les lignes de courant ($\psi = cte$) de la vue méridienne constituée de zones aubées et de zones dépourvues d'aubages (figure 4).

Le problème se traite avec les composantes W_r et W_a du mouvement relatif, égales par ailleurs à celles du mouvement absolu (relation 30).

L'équation de continuité s'écrit en régime permanent :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r W_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho W_a)}{\partial z} = 0 \quad (70)$$

Celle-ci est automatiquement satisfaite en posant :

$$\begin{aligned} C_r = W_r &= \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ C_a = W_a &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \quad (71)$$

L'équation du mouvement est l'équation (51) :

$$\vec{W} \wedge \text{rot } \vec{C} = \vec{\text{grad}} I - T \vec{\text{grad}} S - \vec{f} \quad (72)$$

A - Cas du fluide parfait incompressible en vortex libre

En adoptant l'hypothèse d'un écoulement axisymétrique, le rotationnel de \vec{C} a pour composantes celles issues de (33) :

$$\text{rot } \vec{C} \begin{cases} \frac{\partial C_u}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r C_u)}{\partial z} \\ \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_a}{\partial r} = \frac{1}{\rho r} \nabla^2 \psi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r C_u) \end{cases} \quad (73)$$

En remplaçant dans la seconde composante C_r et C_a par leurs valeurs (71), celle-ci fait apparaître le laplacien de ψ .

Ainsi, en supposant d'une part que le tracé de l'aubage induit une giration du type vortex libre :
 $r C_u = \text{cte}$

et d'autre part que le fluide est parfait (ce qui se traduit par un second membre nul dans l'équation dynamique précédente), l'écoulement peut être considéré comme irrotationnel.

En négligeant les forces de volume, l'équation à résoudre se ramène à :

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0 \quad (74)$$

Equation qu'il faut traiter par différences finies sur un maillage approprié. On adoptera par exemple, comme valeurs initiales des composantes de la vitesse, une valeur constante sur le domaine.

Les conditions aux limites s'écriront ainsi :

- Les lignes enveloppes ψ_e et ψ_i sont des lignes de courant.
- La vitesse est axiale et uniforme à l'entrée de la machine (entrée disposée suffisamment loin du bord d'attaque des aubes) : Condition de Dirichlet.
- La direction de la vitesse est constante dans la section de sortie : Condition de Neumann. Ce qui impliquera que L_s soit une binormale de ψ_e et ψ_i .

B - Cas général

En fluide compressible, les coordonnées du rotationnel contiennent les termes liés à la compressibilité :

$$\vec{\text{rot}} \vec{C} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial (rCu)}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho r} \left[\nabla^2 \psi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (rCu)}{\partial r} \end{pmatrix}$$

Transformons la rothalpie à partir de la relation (49) :

$$\vec{\text{grad}} I = \vec{\text{grad}} H - \vec{\text{grad}} (UCu) \quad (75)$$

et projetons l'équation dynamique (72) sur r , il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{Wu}{r} \frac{\partial (rCu)}{\partial r} - \frac{Wa}{\rho r} \left[\nabla^2 \psi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right] \\ & = \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\partial (\omega r Cu)}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} - f_r \end{aligned}$$

Explicitons le laplacien de ψ :

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) - \frac{\rho r}{Wa} \left[\frac{\partial H}{\partial r} - \left(\frac{Wu}{r} + \omega \right) \frac{\partial (rCu)}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} - f_r \right] \quad (76)$$

En remarquant que $\omega r + Wu = Cu$ (relation 30) et en remplaçant Wa par sa valeur issue de (71), on obtient :

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + (\rho r)^2 \frac{\partial r}{\partial \psi} \left[\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial (rCu)^2}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} - f_r \right] \quad (77)$$

Soit, finalement, en négligeant les forces de volumes :

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + (\rho r)^2 \left[\frac{\partial H}{\partial \psi} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial (rCu)^2}{\partial \psi} - T \frac{\partial S}{\partial \psi} \right] \quad (78)$$

ou encore en faisant apparaître la rothalpie :

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + (\rho r)^2 \left[\frac{\partial I}{\partial \psi} + \omega \frac{\partial (rCu)}{\partial \psi} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial (rCu)^2}{\partial \psi} - T \frac{\partial S}{\partial \psi} \right] \quad (79)$$

Simplifications :

Lors d'une évolution isentropique (fluide parfait en évolution adiabatique), la rothalpie reste constante et la relation (79) devient :

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + (\rho r)^2 \left[\omega \frac{\partial (rCu)}{\partial \psi} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial (rCu)^2}{\partial \psi} \right] \quad (81)$$

Enfin, pour un fluide incompressible circulant dans des aubages imprimant une giration en vortex libre, la relation précédente se ramène à l'écoulement irrotationnel (74) :

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Résolution :

La résolution s'effectuera suivant la forme numérique :

$$\nabla^2 \psi = Q(r, z) \quad (82)$$

où $Q(r, z)$ est une fonction à calculer point par point sur le maillage adopté et dont les valeurs varient à chaque itération. Elle traduit la vorticité de l'écoulement.

Sur un maillage fin, on pr f rera la forme (76) contenant r et z plutôt que les formes (78) ou (79).

Dans tous les cas, le calcul de $Q(r, z)$ nécessitera l'adoption d'un schéma de pertes permettant d'évaluer la force de dissipation et l'accroissement d'entropie le long des lignes de courant.

L'évolution de l'angle moyen d'aubage le long des surfaces d'écoulement permet pour sa part d'évaluer rCu en intégrant, si nécessaire, un facteur de glissement en machine mixte ou radiale. L'équation d'état du gaz donne accès à la masse volumique ρ .

On initialise la solution ψ en faisant, par exemple, l'hypothèse d'une vitesse uniforme sur tout le maillage. On calcule en première approximation toutes les fonctions annexes à chaque noeud du maillage. Les variables thermodynamiques aux noeuds d'indice i sont calculées à l'aide des informations connues aux points d'indice $(i - 1)$.

On accède ainsi à la fonction $Q(r, z)$.

On remplace l'équation (82) par une équation aux différences finies qui permet de recalculer la valeur de ψ en chaque point du maillage sur la base de la fonction Q calculée à l'étape précédente. Et ainsi de suite jusqu'à stabilisation des résultats d'une étape par rapport à la précédente.

En général, une dizaine d'itérations est suffisante.

L'avantage de cette méthode est qu'elle évite la possibilité d'instabilités numériques. Ainsi, lorsque $Q = 0$ (relation 74), il est intéressant d'introduire une compressibilité artificielle pour résoudre le système.

La convergence atteinte, les lignes de courant sont obtenues en reliant les points pour lesquels ψ a une valeur constante.

Pour éviter une erreur importante d'interpolation, le maillage nécessite un pas aussi fin que possible. Les relations (71) permettent de calculer les composantes de W_r et W_a sur le maillage ainsi que la vitesse méridienne W_m servant de base au calcul aube à aube.

La méthode exposée ici est la méthode matricielle. Elle est issue des travaux de Wu, modifiée par Marsh, Bosman, Davis et Ribaud [réf. 210 à 215].

D'autres méthodes existent pour traiter l'écoulement méridien :

La méthode de courbure des lignes de courant qui utilise un maillage évolutif à chaque itération. Elle est basée sur les travaux de Novak et Hearsey, Senoo et Nakase, Frost, Katsanis [réf. 216 à 220].

La méthode des éléments finis proposée par Hirsch et Warzee, Hong Tuan Ha [réf. 221 et 222].

4.2. Ecoulement aube à aube

Il s'agit de l'écoulement dans le repère (m, θ) de la figure 1 que l'on résoudra comme précédemment par une méthode du type fonction de courant, la méthode pseudo-instationnaire, la méthode des singularités ou encore dans le cadre des méthodes globales par diverses corrélations basées sur des résultats expérimentaux. Ces deux dernières méthodes nécessitent généralement de ramener l'écoulement aube à aube à un écoulement cylindrique par une transformation conforme appropriée.

Le tube de courant étudié est défini en **3.1.** et représenté sur la figure 4. Son épaisseur b est variable de l'entrée à la sortie de la machine.

A) Méthode pseudo-instationnaire

Les équations de l'écoulement (m, θ) sont issues des systèmes (56) et suivants.

Il s'agit d'un écoulement bidimensionnel de révolution d'épaisseur b non uniforme dont l'équation de continuité prend la forme :

$$\frac{\partial (\rho b)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho b W_m)}{\partial m} + \frac{\partial (\rho b W_u)}{\partial \theta} = 0 \quad (83)$$

ou encore

$$\frac{\partial (\rho b)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho b W_m)}{\partial m} + \frac{\partial (\rho b W_u)}{r \partial \theta} = 0 \quad (84)$$

Par rapport à la forme classique bidimensionnelle d'épaisseur constante, le terme ρb remplace le terme ρ .

Les autres équations sont les deux composantes de l'équation dynamique suivant m et θ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho b W_u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial m} [r b (p + \rho W_m^2)] + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho b W_u W_m) = p \cdot \frac{d (br)}{dm} \\ + b \rho (W_u + \omega r)^2 \frac{dr}{dm} \end{aligned} \quad (85)$$

$$\frac{\partial (\rho b W_m)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho b W_m W_u)}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial \theta} [b (p + \rho W_u^2)] = - \rho b W_m (W_u + 2 \omega r) \frac{dr}{dm} \quad (86)$$

Dans ces équations, les dérivées locales en $\partial b / \partial m$ sont négligées, ce qui nécessite un tube de courant d'épaisseur suffisamment faible.

B) Méthode matricielle

Comme précédemment, la méthode matricielle introduit la fonction de courant ψ pour satisfaire l'équation de continuité qui s'écrit en régime stationnaire (83) :

$$\frac{\partial (\rho b W_m)}{\partial m} + \frac{\partial (\rho b W_u)}{\partial \theta} = 0 \quad (87)$$

Celle-ci est automatiquement satisfaite en posant :

$$\left| \begin{aligned} W_m &= \frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ W_u &= - \frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial m} \end{aligned} \right. \quad (88)$$

Le modèle établi par Katsanis [réf. 226] s'appuie sur l'hypothèse d'irrotationnalité de l'écoulement aube à aube qui s'écrit d'après la troisième composante de (53) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rW_u)}{\partial m} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_m}{\partial \theta} = -2\omega \sin \delta \quad (89)$$

qui s'écrit, d'après (88) :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \left[\frac{\sin \delta}{r} - \frac{1}{\rho b} \frac{\partial(\rho b)}{\partial m} \right] \frac{\partial \psi}{\partial m} = 2\omega \rho b \sin \delta \quad (90)$$

Résolution :

Les conditions aux limites de l'équation (90) sont les suivantes (figure 5) :

- Condition de glissement sur l'intrados et l'extrados des profils.
- Condition de périodicité sur les lignes de séparation amont et aval issues respectivement des bords d'attaques et des bords de fuite de deux profils adjacents.

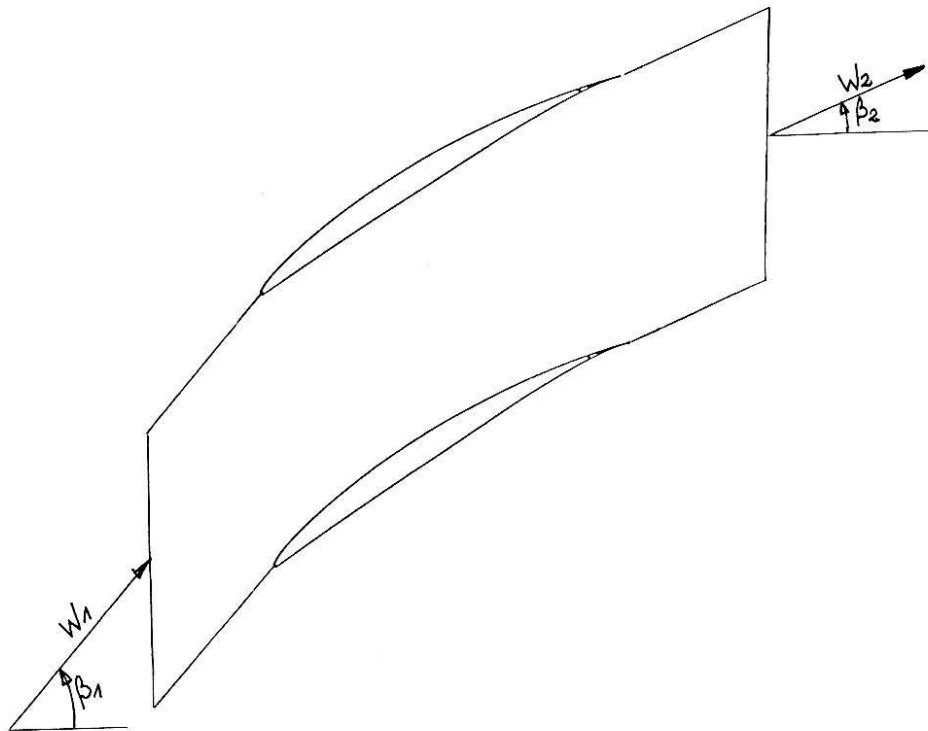
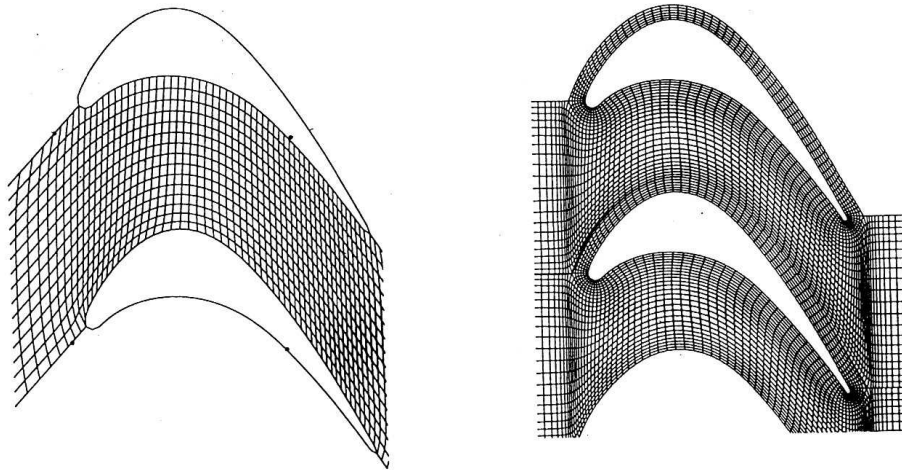


Figure 5 : Ecoulement aube à aube

Le calcul s'effectue par différences finies sur un maillage fixe en cours de calcul. On observera plusieurs formes de maillage comme celles données sur les figures suivantes.



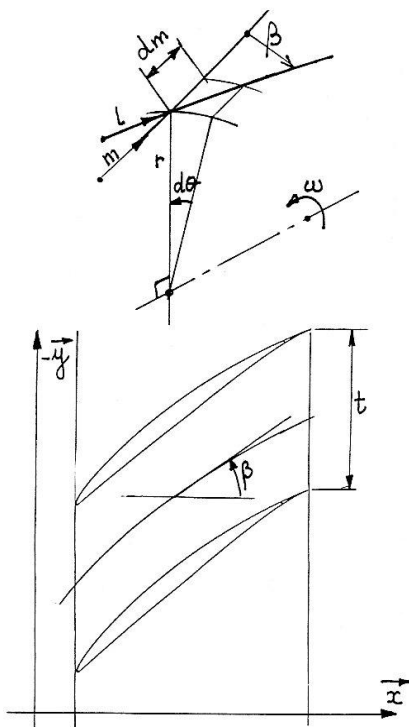
Après un premier calcul en fluide parfait, la définition des couches limites permet de recommencer le calcul en imposant la condition de glissement à la surface de déplacement de la couche limite. Dans les zones d'incidence nominale, la concordance avec l'expérience est excellente.

3.3. Transformation en grille plane

Le calcul de l'écoulement aube à aube est facilité par le passage en grille plane pour laquelle le pas des profils est identique à l'entrée et à la sortie. Cette transformation géométrique s'effectue par l'intermédiaire d'une transformation conforme.

A l'écoulement (m, θ) , on fera correspondre l'écoulement plan (x, y) . Pour cela, on se base sur la propriété fondamentale de cette transformation, à savoir que celle-ci conserve les angles formés entre deux directions homologues.

Considérons l'angle β formé entre le plan méridien et la ligne de courant relative dl (figure 6)



$$\cos \beta = \frac{dm}{dl} \quad (101)$$

$$\text{avec } dl = \sqrt{(rd\theta)^2 + dm^2} \quad (102)$$

La relation (91) s'écrit d'après (92) :

$$\cos \beta = \frac{dm}{\sqrt{(rd\theta)^2 + dm^2}} \quad (103)$$

ou encore :

$$\cos \beta = \frac{\frac{dm}{r}}{\sqrt{d\theta^2 + \left(\frac{dm}{r}\right)^2}} \quad (104)$$

Dans le plan transformé (x, y) , l'angle β formé entre le plan axial et la ligne de courant s'écrit :

$$\cos \beta = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \quad (105)$$

En identifiant avec (94), on obtiendra l'opérateur de la transformation :

$$\boxed{\begin{aligned} dx &= K \cdot \frac{dm}{r} \\ dy &= K \cdot d\theta \end{aligned}} \quad (96)$$

où K est une constante définissant l'échelle de la transformation.

Le pas des profils est maintenant constant à l'entrée et à la sortie de la grille, il permet de définir K en intégrant dθ de θ_o à θ_o + 2π/Na.

$$\int_{y_o}^{y_o + t} dy = K \int_{\theta_o}^{\theta_o + \frac{2\pi}{Na}} d\theta$$

soit $t = K \cdot \frac{2\pi}{Na}$

où Na représente le nombre d'aubages de la grille réelle. Equation donnant finalement :

$$\boxed{K = \frac{t Na}{2\pi}} \quad (97)$$

Les points appartenant au profil réel de coordonnées (m, θ) sont ramenés dans le plan (x, y) en adoptant les relations (96) intégrées à partir du bord d'attaque (m_o, θ_o) jusqu'au bord de fuite (m_L, θ_L) :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= K \int_{m_o}^{m_L} \frac{dm}{r} \\ y &= K \int_{\theta_o}^{\theta_L} d\theta \end{aligned}} \quad (98)$$

On obtient ainsi la grille plane de la figure 6.

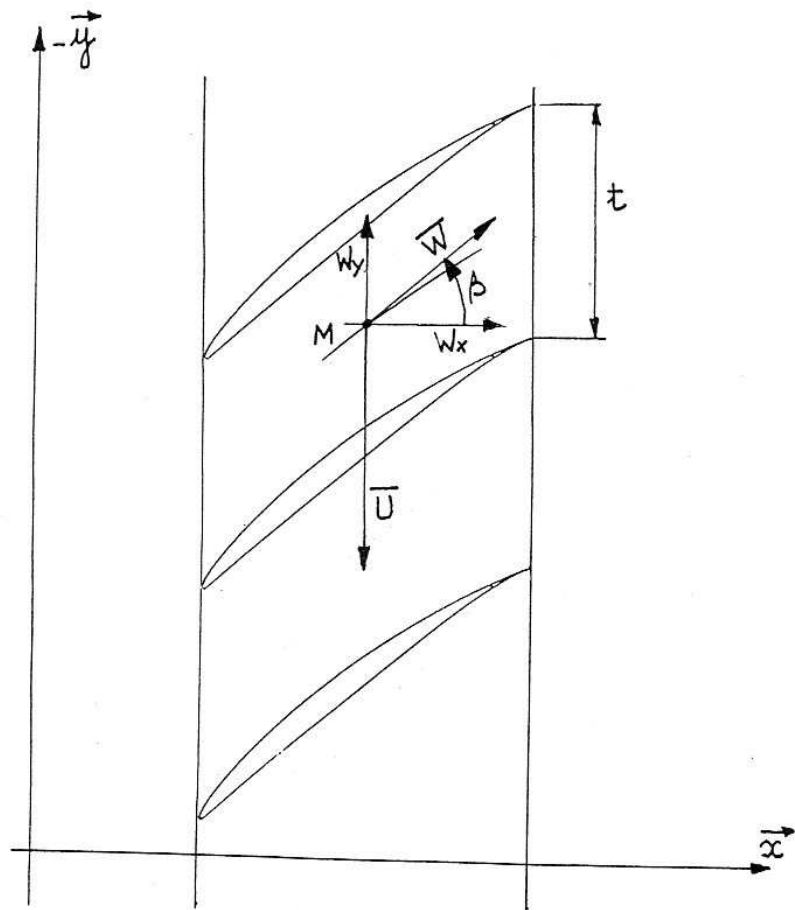
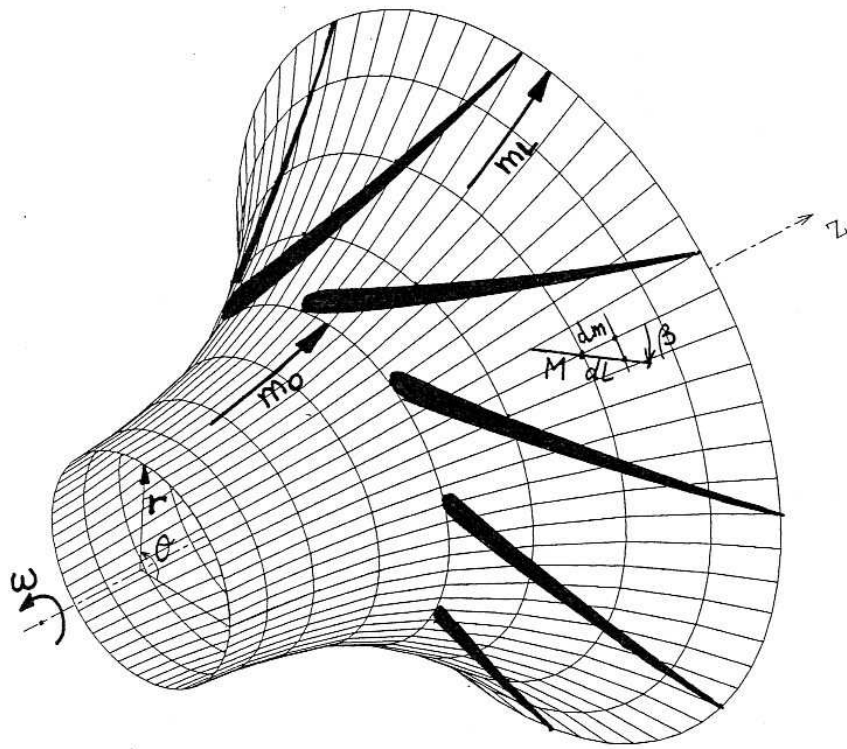


Figure 6 :
Transformation conforme d'une grille quelconque en grille plane

Expression des vitesses :

Les composantes de la vitesse relative \vec{W} dans le plan d'étude (x, y) ont pour valeurs W_x et W_y . Elles sont calculables à partir de \vec{W} en adoptant la seconde propriété de la transformation conforme, à savoir que le potentiel entre deux équipotentiels homologues est conservé. On écrira ainsi :

$$\Delta\phi = W dl = \overline{W} d\overline{l}$$

$$\text{soit } \overline{W} = W \frac{dl}{d\overline{l}} = W \frac{\sqrt{(rd\theta)^2 + dm^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = W \frac{r}{K}$$

De même, pour la vitesse d'entraînement qui doit être multipliée par r/K :

$$\overline{U} = U \cdot \frac{r}{K} = \omega \frac{r^2}{K} \quad (99)$$

La particularité de cette vitesse d'entraînement est de varier avec r et donc avec l'abscisse x .

En adoptant la transformation inverse, on aura :

$$\boxed{W = \frac{K}{r} \overline{W}} \quad (100)$$

ou encore :

$$\boxed{\begin{aligned} W_m &= W_x \cdot \frac{K}{r} \\ W_u &= W_y \cdot \frac{K}{r} \end{aligned}} \quad (101)$$

Résolution dans le plan d'étude :

S'agissant d'un écoulement plan, on peut appliquer un certain nombre de méthodes pour établir le champ des vitesses :

- la méthode des singularités développée au chapitre C mais dans laquelle U variera continûment avec x ;
- la méthode fonction de courant présentée ci-dessous :

Dans le plan (x, y), l'équation de continuité s'écrit en régime permanent :

$$\frac{\partial (\rho b W_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho b W_y)}{\partial y} = 0 \quad (102)$$

En posant :

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ W_y &= -\frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (103)$$

l'équation (102) est automatiquement satisfaite.

L'irrotationnalité de l'écoulement s'écrit, d'après (89) et (101) :

$$\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} = -2\omega \sin \delta \left(\frac{r}{K} \right)^2 \quad (104)$$

En remplaçant W_x et W_y par leurs valeurs dans (104) :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho b} \left[\frac{\partial(\rho b)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial(\rho b)}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + 2\omega \rho b \sin \delta \left(\frac{r}{K} \right)^2} \quad (105)$$

Remarque :

Dans une machine purement axiale en équilibre radial ($b = \text{cte}$ et $\delta = 0$), véhiculant un fluide incompressible, le second membre de l'équation (105) est nul. C'est le seul cas où l'on est ramené à l'écoulement dans une grille fixe.

- B -

**DIMENSIONNEMENT ET ANALYSE
DES PERFORMANCES DES MACHINES
DE COMPRESSION
CENTRIFUGES ET HELICOCENTRIFUGES**

Table des matières

INTRODUCTION

I - TRIANGLES DE VITESSES ET MODELISATION DU GLISSEMENT **p.51**

- 1.1. Triangles de vitesses en fonction du débit
- 1.2. Influence du nombre d'aubes et modélisation du coefficient de glissement

II - CARACTERISTIQUES DE LA MACHINE ET DEFINITION DES PERTES **p.62**

- 2.1. Caractéristique $H = f(qv)$
- 2.2. Pertes Energétiques.

III - METHODOLOGIE DE DIMENSIONNEMENT DE LA ROUE **p.74**

- 3.1. Détermination de l'entrée d'aubage
- 3.2. Détermination de la sortie d'aubage

IV - TRACE DES AUBAGES **p.78**

- 4.1. Détermination de la vue méridienne
- 4.2. Définition de la développée de la pale
- 4.3. Calage angulaire des lignes en vue de face
- 4.4. Contrôle du galbe de la pale

V - CALCUL ET TRACE DE LA VOLUTE **p.91**

- 5.1. Définition des paramètres géométriques de la volute
- 5.2. Calcul et tracé de la volute

INTRODUCTION

Le dimensionnement des pompes et ventilateurs centrifuges et hélico-centrifuges conserve encore aujourd'hui un caractère très empirique car il reste basé sur un grand nombre de règles d'origine expérimentale et statistique. Cet état de fait est cependant assez logique puisqu'en dehors des dimensions géométriques principales, un très grand nombre de paramètres de second ordre (une vingtaine) sont à fixer pour définir la géométrie complète de la roue et de son environnement immédiat. Ce choix, souvent arbitraire, peut être guidé par diverses considérations telles que : régularité de l'écoulement, encombrement, stabilité des caractéristiques, optimisation des performances (rendement, NPSH, bruit), etc.

Nous proposons dans ce chapitre une méthodologie de dimensionnement et d'analyse des performances des machines de compression centrifuges et hélico-centrifuges équipées de volutes.

La démarche présentée se veut aussi proche que possible de celle utilisée par les constructeurs de pompes et ventilateurs.

L'organisation de ce chapitre est décrite ci-dessous :

Grâce à un raisonnement simplifié, on met en évidence dans le premier chapitre l'existence d'un écart angulaire de sortie lié au nombre d'aubes fini. Une modélisation de cet écart est proposée en fin de chapitre.

Dans le chapitre II, on propose une approche des différentes pertes recensées dans le cadre de l'analyse des performances d'une machine existante (méthode directe). Les chapitres III, IV, V donnent la démarche adoptée lors du projet d'une nouvelle machine (méthode inverse) : pour un cahier des charges défini à l'avance, quelles sont les géométries de la roue et de la volute les mieux adaptées.

DEFINITIONS ET CLASSIFICATION

Les turbomachines sont des machines assurant la transformation, à l'aide d'un mouvement de rotation continu, de l'énergie d'un fluide en énergie mécanique et réciproquement,

On peut proposer une première classification en fonction de :

a) **la nature du fluide** : fluide compressible ou incompressible ;

b) **la fonction de la machine** : suivant qu'il s'agisse de machines réceptrices telles que les turbines ou de machines génératrices comme les pompes, ventilateurs, compresseurs, etc..., ou encore de machines jouant les deux rôles : les turbines-pompes ;

c) **la forme du champ de courant** : On distingue en particulier :

1. Les machines centrifuges (figure 1a) à écoulement radial dans la roue : grille d'aubes annulaire dont l'arête d'entrée est parallèle ou oblique par rapport à l'axe de rotation (ou de symétrie) tandis que l'arête de sortie est, lui, parallèle. Ces machines conviennent pour des débits modérés et de fortes pressions.
2. Les machines hélico-centrifuges (figure 1b) à écoulement oblique ou mixte. La roue est composée d'une grille tridimensionnelle, dont les arêtes d'entrée et de sortie sont obliques par rapport à l'axe : les pompes de ce type sont pourvues d'une volute ou d'un redresseur à ailettes.
3. Les machines hélices (Figure 1c) à écoulement axial dont la roue est constituée d'une grille d'aubes circulaire tournante suivie d'une grille fixe appelée stator ou redresseur. Elles sont destinées aux grands débits engendrés en basse pression.

Une autre classification est également introduite à partir de la vitesse angulaire spécifique Ω : nombre adimensionnel issu des modèles de la similitude des turbomachines. Intimement lié à la forme de la roue (figure 2) il s'exprime en fonction des performances au point nominal de la machine (débit et hauteur correspondant au rendement maximal)

$$\Omega = \frac{\omega \sqrt{qv}}{(gH)^{3/4}} \quad (1)$$

On définit aussi la vitesse spécifique nsq ; nombre pratique ayant une valeur d'usage :

$$nsq = N \frac{\sqrt{qv}}{H^{3/4}} \quad (2)$$

N : vitesse de rotation en tr/mn

qv : débit en m³/s

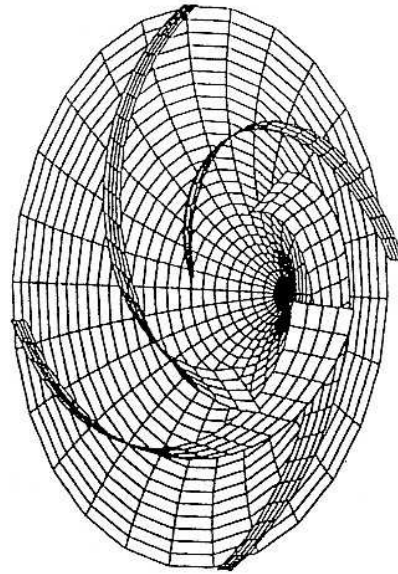
H : hauteur d'élévation en m de fluide

g : accélération de la pesanteur en m/s²

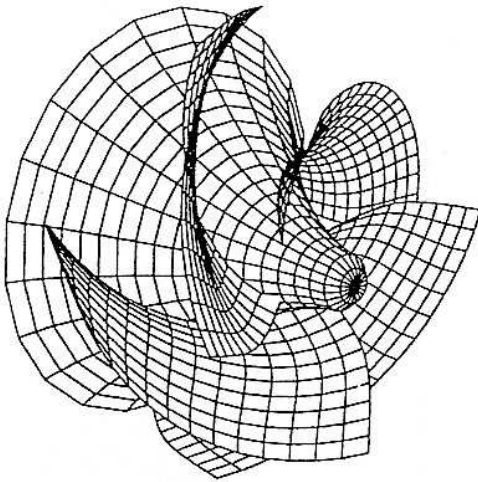
ω : vitesse angulaire en rad/s

On remarque que la vitesse spécifique augmente avec le débit et décroît avec l'augmentation de la hauteur d'élévation. Les faibles vitesses spécifiques caractériseront donc les machines centrifuges et les grandes vitesses spécifiques les machines axiales.

a) roue centrifuge $nsq = 20$



b) roue hélico-centrifuge $nsq = 113$



c) roue axiale $nsq = 220$

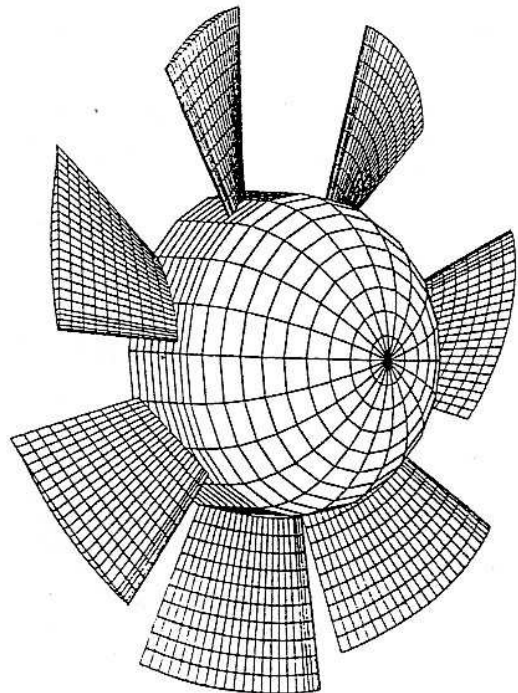


Figure 1 : Classification des machines suivant la forme du champ de courant

MACHINES CENTRIFUGES ET HELICOCENTRIFUGES

Robert REY et Farid BAKIR - Professeurs

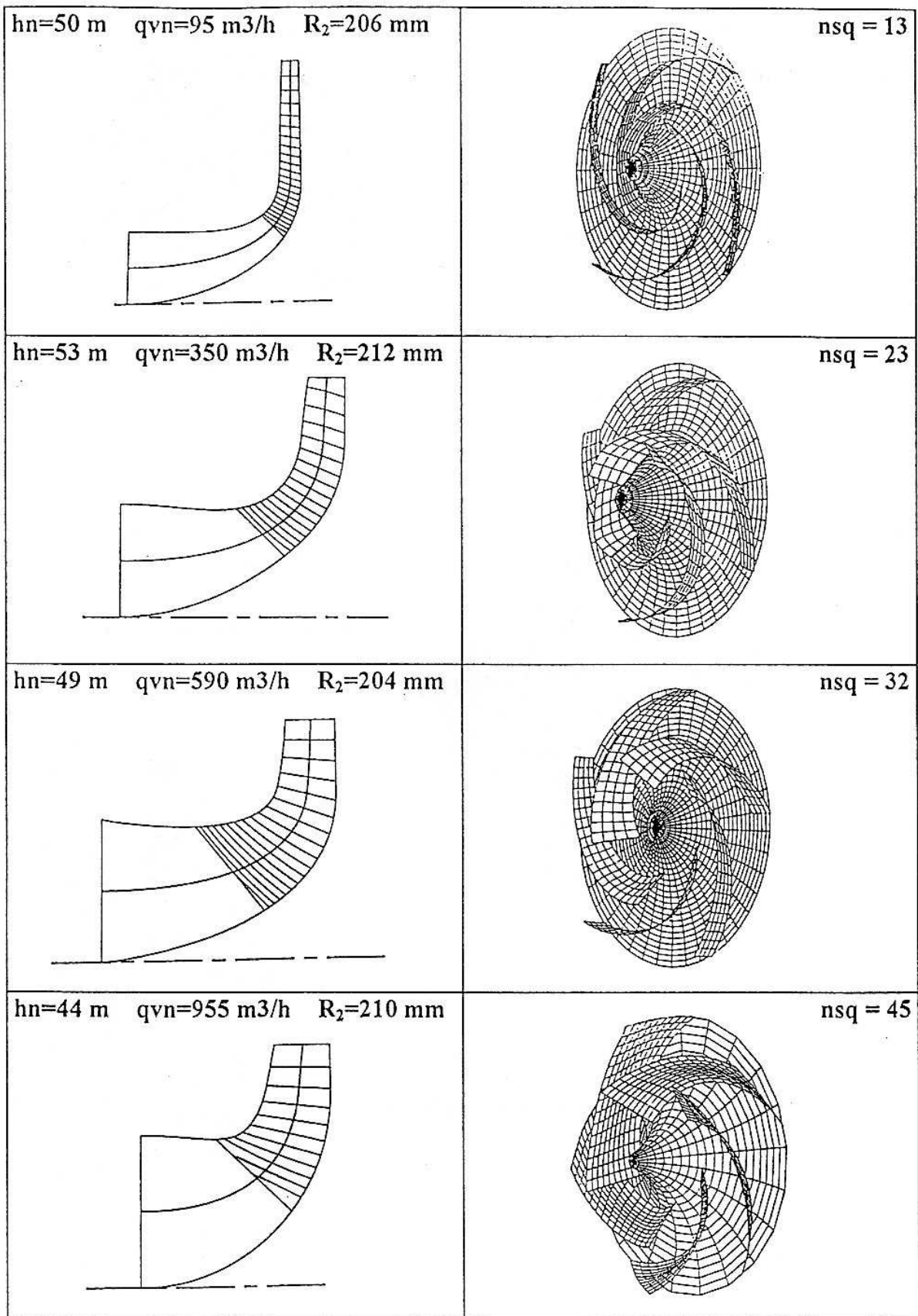


Figure 2 : Liaison entre la vitesse spécifique et la forme de la roue

MACHINES CENTRIFUGES ET HELICOCENTRIFUGES

Robert REY et Farid BAKIR - Professeurs

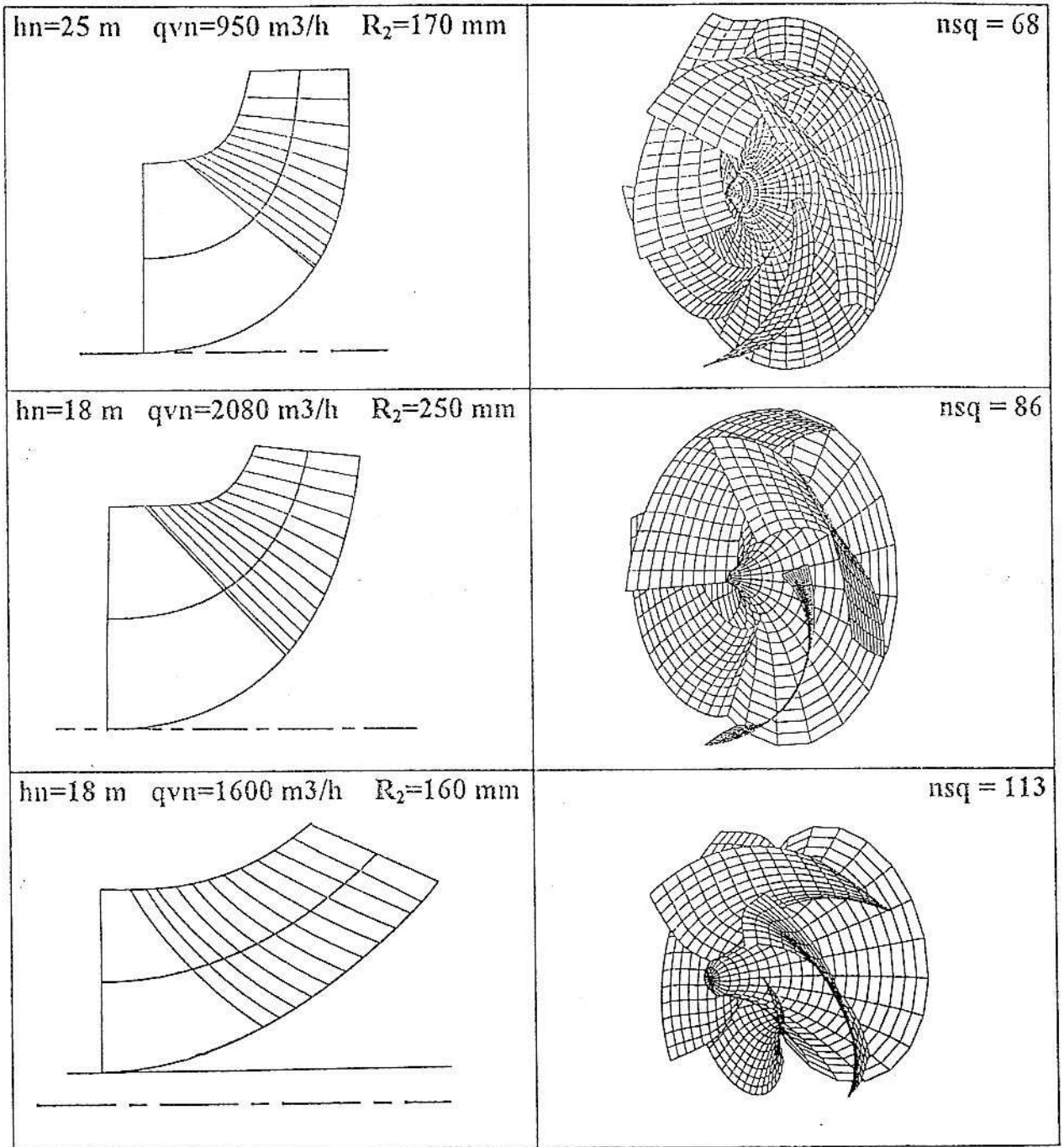
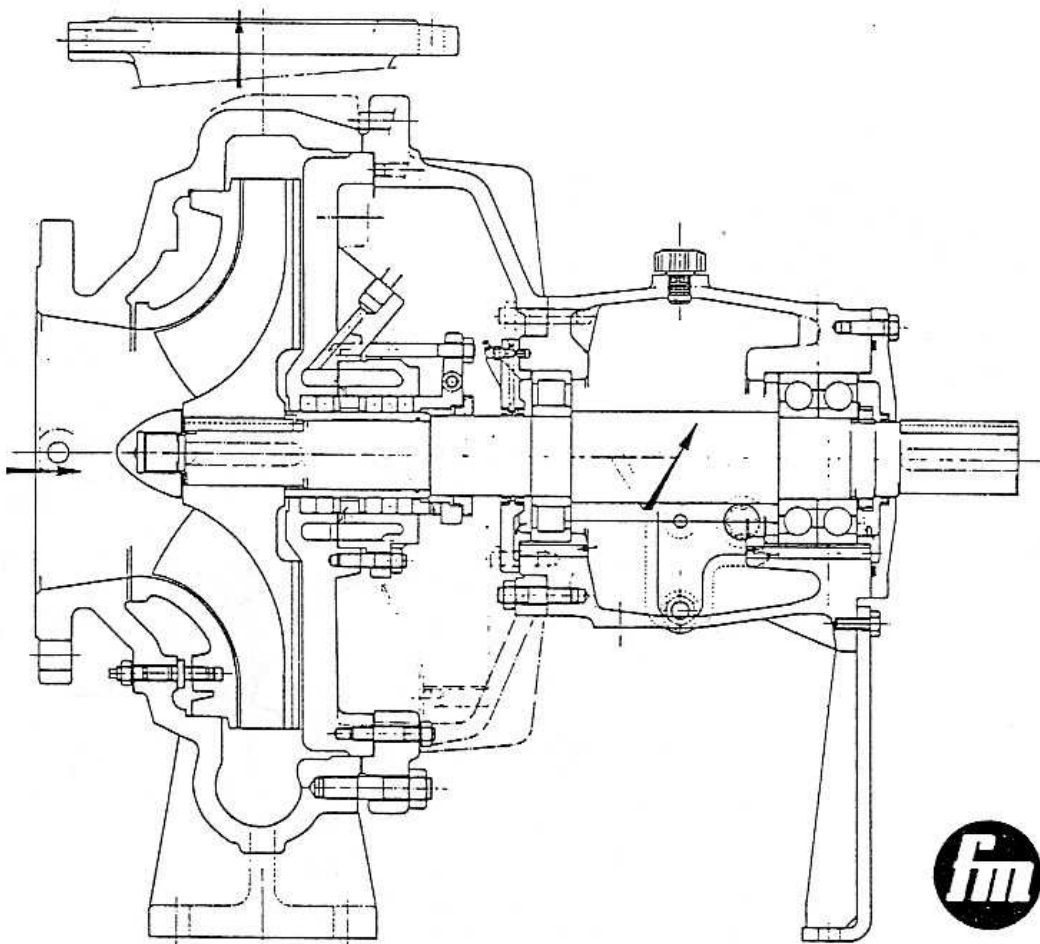


Figure 2 : Liaison entre la vitesse spécifique et la forme de la roue

Dossier de définition d'une pompe centrifuge

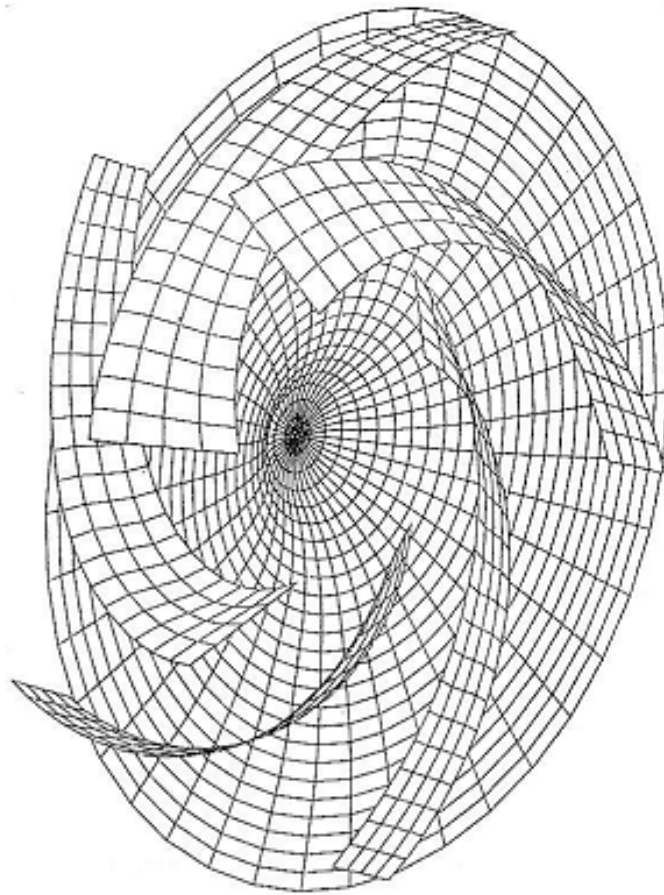
On présente à titre d'exemple, sur les pages qui suivent, l'ensemble des tracés relatif à une pompe industrielle (données reproduites avec l'aimable autorisation des Ets ENSIVAL-MORET - 02100 - Saint Quentin) :

- ❖ dessin d'ensemble de la pompe (coupe de montage)
- ❖ épure 3D de la roue (logiciel HELIOX et T3D)
- ❖ tracé hydraulique de la roue
- ❖ tracé hydraulique de la volute
- ❖ courbes caractéristiques de la pompe, représentant pour une vitesse de rotation fixe, en fonction du débit, et pour trois diamètres extérieurs de la roue (rognage) :
 - ✓ la hauteur
 - ✓ la puissance sur l'arbre
 - ✓ les "collines" d'iso-rendement
 - ✓ le NPSH requis (pression à l'aspiration correspondant à une chute de 3% de la hauteur).

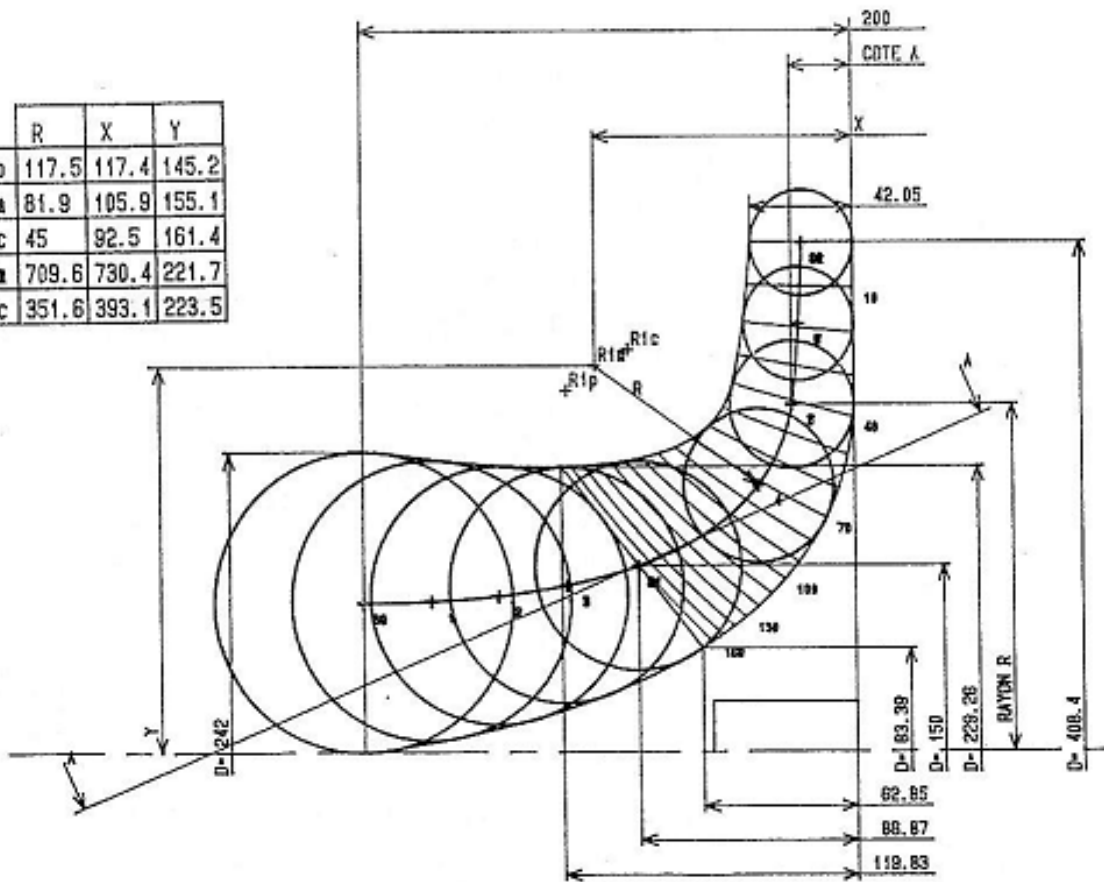


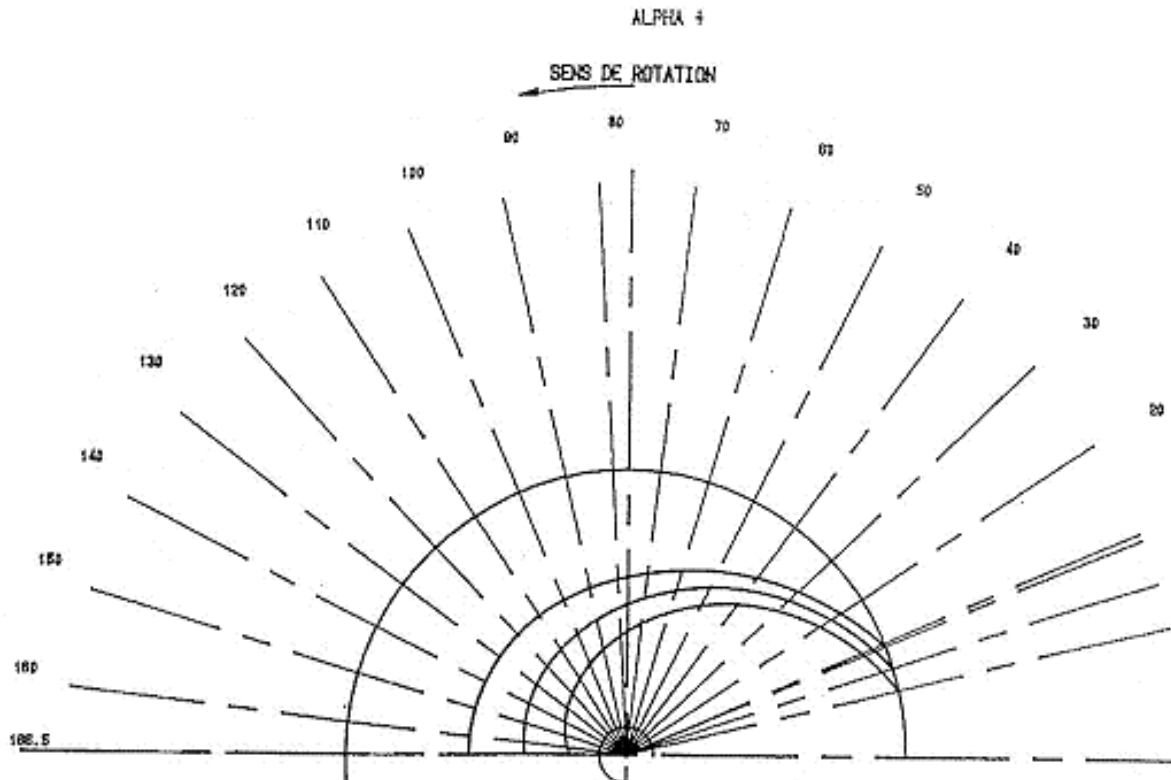
Dessin d'ensemble de la pompe (coupe de montage)

épure 3D de la roue



| | R | X | Y |
|-----|-------|-------|-------|
| R1p | 117.5 | 117.4 | 145.2 |
| R1m | 81.9 | 105.9 | 155.1 |
| R1c | 45 | 92.5 | 161.4 |
| R2m | 709.6 | 730.4 | 221.7 |
| R2c | 351.6 | 393.1 | 223.5 |

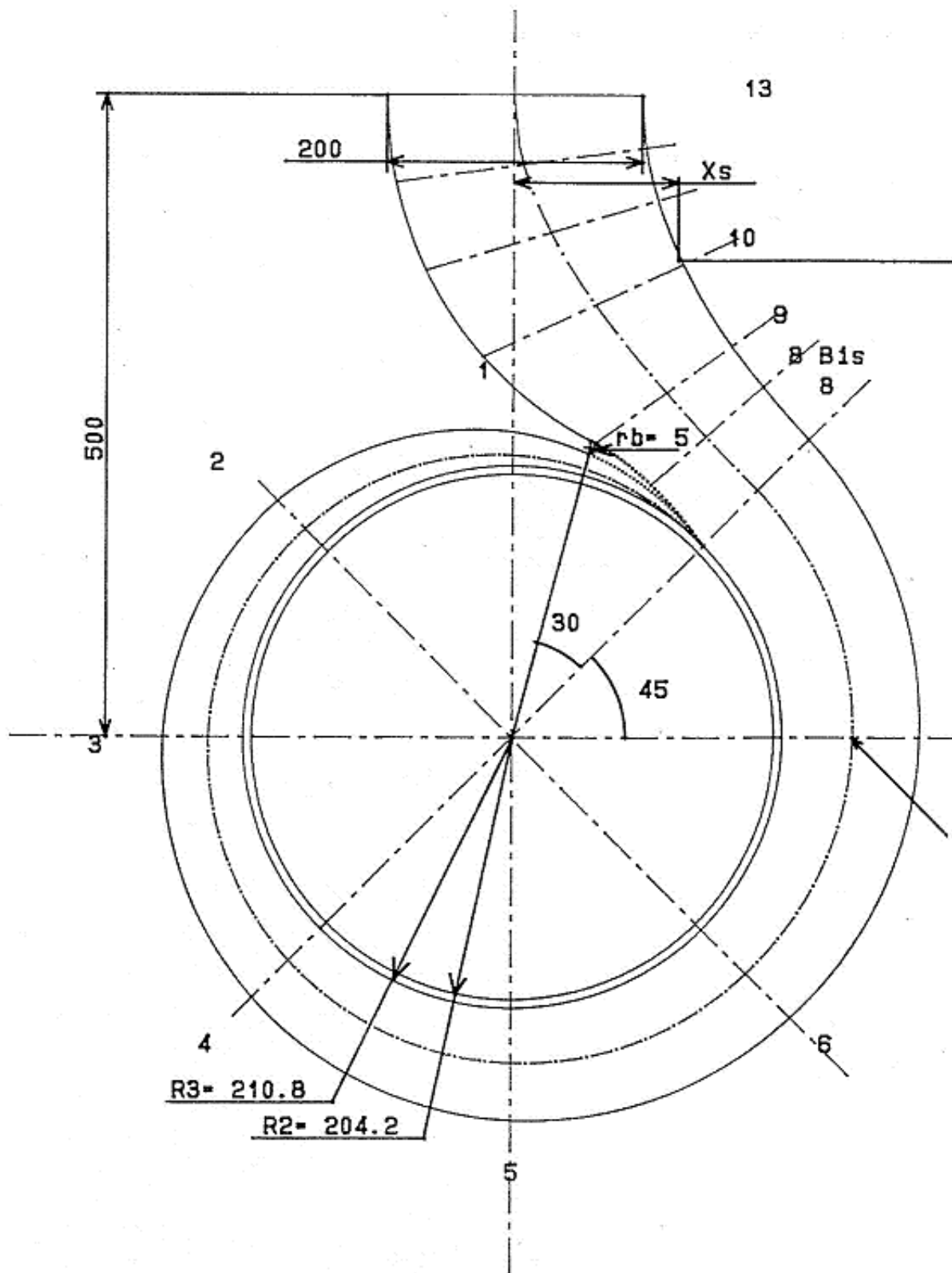




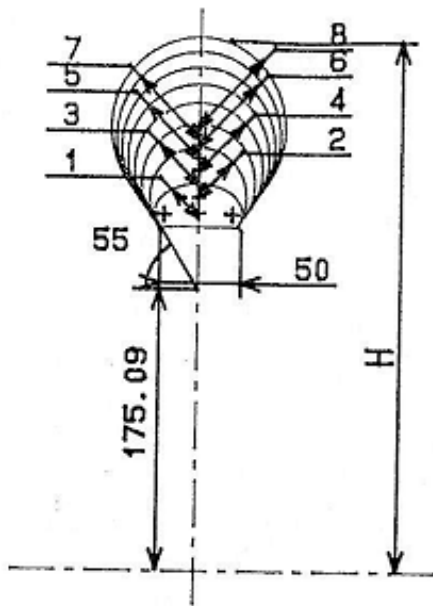
tracé hydraulique de la roue (vue de face)

TABLEAU RECAPITULATIF DES COTES A, R, ALF

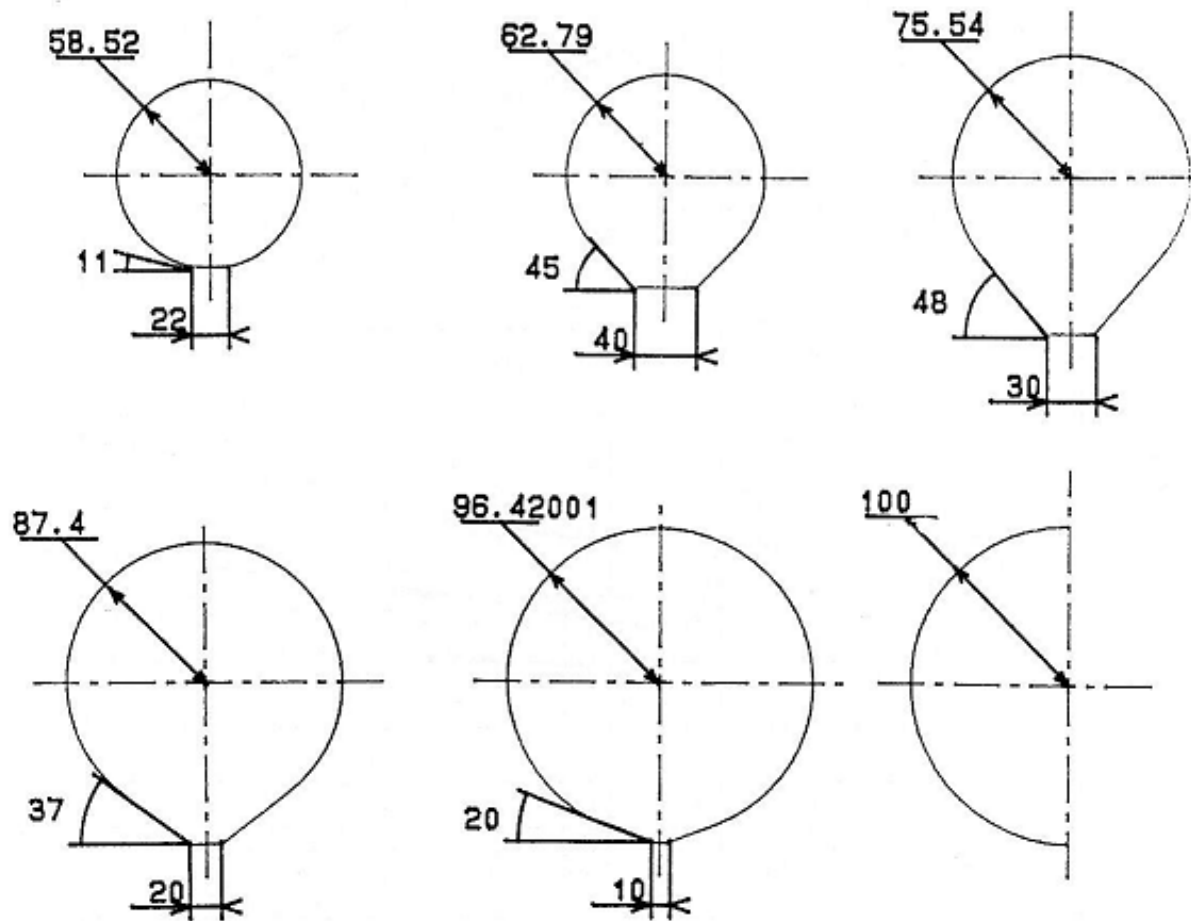
| Angle (deg) | Plafond | | Ligne moy. | | Ceint |
|----------------|---------|--------|------------|--------|-------|
| | R (mm) | A (mm) | R (mm) | A (mm) | |
| 0 | 204.2 | 0 | | | |
| 4.65 | | | 204 | 21 | |
| 9.27 | | | | | 204.2 |
| 10 | 186 | 0 | 194.5 | 21.3 | 202.7 |
| 20 | 168.2 | 0 | 177.6 | 22.1 | 186 |
| 30 | 151 | 0 | 161.9 | 23.2 | 171.4 |
| 40 | 134.7 | .3 | 147.4 | 24.5 | 158.5 |
| 50 | 119.4 | 2.5 | 134.1 | 26.6 | 147.2 |
| 60 | 105.8 | 6.5 | 122.4 | 30.5 | 137.7 |
| 70 | 94.2 | 11.5 | 112.6 | 35.7 | 130.5 |
| 80 | 84.6 | 17 | 104.8 | 41.5 | 125.5 |
| 90 | 76.5 | 22.8 | 98.4 | 47.5 | 122 |
| 100 | 69.6 | 28.5 | 93.3 | 53.6 | 119.6 |
| 110 | 63.8 | 34 | 89 | 59.6 | 117.9 |
| 120 | 58.8 | 39.4 | 85.5 | 65.3 | 116.7 |
| 130 | 54.4 | 44.6 | 82.6 | 70.8 | 115.9 |
| 140 | 50.6 | 49.5 | 80 | 76.2 | 115.3 |
| 150 | 47.2 | 54.3 | 77.9 | 81.2 | 114.9 |
| 160 | 44.2 | 58.7 | 76.1 | 85.9 | 114.7 |
| 166.54 | 41.6 | 62.8 | 75 | 88.8 | 114.6 |



Tracé hydraulique de la volute et du divergent (vue de face)



| Section | H (mm) | R1 (mm) | Surf (cm ²) | Xs (mm) | Ys (mm) | Rs (mm) |
|---------|--------|---------|-------------------------|---------|---------|---------|
| 1 | 237.38 | 18.12 | 12.1 | | | |
| 2 | 259.72 | 30.84 | 24.4 | | | |
| 3 | 274.04 | 36.06 | 36.6 | | | |
| 4 | 286.94 | 40.76 | 49.2 | | | |
| 5 | 298.22 | 44.88 | 61.6 | | | |
| 6 | 308.42 | 48.59 | 73.8 | | | |
| 7 | 317.82 | 52.02 | 85.8 | | | |
| 8 | 326.85 | 55.31 | 98.2 | | | |
| 8 Bis | | 58.51 | 100.3 | 195.12 | 272.45 | 65.77 |
| 9 | | 62.78 | 124.4 | 170.12 | 305.5 | 110.02 |
| 10 | | 75.54 | 187.5 | 131.12 | 371.34 | 190.66 |
| 11 | | 87.4 | 238.1 | 112.12 | 419.99 | 234.05 |
| 12 | | 96.42 | 277.5 | 103.12 | 459.47 | 255.39 |
| 13 | | 100 | 289.3 | 100 | 500 | 282.9 |



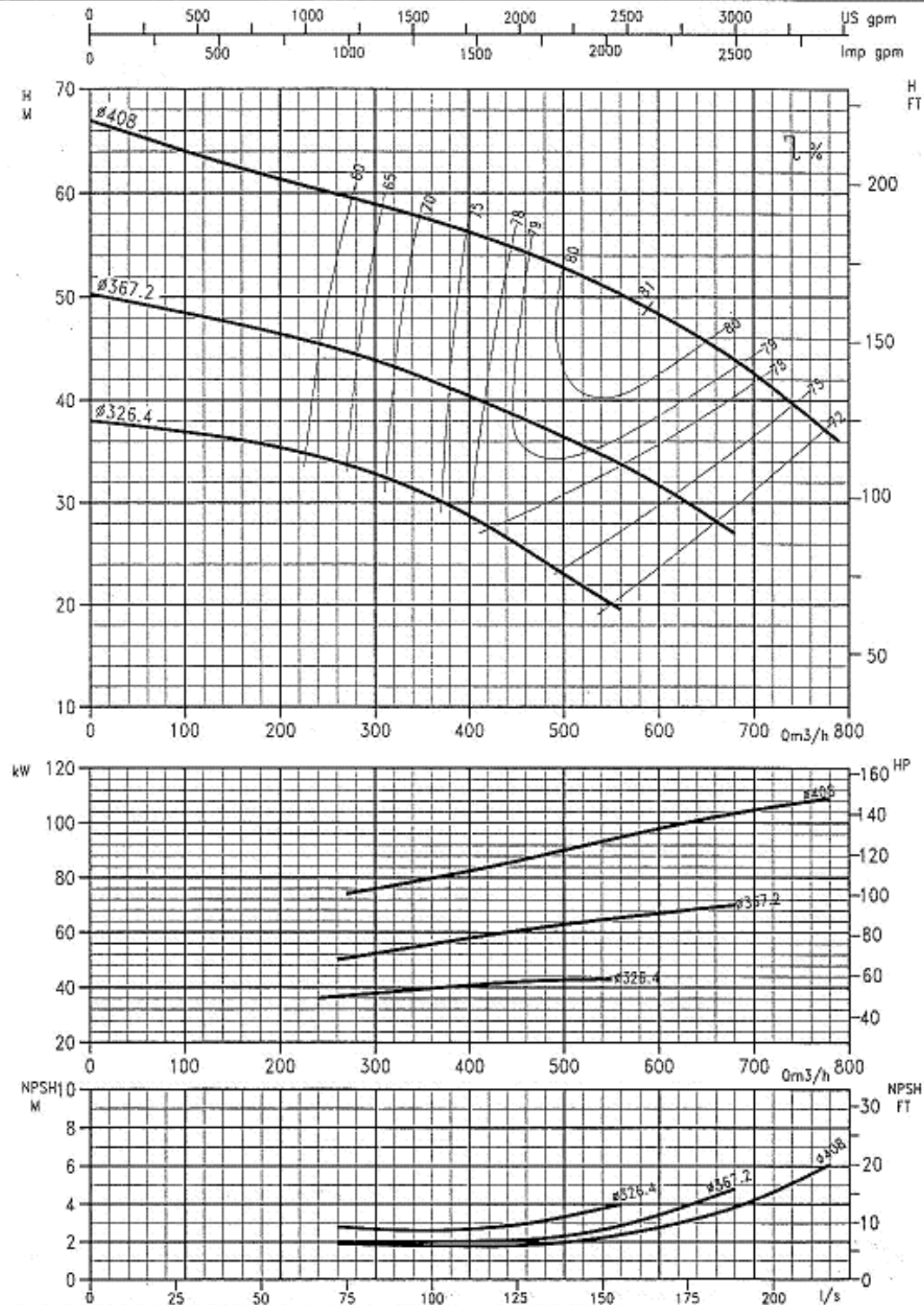
Tracé hydraulique de la volute et du divergent (sections transversales)



MP 250.200.400

1470 tr/mn
Rpm

H1251



Caractéristiques obtenues pour un fonctionnement en liquide de densité 1 et viscosité cinématique de l'ordre de 1 cSt.
 Characteristics obtained for operation with a liquid of specific gravity 1 and kinematic viscosity of around 1 cSt.

I - TRIANGLES DE VITESSES ET MODELISATION DU GLISSEMENT

En présence d'aubages animés d'un mouvement d'entraînement $\vec{U} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, correspondant à la mise en rotation du rotor à la vitesse angulaire ω , on introduit la notion de vitesse relative \vec{W} . En respectant les règles de composition des champs de vitesses, la vitesse relative sera issue de la relation vectorielle :

$$\vec{C} = \vec{U} + \vec{W} \quad (3)$$

La vitesse absolue \vec{C} correspond à la vitesse d'une particule fluide mesurée dans le repère fixe. Dans le repère mobile lié au rotor, la même particule sera animée de la vitesse \vec{W} .

L'introduction de la vitesse relative permet de ramener l'étude de l'écoulement autour des aubages mobiles à celle de l'écoulement autour des mêmes aubages immobilisés artificiellement.

Ainsi, sur le plan purement cinématique, on peut supposer, en première approximation que les relations établies avec la vitesse absolue \vec{C} peuvent être utilisées en remplaçant \vec{C} par la vitesse relative \vec{W} à partir de laquelle on vérifiera notamment la condition de glissement sur les aubages.

1.1. Triangles de vitesses en fonction du débit

Nous considérons dans ce qui suit que la vitesse de rotation ω est constante et que la géométrie de la roue est parfaitement définie.

Pour simplifier cette première approche qualitative, on retient l'hypothèse d'un écoulement relatif axisymétrique. Enfin, pour faciliter la comparaison des relations établies avec celles de la littérature, les angles relatifs sont comptés positivement dans le sens inverse du sens trigonométrique.

a) Adaptation à l'entrée de la roue

En supposant que le fluide pénètre dans la roue sans pré-rotation, la vitesse d'entraînement \vec{U}_1 et la vitesse absolue \vec{C}_1 sont entièrement définies par leurs composantes :

$$\vec{U}_1 \left| \begin{array}{l} 0 \\ U_1 = \omega R_1 \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\vec{C}_1 \left\{ \begin{array}{l} Cr_1 = \frac{qv}{S_1} = \frac{qv}{2\pi R_1 b_1} \\ Cu_1 = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

A partir des triangles de vitesses, on peut calculer la direction du fluide matérialisée par l'angle β_1 :

$$tg \beta_1 = \frac{U_1}{Cr_1} = \frac{\omega R_1^2 2\pi b_1}{qv} \quad (6)$$

On définit l'adaptation lorsque l'angle fluide β_1 est égal à l'angle d'aubage β_{1o} (qv est alors égal à qva).

$$tg \beta_1 = \frac{\omega R_1^2 2\pi b_1}{qv} = tg \beta_{1o} \quad \text{et } qv = qva \quad (7)$$

D'où la valeur du débit d'adaptation qva en fonction de la vitesse de rotation et de la géométrie de l'entrée d'ailette

$$\boxed{qva = \frac{2\pi \omega R_1^2 b_1}{tg \beta_{1o}}} \quad (8)$$

Dans le cas où $qv < qva$ (figure 3a), l'angle fluide β_1 est supérieur à l'angle d'aubage β_{1o} et on observe un décollement se produisant sur la face en dépression de l'aubage qui s'accroît quand on s'éloigne du débit d'adaptation.

Quand $qv > qva$ (figure 3c), l'angle fluide β_1 est inférieur à l'angle d'aubage β_{1o} et c'est la face en pression qui est le siège d'un décollement.

Naturellement, ces perturbations s'accompagnent de pertes que l'on qualifie de **pertes de désadaptation**.

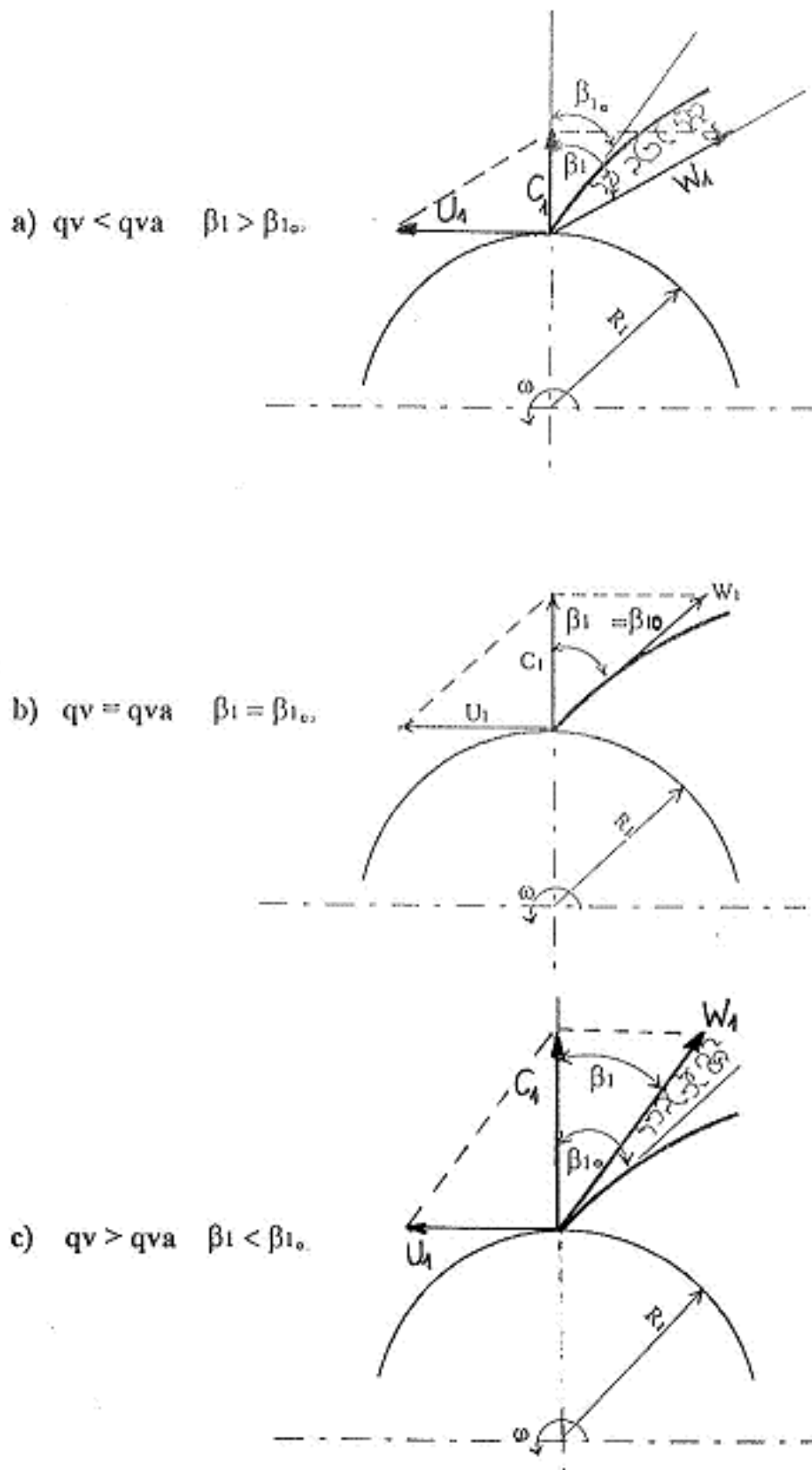


Figure 3 : Influence du débit sur les triangles des vitesses à la sortie de la roue

b) Triangles de vitesses à la sortie de la roue

Les triangles de vitesses de sortie ne peuvent être construits sans l'intervention d'une hypothèse simplificatrice qui consiste à supposer que le fluide sort de la roue suivant la direction imposée par la direction de sortie d'aubage. Cette hypothèse, appelée hypothèse d'Euler, n'est justifiée que dans le cas où le nombre d'aubages tend vers l'infini.

Dans ces conditions, la direction de la vitesse relative \vec{W}_2 correspond à l'angle $\beta_{2\infty}$ de l'aube et ceci quel que soit le débit. La relation d'Euler s'écrit alors :

$$H_{th\infty} = \frac{U_2 C_{u_{2\infty}}}{g} \quad (9)$$

Les vitesses se décomposeront de la manière suivante (figure 5b).

$$\vec{U}_2 \left| \begin{array}{l} 0 \\ U_2 = \omega R_2 \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\vec{C}_2 \left| \begin{array}{l} C_{r_2} = \frac{qv}{2\pi R_2 b_2} \\ C_{u_2} = U_2 - C_{r_2} \operatorname{tg} \beta_{2\infty} \end{array} \right. \quad (11)$$

d'où l'expression analytique de la hauteur en fonction du débit, de la vitesse de rotation et de la géométrie de la roue :

$$H_{th\infty} = \frac{U_2}{g} \left[U_2 - \frac{qv}{2\pi R_2 b_2} \operatorname{tg} \beta_{2\infty} \right] \quad (12)$$

Lorsque le débit diminue (figure 4a), la composante $C_{u_{2\infty}}$ augmente ainsi que la hauteur théorique. Quand le débit qv tend vers zéro la hauteur prend la valeur $\frac{U_2^2}{g}$.

Inversement, lorsque le débit augmente (figure 4c), la composante C_{u_2} diminue jusqu'à atteindre une valeur nulle. Le débit correspondant à l'annulation de la hauteur théorique est donné par l'annulation de l'équation (12) :

$$q_{v \max \infty} = \frac{2\pi \omega R_2^2 b_2}{\operatorname{tg} \beta_{2\infty}} \quad (13)$$

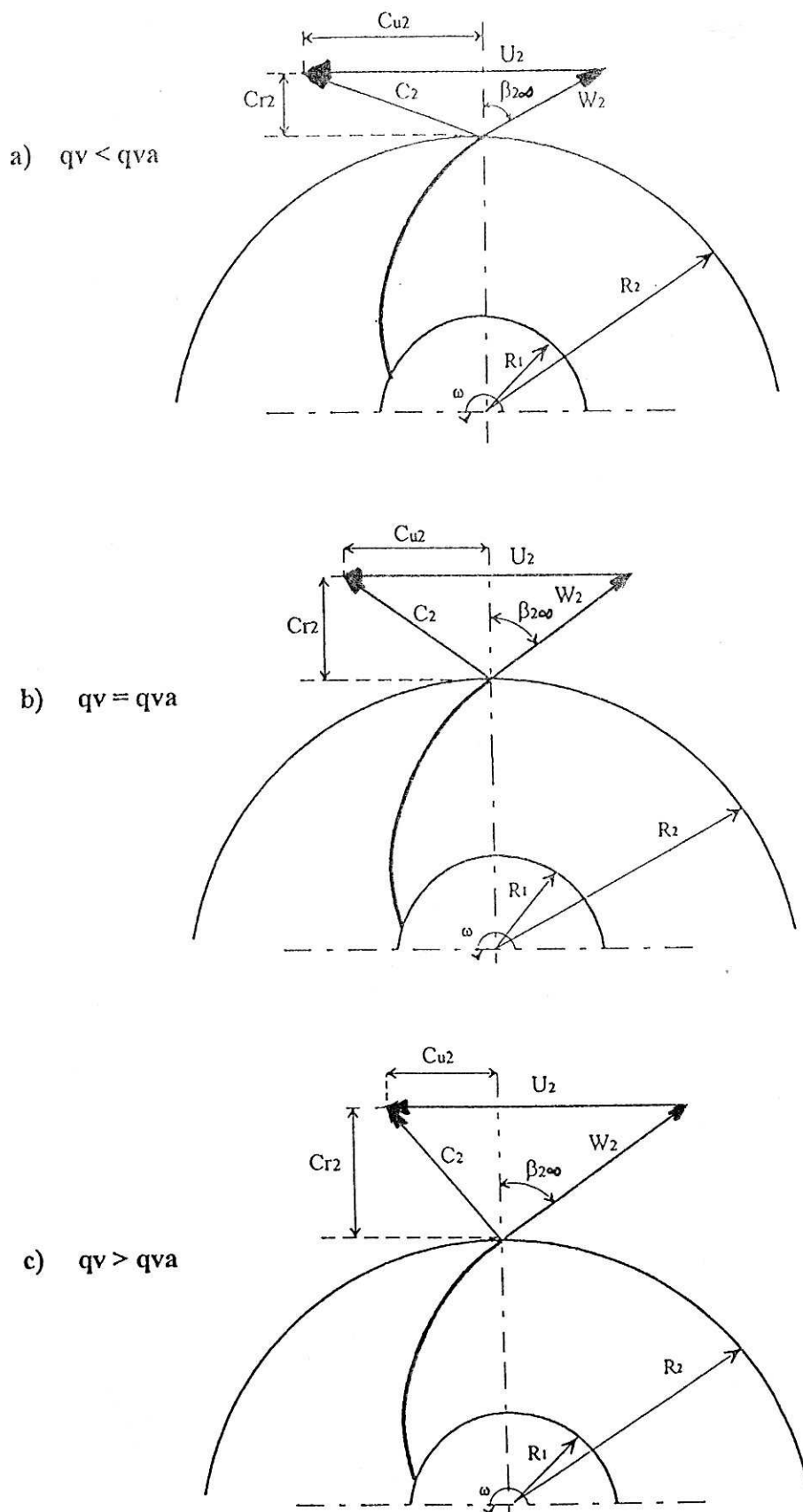


Figure 4 : Influence du débit sur les triangles des vitesses à la sortie de la roue

1.2. Influence du nombre d'aubes et modélisation du coefficient de glissement

Nous avons supposé jusqu'ici que le fluide sortait de la roue suivant l'angle $\beta_{2\infty}$ des aubes. Cependant, en nombre fini d'aubages, tout se passe comme si l'écoulement moyen subissait en bloc un écart angulaire par rapport à la direction de sortie d'aubage.

Pour illustrer ce phénomène, nous présentons le tracé du champ de vitesses dans une roue centrifuge, ces résultats sont obtenus par l'application la méthode des singularités suivie d'une transformation conforme (chapitre A de ce cours).

Les figures 7a et 7b donnent l'évolution du champ de vitesses dans l'espace inter-aubages. On constate d'importantes vitesses sur la ligne de courant extérieure et des vitesses plus faibles, voire nulles ou négatives, sur la ligne de courant intérieure.

La présence du tourbillon relatif engendre donc un écoulement relatif non axisymétrique pour lequel on observe sur un même rayon :

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} > 0 \quad (14)$$

Le champ de pression est calculé à partir de la relation de Bernoulli en mouvement relatif (relation obtenue après simplifications classiques) :

$$p + \rho \left[\frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} \right] = \text{cte} \quad (15)$$

La constante est calculée en fixant la pression à l'entrée sur ligne moyenne.

La ligne de courant intérieure est en surpression par rapport à la ligne de courant extérieure jusqu'à la sortie où la condition de périodicité impose une égalité parfaite.

La partie située près du bord d'attaque de la face en dépression sera le siège du phénomène de cavitation en présence d'une pression d'entrée suffisamment faible.

Sur un même rayon, la différence de pression ($p_i - p_e$) matérialisera l'effort du fluide sur la pale, effort à l'origine du couple moteur \mathcal{C}_m exigé pour entretenir le mouvement.

Celui-ci se calculera à partir des relations suivantes écrites pour une épaisseur d'écoulement unitaire :

$$d\mathcal{C}_m = r \cdot (p_i - p_e) N_a \cos \beta \, dl \quad (16)$$

avec N_a : nombre d'aubages

Soit finalement :

$$\mathcal{C}_m = N_a \int_e^s r (p_i - p_e) \cos \beta \, dl \quad (17)$$

L'allure de l'écart de pression ($p_i - p_e$) est donnée ci-dessous en fonction de l'abscisse curviligne de la pale (figure 5).

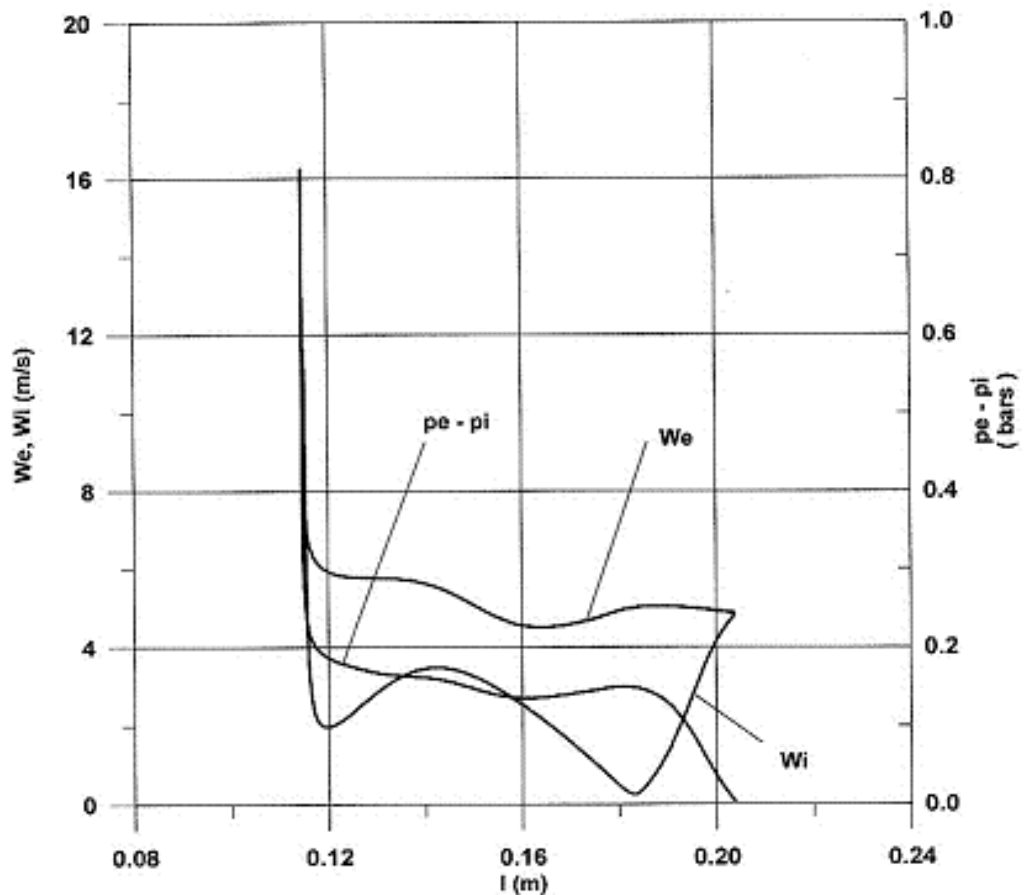


Figure 5 : Evolution des vitesses relatives et de la pression en fonction de l'abscisse curviligne de la pale.

Condition de périodicité :

Celle-ci s'exprime, au même titre que la condition de Kutta-Joukowski, par l'unicité de la vitesse au bord de fuite des aubes. Dans le cas d'une grille, il convient donc de respecter l'égalité des vitesses aux points F_i et F_e .

Cette propriété ne peut être observée que dans le cas où la ligne de courant ψ_e s'écarte, à partir de F_e , de la direction de sortie d'aubage d'un angle $\Delta\beta$.

A l'écart angulaire $\Delta\beta$, observé ci-dessous, est associé le coefficient de glissement μ traduisant globalement un défaut de hauteur produite. L'expression de μ est donnée par le rapport :

$$\mu = \frac{Cu_2}{Cu_{2\infty}} = \frac{H_{th}}{H_{th\infty}} \quad (18)$$

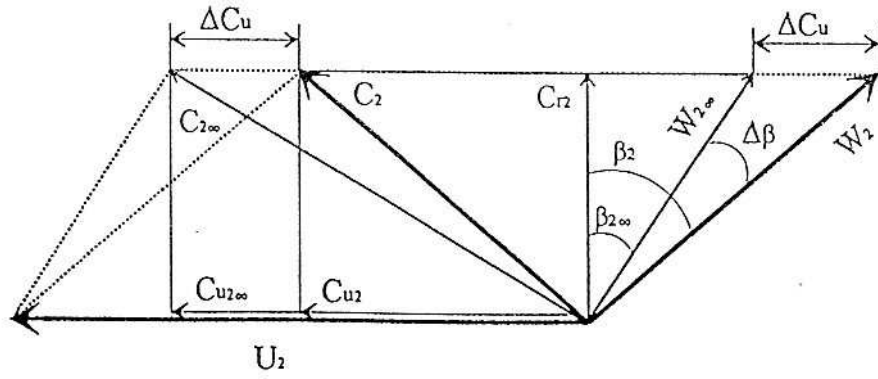
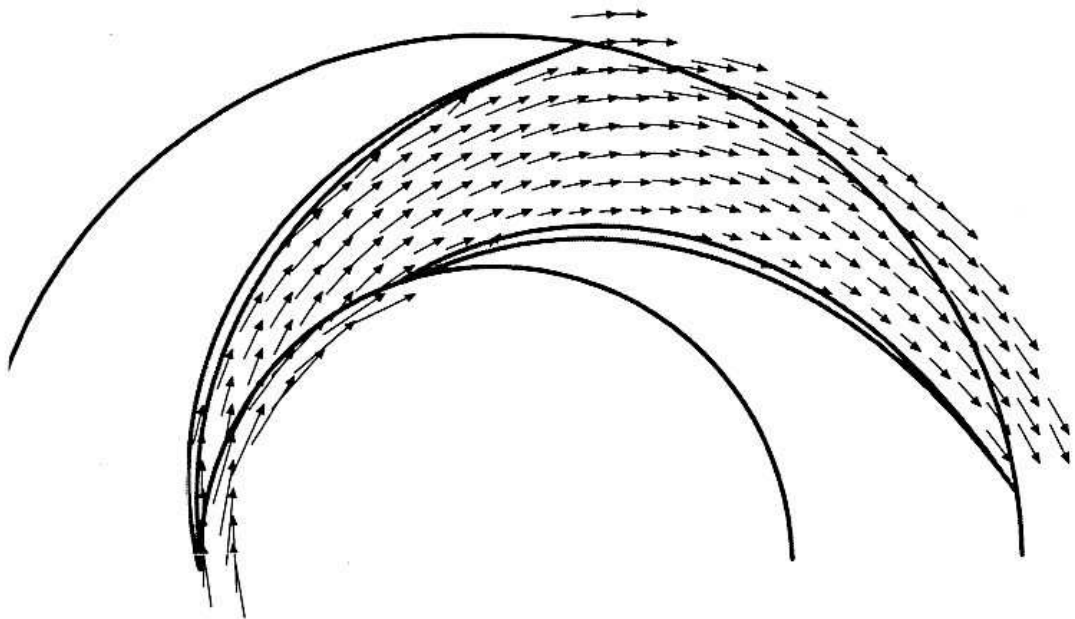
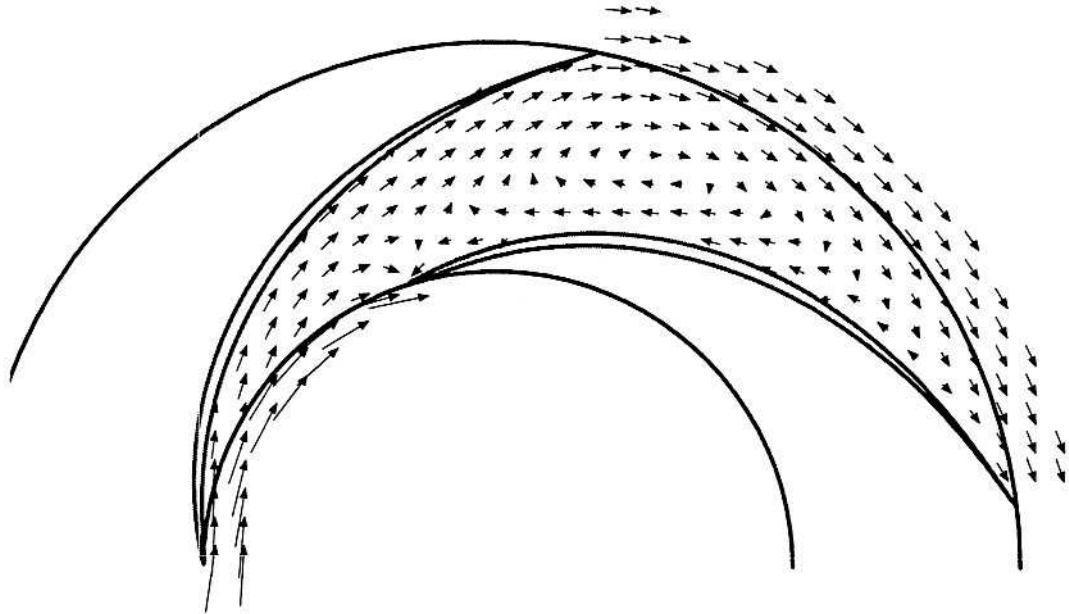


Figure 6 : Influence du glissement sur les triangles des vitesses.



$$q_v/q_n = 1$$

Figure 7a : Champ de vitesses dans l'espace inter aubages. Fonctionnement nominal.



$$qv/qn = 0.2$$

Figure 7b : Champ de vitesses dans l'espace inter aubages. Fonctionnement en débit partiel.

Modélisation du coefficient de glissement :

Il existe dans la littérature de nombreuses relations semi-empiriques permettant de calculer le coefficient de glissement. Plusieurs auteurs se sont intéressés à ce calcul parmi lesquels Stodola (1925), Busemann (1928), Pfeleiderer (1935), Balje (1952), Weisner (1967). Toutes ces corrélations ne doivent être utilisées que dans les conditions où les coefficients numériques qu'elles contiennent ont été confrontés avec l'expérience.

En ce qui nous concerne, nous avons utilisé les résultats expérimentaux en notre possession pour améliorer la formulation initiée par Pfeleiderer. Ainsi, nous avons établi une relation empirique permettant de calculer le coefficient de glissement sur une large plage de vitesses spécifiques (nsq variant de 10 à 120).

La relation de Pfeleiderer fait apparaître le coefficient p dans l'expression du facteur de glissement :

$$\mu = \frac{1}{1+p} \quad (19)$$

pour lequel il propose la forme :

$$p = \frac{0,6(1 + \cos \beta_{2\infty}) R_2^2}{Na Mst} \quad (20)$$

Na étant le nombre d'aubes et Mst le moment statique par rapport à l'axe de rotation (voir figure 22) :

$$Mst = \int_{R_1}^{R_2} r \, dm = \int_{R_1}^{R_2} \frac{r \, dr}{\sin \delta} \quad (21)$$

Si l'angle de centrifugation δ n'est pas constant, on intégrera le long de la ligne de courant. Dans le cas contraire, le moment statique prendra la forme suivante :

$$Mst = \frac{1}{\sin \delta} \int_{R_1}^{R_2} r \, dr = \frac{R_2^2 - R_1^2}{2 \sin \delta} \quad (22)$$

d'où :

$$\mu = \frac{1}{1 + \frac{1,2 \sin \delta}{Na} \frac{1 + \cos \beta_{2\infty}}{1 - \left[\frac{R_1}{R_2} \right]^2}} \quad (23)$$

Pour les machines de grande vitesse spécifique, on constate partant des résultats expérimentaux, l'inadaptation de la relation (23). Ainsi, on fait intervenir un facteur de correction Km introduit en lieu et place du coefficient 1,2 de la relation précédente :

$$\mu = \frac{1}{1 + \frac{Km \sin \delta}{Na} \frac{1 + \cos \beta_{2\infty}}{1 - \left[\frac{R_1}{R_2} \right]^2}} \quad (24)$$

Sur la base de résultats concernant plusieurs pompes industrielles, on observe pour le facteur de correction Km l'allure donnée en figure 8.

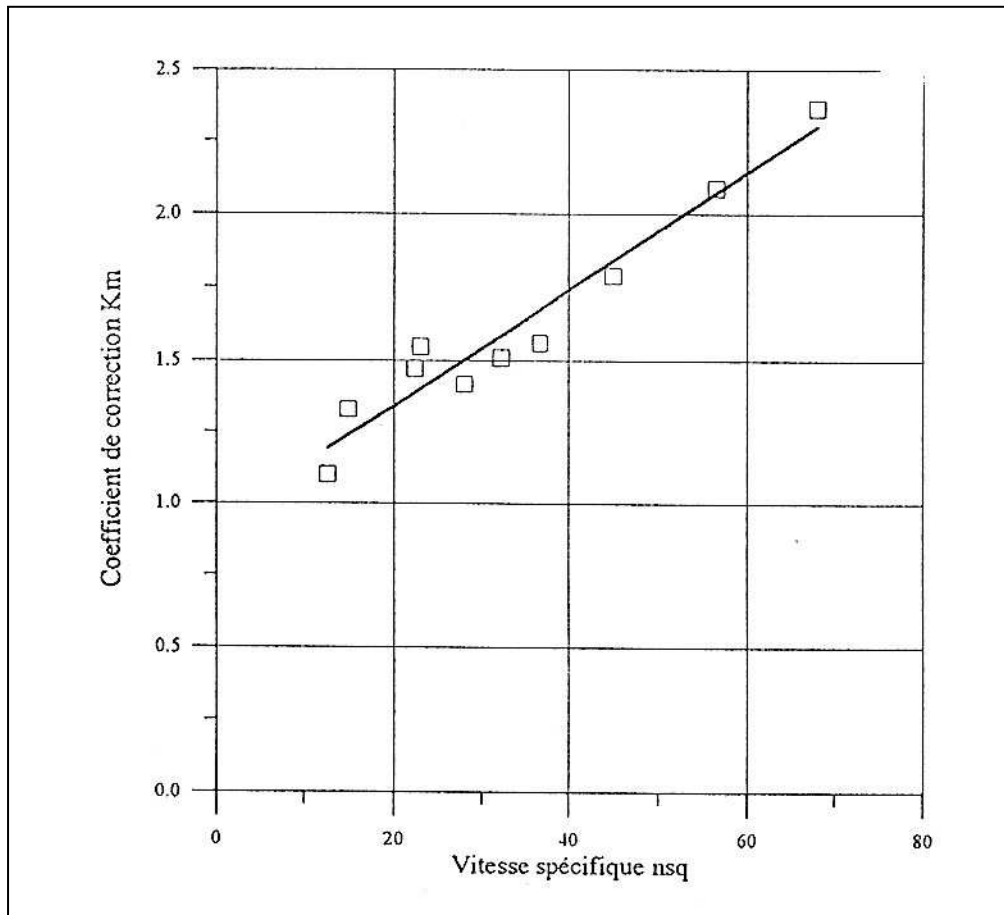


Figure 8 : Evolution du coefficient Km en fonction de la vitesse spécifique nsq

La relation proposée pour le coefficient Km est la suivante :

$$\boxed{K_m = 0,02 \text{ nsq} + 0,94} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \text{nsq} \leq 120 \\ 60^\circ \leq \beta_{10} \text{ et } \beta_{2\infty} \leq 75^\circ \end{array} \quad (25)$$

II - CARACTERISTIQUES DE LA MACHINE, EVALUATION DES PERTES

2.1. Caractéristique $H = f(qv)$

La hauteur théorique, pour un nombre d'aubes infini, est donnée par la relation d'Euler :

$$H_{th\infty} = \frac{U_2 Cu_{2\infty}}{g}$$

Suivant l'équation de continuité et la propriété des triangles de vitesses en sortie, on écrit:

$$Cr_2 = \frac{qv}{2\pi R_2 b_2} \quad (26)$$

et
$$Cu_{2\infty} = U_2 - Cr_2 \operatorname{tg} \beta_{2\infty} \quad (27)$$

d'où :
$$H_{th\infty} = \frac{U_2}{g} \left[U_2 - \frac{qv}{2\pi R_2 b_2} \operatorname{tg} \beta_{2\infty} \right] \quad (28)$$

C'est l'équation d'une droite descendante avec le débit et passant par deux points de coordonnées calculables :

A débit nul :
$$qv = 0 \text{ et } H_{th\infty} = \frac{U_2^2}{g}$$

A hauteur nulle :
$$H_{th\infty} = 0 \text{ et } qv = qv_{\max\infty} = \frac{2\pi R_2^2 b_2}{\operatorname{tg} \beta_{2\infty}} \quad (29)$$

Pour un nombre fini d'aubages, une estimation de la hauteur théorique peut être donnée à partir du champ de vitesses calculé en sortie de roue (par exemple le champ de vitesses donne en figures, 7a et 7b) :

$$H_{th} = \frac{1}{g} U_2 \frac{\overline{Cu_2 Cr_2}}{Cr_2} \quad (30)$$

Les moyennes sont effectuées sur la circonférence complète de la roue

$$\overline{Cu_2 Cr_2} = \int_0^{2\pi} Cu_2(\theta) Cr_2(\theta) d\theta \quad (31)$$

$$\overline{Cu_2} = \int_0^{2\pi} Cr_2(\theta) d\theta = \frac{qv}{2\pi R_2 b_2} \quad (32)$$

En procédant ainsi pour divers débit on obtient la caractéristique théorique.

On remarque sur l'exemple donné en figure 9 que la courbe $H_{th} = f(qv)$ est également une droite pratiquement parallèle à celle établie pour une infinité d'aubages.

La hauteur théorique en nombre fini sera déduite à partir du point d'adaptation par la relation :

$$H_{th} = \bar{\mu} H_{th\infty} \quad (33)$$

$\bar{\mu}$ étant le coefficient de glissement moyen, calculé sur les trois lignes de courant ψ_e , ψ_i , ψ_m à partir de la relation (24).

$$\bar{\mu} = \frac{\mu\psi_m + \mu\psi_e + \mu\psi_i}{3} \quad (34)$$

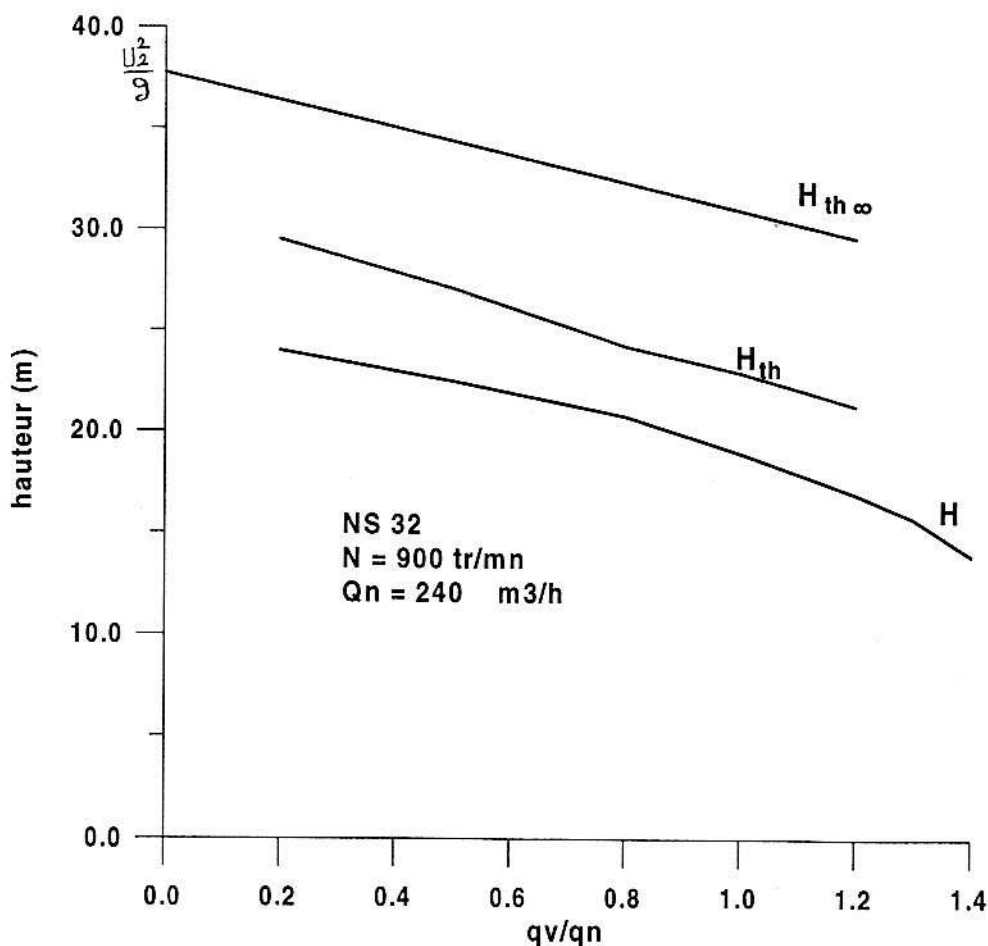


Figure 9 : Caractéristique hauteur - débit.

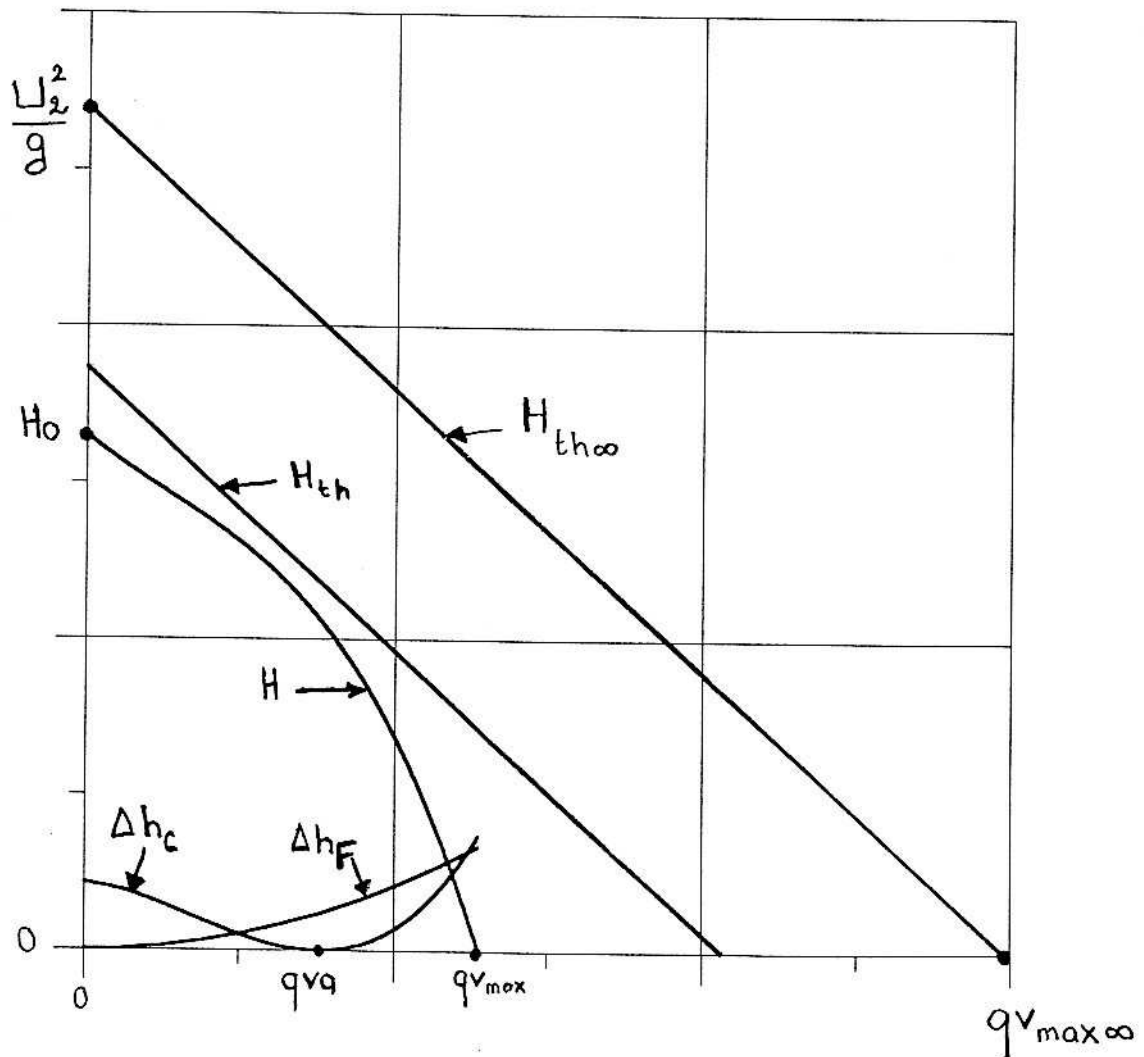


Figure 10 : Construction de la courbe caractéristique $H = f(qv)$

Pour la majorité des pompes, l'hypothèse du parallélisme est vérifiée expérimentalement, du moins dans la zone d'écoulement sain allant de 70% à 120% du débit nominal.

Au régime d'adaptation, correspondant au débit q_{va} , seules les pertes par frottement Δh_f existent. Celles-ci varient sensiblement comme le carré du débit et sont représentées par la parabole Δh_f (**figure 10**).

Les pertes de désadaptation Δh_c croissent de part et d'autre du débit d'adaptation suivant une forme également parabolique. En retranchant l'ensemble de ces pertes de la hauteur théorique H_{th} , on obtient la hauteur caractéristique $H = H_{th} - \Delta h$.

Elle coupe les axes en deux points particuliers :

* A débit nul H_o la hauteur à vanne fermée

* A hauteur nulle, $q_{v_{max}}$ le débit maximal que débite la machine lorsqu'elle refoule à la pression d'aspiration.

2.2. Pertes énergétiques

Les pertes dans la machine sont de trois types : hydrauliques ou aérauliques, mécaniques et volumétriques, elles sont incontournables mais peuvent être optimisées. Bien entendu, les pertes dues à l'environnement, par exemple à une mauvaise alimentation de la roue, ne font pas l'objet de ce paragraphe et ne sont pas à prendre en compte dans le cadre d'un fonctionnement normal.

Les pertes hydrauliques

Ces pertes sont arbitrairement dissociées en deux catégories :

- les pertes par frottement.
- les pertes de désadaptation.

Le rendement hydraulique les caractérisant est donné par :

$$\eta_H = \frac{H_{th} - \Delta h}{H_{th}} \quad (34)$$

Avec Δh : ensemble des pertes hydrauliques

Modélisation des pertes par frottement

En raison du caractère fortement tridimensionnel des canaux inter aubages. Les pertes dans les canaux de la roue, du diffuseur et de la volute, sont difficiles à modéliser, même en régime d'adaptation.

On distingue ainsi sous le vocable de pertes par frottement, l'ensemble des trois pertes suivantes :

- les pertes par frottement du fluide à la paroi des canaux Δh_f ,
- les pertes par changement de direction liées à la courbure de la veine fluide Δh_{cd} ,
- les pertes par élargissement Δh_e .

Ces deux dernières pertes se produisent sur une longueur plus ou moins importante du canal et ne sont pas dissociables des pertes par frottement. Cependant, pour la commodité du calcul, nous les supposerons concentrées dans le tronçon considéré.

La perte totale sera obtenue suivant le principe d'additivité :

$$\Delta h_{Fi} = \Delta h_{fi} + \Delta h_{ei} + \Delta h_{cdi} \quad (\text{sur un tronçon})$$

En discrétisant le canal en n tronçons :

$$\Delta h_F = \sum_{i=1}^n \Delta h_{Fi} \quad (36)$$

Définition géométrique d'un tronçon

Dans le cas de la roue, on modélise chaque subdivision par un parallélépipède (**figure 11**) et par un tronc de cône dans le cas de la volute. Les éléments sont caractérisés par une section d'entrée S_i , une section de sortie S_{i+1} et une longueur curviligne Δl_i .

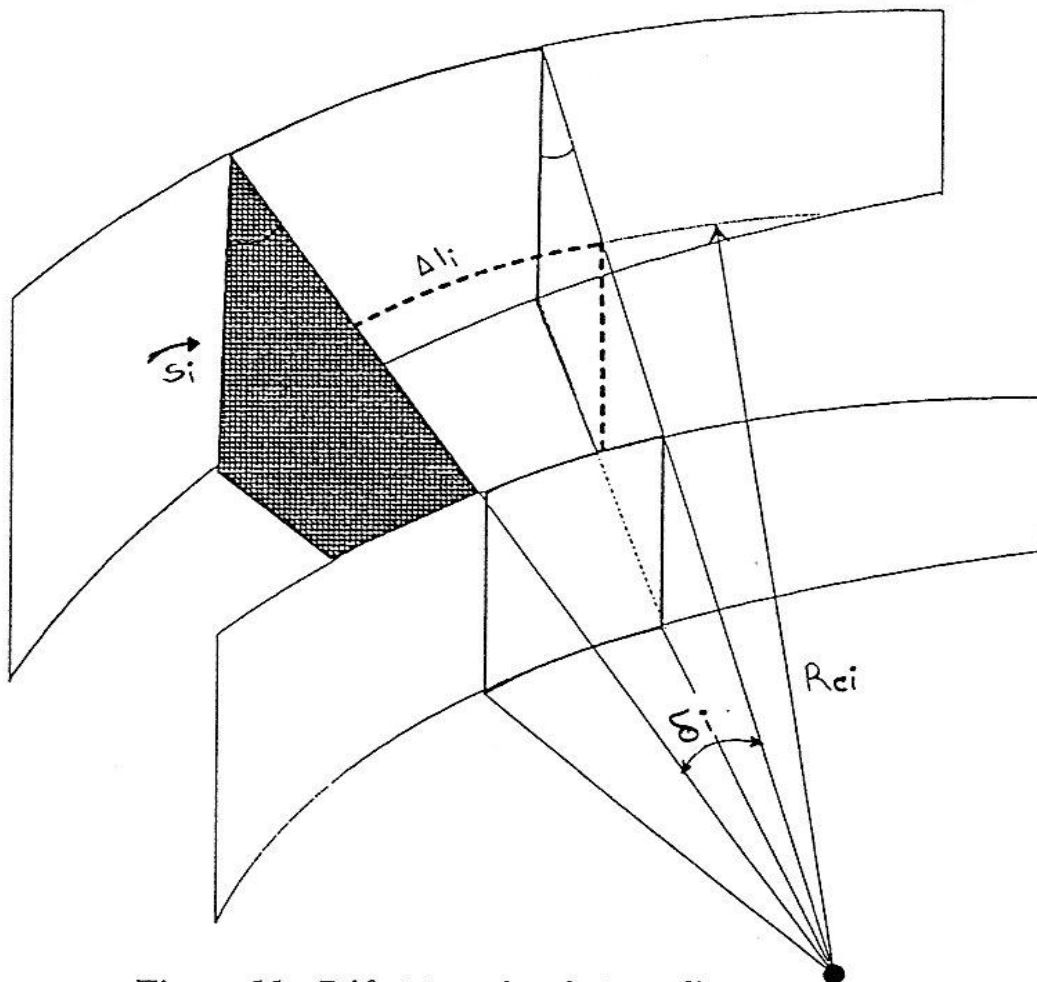


Figure 11 : Définition géométrique d'un tronçon

Définition de la perte par frottement Δh_{fi}

Les pertes par frottement sont liées à la viscosité du fluide et résultent des échanges de quantité de mouvement entre les diverses particules des couches voisines de fluide qui se déplacent avec des vitesses différentes. On retiendra, pour ces pertes, la relation de Darcy-Weissbach, définie pour un écoulement turbulent dans un tuyau rugueux :

$$\Delta h_{fi} = \frac{\lambda_i \Delta l_i}{Dh_i} \frac{W_i^2}{2g} \quad (37)$$

Dh_i : diamètre hydraulique.

W_i : vitesse débitante dans la section d'entrée : $W_i = \frac{QV}{S_i}$

λ_i est le coefficient linéique de perte de charge, il tient compte de la nature de l'écoulement et de l'état de surface des parois, il est donné par la formule de Colebroock et White :

$$\lambda_i = \frac{1}{\left[-2 \log_{10} \left[\frac{2,51}{Re_i \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\bar{\Delta}}{3,71} \right] \right]^2} \quad (38)$$

$\bar{\Delta}$: rugosité relative

avec :

Δ : hauteur moyenne des aspérités supposées uniformément réparties

Re_i : nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement :

$$Re_i = \frac{W_i Dh_i}{\nu}$$

ν : viscosité cinématique du fluide

Définition de la perte par élargissement progressif Δh_{ei}

Les pertes de charge par élargissement sont liées à l'accroissement ou au décollement de la couche limite due à la présence d'un gradient de pression positif provoqué par la chute de vitesse associée à l'élargissement de la section débitante (**figure 12**). Nous retiendrons pour ces pertes la relation relative aux divergents coniques.

$$\Delta h_{ei} = 3,2 \left[\frac{D_{hi+1} - D_{hi}}{2 \Delta l_i} \right]^{1,25} \left[1 - \left[\frac{S_i}{S_{i+1}} \right]^2 \right] \frac{W_i^2}{2g} \quad (39)$$

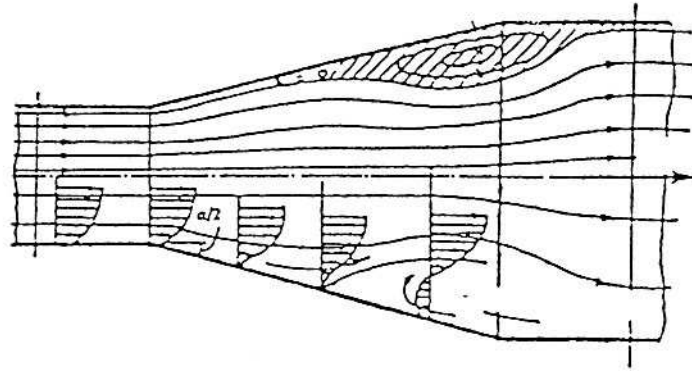


Figure 12 : Décollement dans un divergent

Définition des pertes par changement de direction Δh_{cdi}

Les pertes de charge par changement de direction sont associées à la formation de zones de décollement tourbillonnaire au voisinage des parois et réduisant la section de l'écoulement principal. La superposition de la force centrifuge et de la couche limite de paroi donne naissance à un écoulement secondaire transversal qui, en se superposant à l'écoulement principal, donne une forme hélicoïdale aux lignes de courant (**figure 13**).

On peut calculer ces pertes par la relation de Nekrassov simplifiée relative à un coude de section circulaire.

$$\Delta h_{cdi} = \left| \frac{0,1134 \sin(\delta_i)}{\sqrt{\frac{R_{ei}}{D_{hi}}}} \right| \frac{W_i^2}{2g} \quad (40)$$

δ_i : l'angle au centre

R_{ci} : le rayon de courbure.

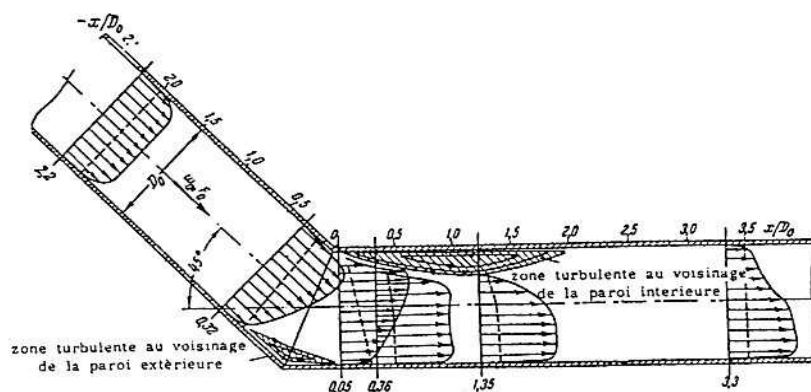


Figure 13 : Décollement tourbillonnaire et écoulement secondaire dans un coude

Modélisation des pertes de désadaptation

Les pertes de désadaptation générées par l'écart formé entre la direction de la veine fluide et l'angle des aubes de la roue, sont représentées, pour des raisons de simplification, par une relation de type parabolique :

$$\Delta h_c = K_c (q_v - q_{va})^2$$

Sur la base du dépouillement de résultats expérimentaux concernant plusieurs pompes industrielles représentant une plage de vitesses spécifiques de 10 à 70, on a mis en évidence l'allure de ces pertes (**figure 14**).

On définit le coefficient de pertes de désadaptation (pertes par choc) ψ_c et le coefficient de débit φ_c par les relations suivantes :

$$\psi_c = \frac{\Delta h}{\frac{U_2^2}{g}} \quad (41)$$

$$\varphi_c = \frac{q_v}{q_{va}} \quad (42)$$

On peut noter avec satisfaction que ces pertes s'annulent pratiquement toutes au voisinage du débit d'adaptation et présentent comme prévu une forme quadratique pratiquement symétrique sauf au voisinage immédiat du débit nul.

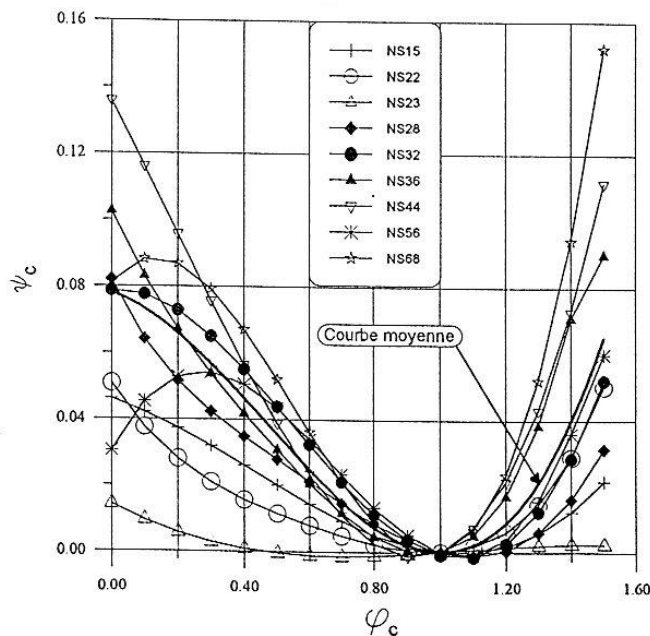


Figure 14 : Evolution des pertes de désadaptation en fonction du débit.

Modèle proposé

L'évolution moyenne donnée sur la figure précédente peut être représentée par la corrélation suivante :

$$\psi_C = 0,12 \varphi_C^3 - 0,17 \varphi_C^2 - 0,03 \varphi_C + 0,08 \quad (43)$$

La **figure 15** présente, à titre d'exemple, une comparaison des caractéristiques expérimentale et théorique $H = f(qv)$ établies suivant le modèle ci-dessus pour une pompe de vitesse spécifique égale à 32.

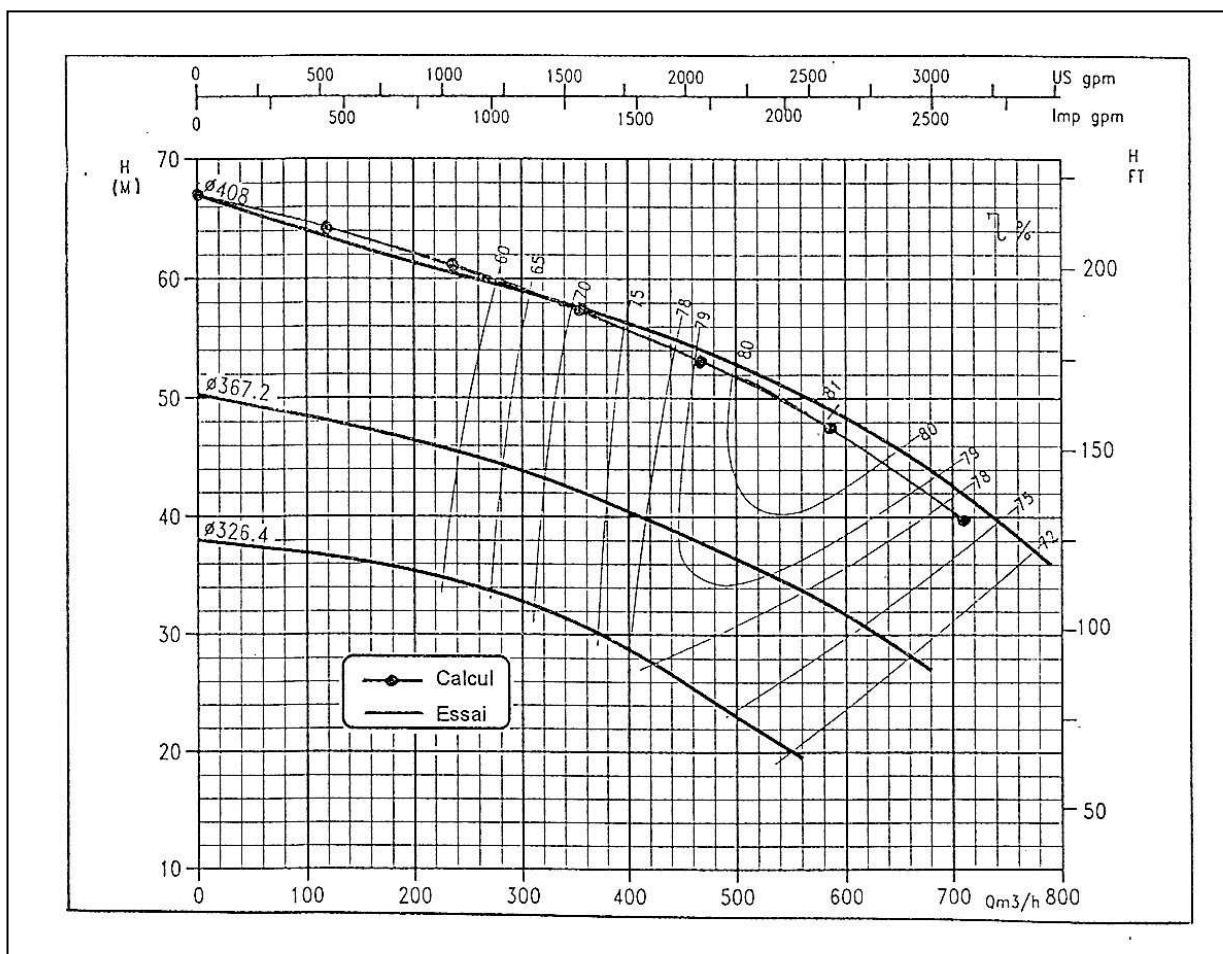


Figure 15 : Comparaison des caractéristiques $H = f(qv)$ théorique et expérimentale ($nsq = 32$).

Pertes mécaniques

Ces pertes sont de deux types

- les pertes mécaniques externes liées au frottement de l'arbre sur les paliers (paliers hydrostatiques, paliers à billes, etc.) et les dispositifs d'étanchéité (garnitures mécaniques, presse-étoupes) :

- les pertes mécaniques internes P_{ff} dues au frottement des flasques tournants que l'on calcule en assimilant les faces extérieurs d'une roue centrifuge aux deux faces d'un disque mince de même rayon extérieur R_2 tournant à la vitesse angulaire ω .

On retient, pour les fluides peu visqueux de masse volumique ρ , la relation :

$$P_{ff} = 2,3 \cdot 10^{-3} \rho \omega^3 R_2^5 \quad (44)$$

L'ensemble de ces pertes se traduit par une puissance mécanique P_m qui dépend essentiellement de la vitesse de rotation. Le rendement mécanique caractérise l'ensemble de ces pertes :

$$\eta_m = \frac{P_a - P_m}{P_a} \quad (45)$$

avec :

P_a : puissance absorbée sur l'arbre de la pompe
 P_m : perte mécanique totale

Pertes volumétriques

Les pertes volumétriques sont fonction des diverses fuites et prélèvements de débit que l'on observe dans la machine, à savoir : les fuites extérieures par les dispositifs d'étanchéité mais surtout les fuites internes entre les bagues d'étanchéité, les jeux de fonctionnement, les prélèvements de liquide assurant le refroidissement des paliers, des presse-étoupes, des systèmes d'équilibrage,....

Le rendement volumétrique caractérisant ces pertes est donné par la relation :

$$\eta_v = \frac{q_v}{q_v + q_{v_f}} \quad (46)$$

avec :

q_{v_f} : débit total de fuite

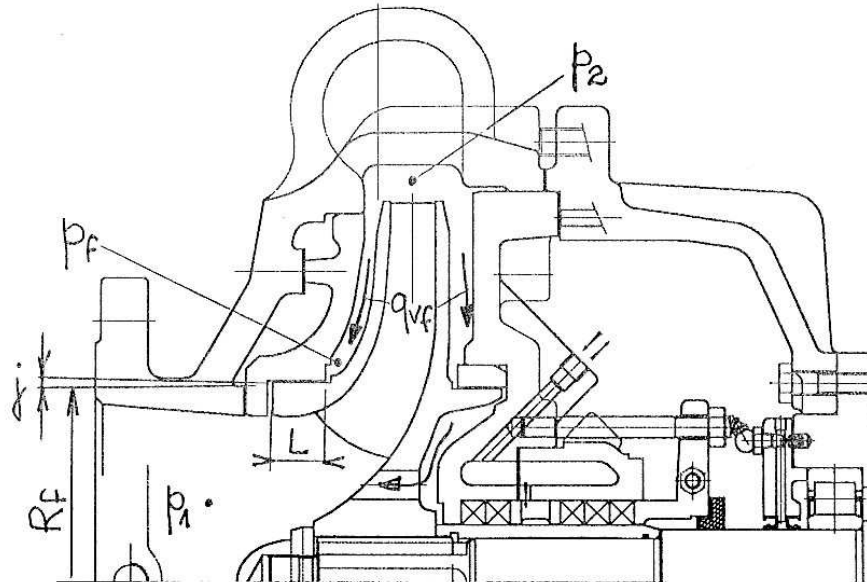


Figure 16 : Fuites de débit dans une roue centrifuge

Le débit de fuite q_{vf} est généré par la différence de pression $\Delta p_f = p_f - p_1$ régnant de part et d'autre de la bague d'étanchéité.

Pour des raisons de simplification, on calcule p_f par la relation suivante où l'on suppose que le fluide tourne à la moitié de la vitesse de la roue (moyenne entre flasques fixe et tournant) :

$$p_f = p_2 - \frac{\rho}{8} \omega^2 (R_2^2 - R_f^2) \quad (47)$$

où p_2 est la pression à la sortie de la roue.

La différence de pression Δp_f est la perte de charge générée par le débit de fuite au passage de la bague d'étanchéité, on l'exprime également par la somme suivante :

$$\frac{\Delta p_f}{\rho g} = 1,5 \frac{C_f^2}{2g} + \lambda \frac{L}{2j} \frac{C_f^2}{2g} \quad (48)$$

avec : C_f : vitesse moyenne du fluide dans le jeu

L : longueur de la bague

j : jeu radial

* Le premier terme correspond à la perte de charge due à la contraction et à l'élargissement au passage du jeu.

* Le second terme définit la perte par frottement sur la longueur de la bague où $2j$ est le diamètre hydraulique

Le coefficient λ est calculé par la relation de Blasius pour $Re \leq 10^5$:

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{1/4}} \quad (49)$$

avec Re le nombre de Reynolds dans le jeu :

$$Re = \frac{C_f \cdot 2j}{\nu} \quad (50)$$

ν étant la viscosité cinématique du fluide.

On calcule ainsi le débit de fuite :

$$qv_f = C_f S_j = C_f \cdot 2\pi R_f j \quad (51)$$

Le rayon R_f est approximativement le rayon R_0 de la bride d'aspiration. En présence d'un système d'équilibrage de la poussée axiale par bague arrière et trous d'équilibrage, il convient de multiplier le débit de fuite par 2.

Rendement global :

Compte tenu de toutes les pertes citées ci-dessus, la puissance absorbée sur l'arbre moteur s'écrit :

$$Pa = \rho g (H + \Delta h) (qv + qv_f) + Pm \quad (52)$$

La puissance hydraulique utile est donnée par la relation :

$$Pu = \rho g H qv \quad (53)$$

d'où l'expression du rendement global :

$$\eta_{gl} = \frac{\rho g H qv}{\rho g (H + \Delta h) (qv + qv_f) + pm} \quad (54)$$

On démontre que le rendement global est égal au produit des trois rendements partiels :

$$\eta_{gl} = \eta_H \cdot \eta_v \cdot \eta_m \quad (55)$$

III - METHODOLOGIE DE DIMENSIONNEMENT DE LA ROUE

Dans ce paragraphe, nous présentons le problème inverse, à savoir l'ensemble des relations ou des choix arbitraires permettant, à partir d'un cahier des charges donné (hauteur H_a , débit q_{va} , vitesse de rotation N), de définir les principaux paramètres géométriques de la roue, à savoir :

- entrée d'aubage : angle β_{10} , rayon à la ligne moyenne R_1 , largeur b_1 ,
- sortie d'aubage : angle $\beta_{2\infty}$, rayon de sortie R_2 , largeur b_2 ,
- bride d'aspiration : rayon R_o

3.1. Détermination de l'entrée d'aubage.

L'angle d'entrée d'aubage β_{10} est généralement choisi arbitrairement entre 60° et 75° , il représente l'angle formé entre le plan méridien et la tangente à la ligne moyenne de l'aube.

En se plaçant sur la ligne moyenne et en supposant que le fluide n'est soumis à aucune pré-rotation, la propriété du triangle des vitesses permet d'écrire:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{U_1}{C_1} \quad (56)$$

avec :

$$\left| \begin{array}{l} U_1 = \omega R_1 \\ C_1 \text{ vitesse absolue égale à la vitesse débitante } C_{r1} \end{array} \right.$$

L'équation de continuité permet d'écrire au régime d'adaptation :

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} \beta_{10} \\ C_1 = \frac{q_{va}}{S_1} \end{array} \right. \quad (57)$$

avec S_1 la section d'entrée d'aubage définie par : $S_1 = 2\pi R_1 b_1$ (58)

On démontre, sur la base de développements théoriques, que la section d'entrée des pompes de bonne capacité d'aspiration, bien dimensionnées vis-à-vis de la cavitation peut se déterminer à partir de la relation :

$$S_1 = S_{1opt} = \pi R_{opt}^2 \quad (59)$$

avec :

$$R_{opt} = 2,25 \sqrt[3]{\frac{qva}{N}} \quad (60)$$

on obtient d'après (56), (57) et (59) les autres paramètres géométriques de l'entrée d'aubage:

$$R_1 = \frac{qva \operatorname{tg} \beta_{10}}{\pi \omega R_{opt}^2} \quad (61)$$

et d'après (58)

$$b_1 = \frac{S_1}{2 \pi R_1}$$

3.2. Détermination de la sortie d'aubage

Calcul du rayon extérieur R_2

Le choix du rayon extérieur s'effectue à partir d'une valeur de référence communément utilisée pour la construction des machines de compression. Cette valeur standard qui dépend de la vitesse angulaire spécifique Ω a été introduite par Cordier.

Le diagramme de Cordier est un diagramme statistique issu de résultats expérimentaux sur lequel sont portées les vitesses angulaires spécifiques de diverses pompes en fonction de leur rayon spécifique (encombrement spécifique) :

$$\Lambda = \frac{R_2 (gH)^{1/4}}{\sqrt{qv}} \quad (63)$$

Pour chacun des points représentatifs, les courbes d'iso-rendement permettent de définir la zone de dimensionnement idéal concernant le rendement (**figure 17**).

Pour une vitesse spécifique donnée, on définit ainsi le rayon spécifique le mieux adapté puis l'encombrement « idéal » :

$$R_2 = \frac{\Lambda \sqrt{qv}}{(gH)^{1/4}} \quad (64)$$

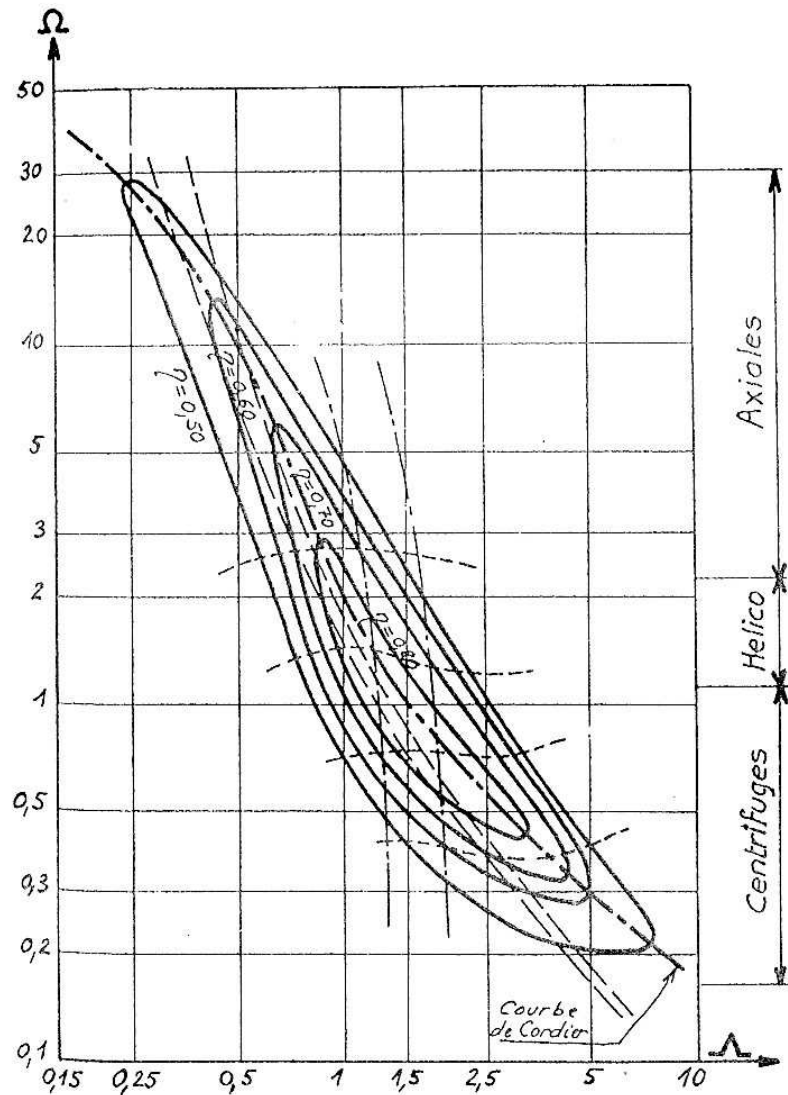


Figure 17 : Evolution standard selon CORDIER [réf. 102].

Choix de l'angle de sortie $\beta_{2\infty}$:

Lorsque le fluide pénètre dans la roue sans pré-rotation, la hauteur théorique est donnée par l'équation d'Euler :

$$H_{th} = \frac{U_2 C_{u2}}{g} \quad \text{et} \quad H_{th\infty} = \frac{U_2 C_{u2\infty}}{g}$$

On constate, d'après cette relation, que la hauteur d'élévation théorique d'une machine de compression (ventilateur, pompe, compresseur) ne dépend que de la vitesse périphérique U_2 et de la composante giratoire de la vitesse absolue C_{u2} . Le rapport entre U_2 et C_{u2} peut être choisi dans des limites assez larges, Il est intimement lié à l'angle de sortie d'aubage $\beta_{2\infty}$.

Les pompes à liquide sont construites exclusivement avec des aubes couchées vers l'arrière, et notamment des angles $\beta_{2\infty}$ compris entre 50° et 70° (valeur qui sera choisie arbitrairement).

Détermination de la largeur b_2

Le dernier paramètre géométrique définissant la roue, à savoir la largeur de sortie b_2 , s'effectue sur la base d'une méthodologie que nous pouvons résumer ainsi :

On estime d'abord le rendement hydraulique η_H de la roue à partir de la formule empirique de Lomakine au point de rendement maximal :

$$\eta_H = 1 - \frac{0,42}{\left[\log_{10} d_{red} - 0,172 \right]^2} \quad (65)$$

avec

$$d_{red} = 4250 \sqrt[3]{\frac{qv}{N}} \quad (66)$$

qv : débit en m^3/s

N : vitesse de rotation en tr/min

On en déduit la hauteur théorique et la hauteur théorique infinie (H est donnée par le cahier des charges) :

$$H_{th} = \frac{H}{\eta_H} \quad (67)$$

$$H_{th\infty} = \frac{H_{th}}{\mu} \quad (68)$$

μ est le facteur de glissement donné par la relation 46.

La composante giratoire est déduite de $H_{th\infty}$ par la relation d'Euler :

$$Cu_{2\infty} = \frac{g H_{th\infty}}{U_2} \quad (69)$$

Les triangles des vitesses en sortie de roue permettent de calculer la vitesse débitante Cr_2 puis la largeur b_2 :

$$Cr_2 = \frac{U_2 - Cu_{2\infty}}{\text{tg } \beta_{2\infty}} \quad (70)$$

$$b_2 = \frac{qva}{2 \pi R_2 Cr_2} \quad (71)$$

IV - TRACE DES AUBAGES

Nous proposons dans ce chapitre une méthode complète de tracé des aubages équipant les roues centrifuges et hélico-centrifuges. Elle est basée sur la définition des deux projections : la vue méridienne et la vue de face. Ce tracé important et délicat, la plupart du temps abordé de manière succincte dans les ouvrages, confère à la machine ses qualités d'aspiration, de rendement et de stabilité.

4.1. Détermination de la vue méridienne

Les étapes définissant la vue méridienne sont les suivantes :

- *définition de la ligne moyenne du canal méridien,**
- *discrétisation de cette ligne en un certain nombre de segments,**
- *adoption d'une loi d'évolution de la surface méridienne,**
- *définition des enveloppes (flasques avant et arrière).**

Définition de la ligne moyenne :

La ligne moyenne de la roue est définie par l'association d'une courbe de Bézier à trois pôles et d'une portion droite en sortie (**figure 18**). Les 3 pôles sont définis de la manière suivante :

- Le premier pôle a comme coordonnées $(0, R_{O_x})$ avec $R_{O_x} = \frac{R_o}{2}$ pour une roue en porte-à-

faux et $R_{O_x} = \frac{R_o + R_a}{2}$ pour une roue entre paliers (arbre traversant de rayon R_a).

- Le deuxième pôle est défini par l'intersection des deux droites Δ_1 et Δ_2 :

Δ_1 est la droite parallèle à l'axe de rotation passant par le pôle $(0, R_{O_x})$.

Δ_2 est la droite passant par le point de coordonnées (z_2, R_2) et formant un angle φ avec la droite Δ_3 .

Δ_3 est la perpendiculaire à l'arête de sortie b_2 au point de coordonnées (z_2, R_2) .

- Le troisième pôle (z_2, R_2) .se trouve sur la droite Δ_2 à une distance m_R du point de coordonnées (z_2, R_2) .

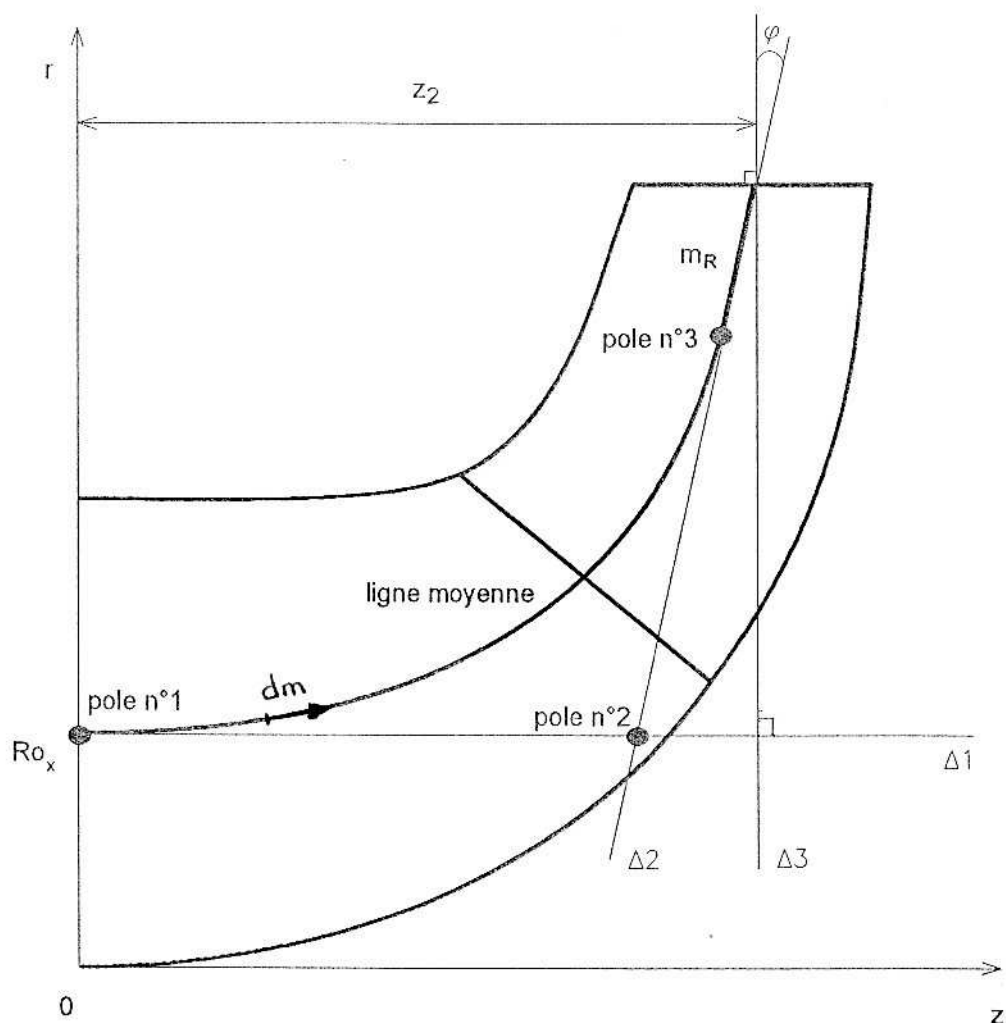


Figure 18 : Définition de la ligne moyenne

Remarques :

- La valeur de m_R dépend de la vitesse spécifique de la machine et diminue avec celle-ci.
- L'angle φ est un paramètre libre qualifié d'angle de cabrage. Le choix adéquat de ce paramètre permet de régler la concavité des deux flasques avant et arrière.
- La distance z_2 est aussi un paramètre libre caractérisant l'encombrement axial. La valeur retenue correspond dans la plupart des cas à un compromis entre les pertes et la taille de la machine. Dans le cas des pompes normalisées cette longueur est imposée.

Définition de la loi de surface :

L'évolution de la surface méridienne est explicitée en fonction de l'abscisse curviligne mesurée sur la ligne moyenne : $S = S(m)$ cette abscisse curviligne est calculée à partir de la relation suivante :

$$m(z) = \int_0^z \sqrt{1 + \left[\frac{dr}{dz} \right]^2} dz \quad (72)$$

La détermination analytique de cette intégrale est généralement impossible pour les fonctions $r(z)$ de degré supérieur à un. De ce fait, on utilise une méthode d'intégration numérique (méthode de Gauss par exemple).

Une série d'équations simples peut être retenue pour décrire et maîtriser l'évolution de la surface débitante.

Nous considérons sur la vue méridienne deux parties distinctes :

- la partie en amont de l'aubage : entre la bride d'aspiration et l'entrée d'aubage :
- la partie aubée : entre l'entrée et la sortie d'aubage.

On définit ensuite une loi de surface arbitraire dont les conditions aux limites les plus courantes sont données par les diverses équations :

$$S(m_e) = S_1 \quad S(m_s) = S_2$$

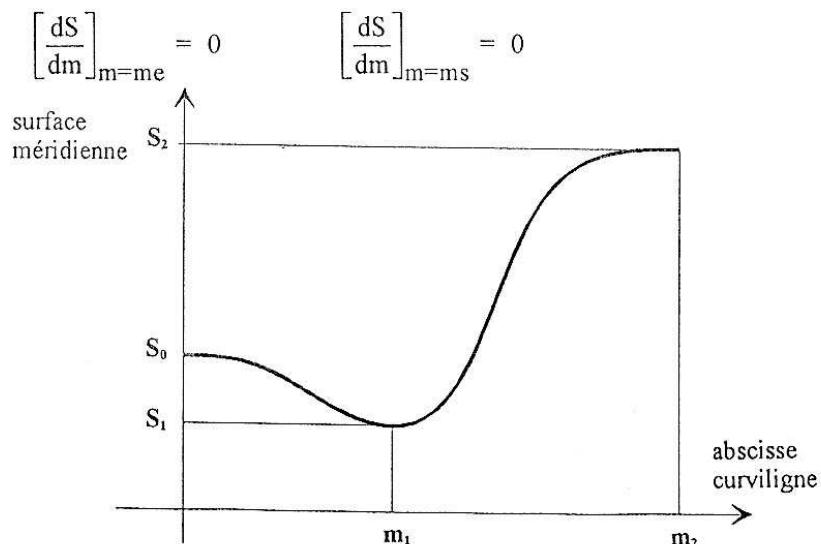


Figure 19 : Exemple de loi de surface

Détermination des deux lignes ψ_e et ψ_i (flasques avant et arrière)

La ligne moyenne étant discrétisée en un certain nombre de segments d'égale longueur curviligne, nous déterminons les coordonnées $[r, z]$ de chaque point de discrétisation (la méthode de Newton est conseillée).

A partir de la loi de surface imposée, on calcule aisément les diamètres des cercles osculateurs par :

$$b = \frac{S(m)}{2 \pi r} \quad (73)$$

La détermination des triplets $\{z, r, b\}$ permet de déterminer (**figure 20**) :

ψ_e : enveloppe extérieure des cercles (la ceinture)

ψ_i : enveloppe intérieure des cercles (le plafond)

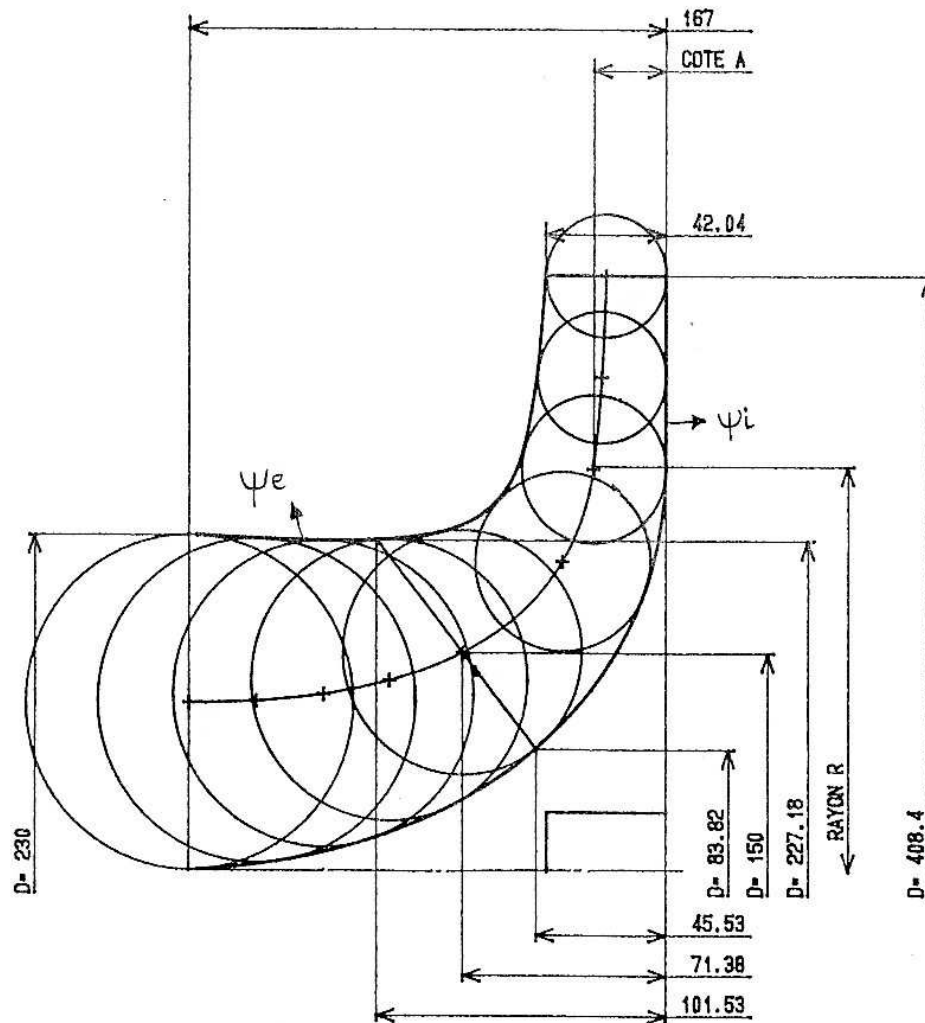


Figure 20 : Tracé des enveloppes des cercles

Inclinaison de l'arête d'entrée d'aube θ_1 et des angles β_{1e0} , β_{1i0}

Pour les machines de faible vitesse spécifique, l'arête d'entrée en vue méridienne est généralement horizontale ($\theta_1 = 90^\circ$).

Lorsque le dimensionnement de la roue correspond à un débit important (augmentation de nsq), le tracé de l'aubage devient tridimensionnel (figure 21) et il n'est plus possible de limiter les aubes à une partie purement radiale.

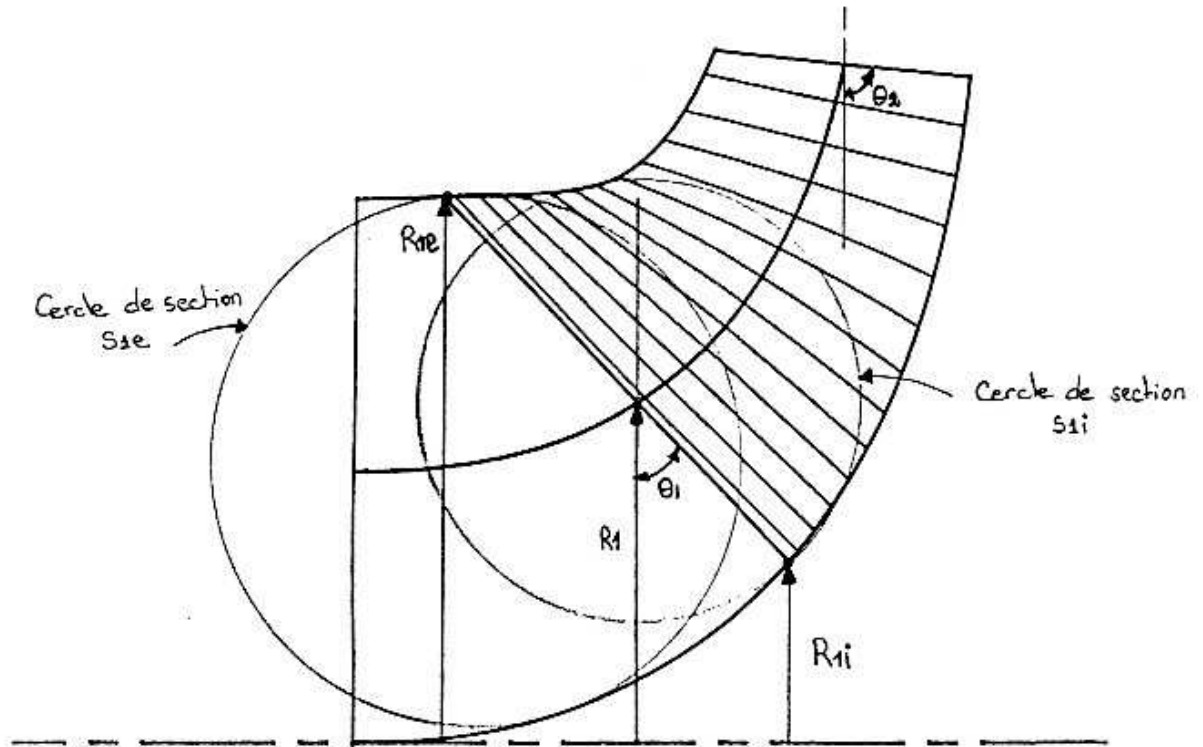


Figure 21 : Définition de l'inclinaison des arêtes d'entrée et de sortie θ_1 et θ_2 .

L'entrée de telles roues est en fait hélico-centrifuge et il est logique que le bord d'attaque des aubes soit sensiblement confondu avec une équipotentielle de l'écoulement méridien. Ceci demande donc un tracé préalable des différentes lignes de courant et équipotentielles.

Dans la pratique, lorsque ce calcul n'est pas accessible, on fixe l'inclinaison θ_1 de manière arbitraire, souvent proche de 45° . On fait ensuite correspondre les vitesses débitantes avec celles associées aux cercles oscillateurs correspondants.

$$Cr_{1i} = \frac{qva}{S_{1i}} \text{ et } Cr_{1e} = \frac{qva}{S_{1e}}$$

Cette démarche n'est évidemment pas rigoureuse mais elle permet une approche satisfaisante dans la majorité des cas.

Les vitesses débitantes ainsi calculées donnent accès aux valeurs des angles d'aubages β_{1i0} , et β_{1e0} en partant des triangles de vitesses respectifs :

$$\operatorname{tg} \beta_{1i0} = \frac{U_{1i}}{C_{r_{1i}}} = \frac{\omega R_{1i}}{C_{r_{1i}}} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \beta_{1e0} = \frac{U_{1e}}{C_{r_{1e}}} = \frac{\omega R_{1e}}{C_{r_{1e}}}$$

* Inclinaison de l'arête de sortie θ_2 et des angles $\beta_{2e\infty}$, $\beta_{2i\infty}$

Pour les machines centrifuges, l'arête de sortie est parallèle à l'axe de rotation ($\theta_2 = 90^\circ$). Lorsque la vitesse spécifique augmente (machines hélico-centrifuges), l'arête de sortie s'incline progressivement. Cette inclinaison est fixée suivant des considérations de régularité d'écoulement et de faisabilité. Le choix est aussi intimement lié à la répartition radiale de la composante Cu_2 , distribution qui est à l'initiative du concepteur. Comme pour le tracé des machines axiales, on peut proposer trois types de loi génératrice :

Le vortex libre :

$$Cu_{2\infty} = K3/r$$

Le vortex constant :

$$Cu_{2\infty} = K2$$

Le vortex forcé :

$$Cu_{2\infty} = K1 r$$

où les constantes $K1$, $K2$, $K3$ seront calculées sur la ligne moyenne.

Le vortex étant fixé, les triangles des vitesses permettent de calculer sur les lignes ψ_e et ψ_i les angles d'aubages $\beta_{2e\infty}$ et $\beta_{2i\infty}$.

$$\operatorname{tg} \beta_{2e\infty} = \frac{U_{2e} - Cu_{2e\infty}}{C_{r_{2e}}} \quad \operatorname{tg} \beta_{2i\infty} = \frac{U_{2i} - Cu_{2i\infty}}{C_{r_{2i}}} \quad (75)$$

Avec

$$U_{2e} = \omega R_{2e} \quad ; \quad U_{2i} = \omega R_{2i} \quad (76)$$

$$Cu_{2e\infty} = f(K_i, R_{2e}) \quad ; \quad Cu_{2i\infty} = f(K_i, R_{2i}) \quad (77)$$

Les valeurs de $C_{r_{2i}}$ et $C_{r_{2e}}$ sont déterminées de la même manière que pour l'entrée d'aubage.

Tracé de l'aubage en deux vues

On considère l'empreinte d'une aube vue en perspective sur une surface de révolution dont la génératrice est la ligne moyenne du canal méridien (**figure 22b**).

On découpe un élément de la pale dl à l'aide de deux plans perpendiculaires à l'axe de rotation passant par les points 1 et 2.

Sur l'élément ainsi constitué on intercepte :

* en projection méridienne (**figure 22a**) : les longueurs dm , dr et dz

* en vue de face (**figure 22c**) : les valeurs $rd\theta$ et dr .

Dans un repère cartésien plan, on porte les dm sur l'axe des abscisses et les $rd\theta$ sur l'axe des ordonnées. Lorsque la quantité d'éléments est en nombre suffisant, cette représentation reproduit la vraie grandeur et les angles de l'aube en tout point. Dans ce cas précis, ce tracé est qualifié de **développée de la pale** (**figure 22d**).

Dans le cas du dimensionnement, connaissant les angles d'entrée β_{10} et de sortie β_{20} nous pouvons, à l'inverse, pour tracer l'aube, commencer par se donner une développée, par exemple en arc de cercle, et en déduire ses projections en vue de face et en vue méridienne, la démarche est alors la suivante :

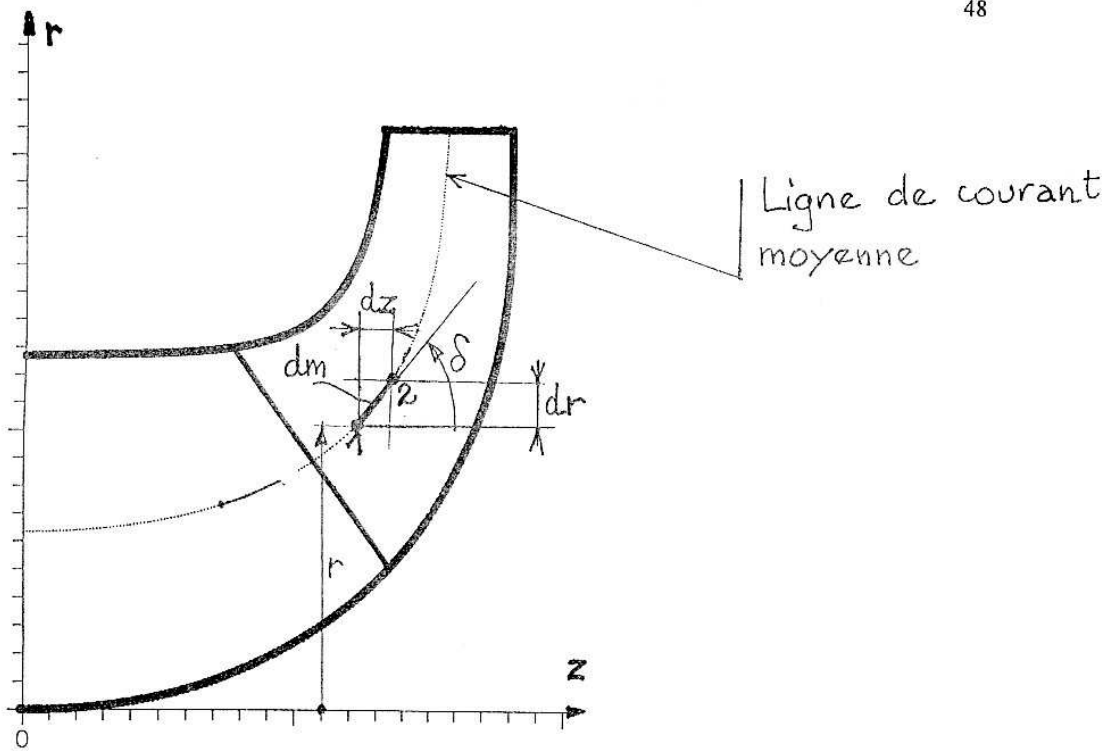
On dispose de deux dessins, la vue méridienne et la développée.

En vue méridienne, parlant du rayon d'entrée R_1 jusqu'au rayon de sortie R_2 , on s'impose un pas dm arbitrairement petit par rapport à la longueur totale. On obtient ainsi:

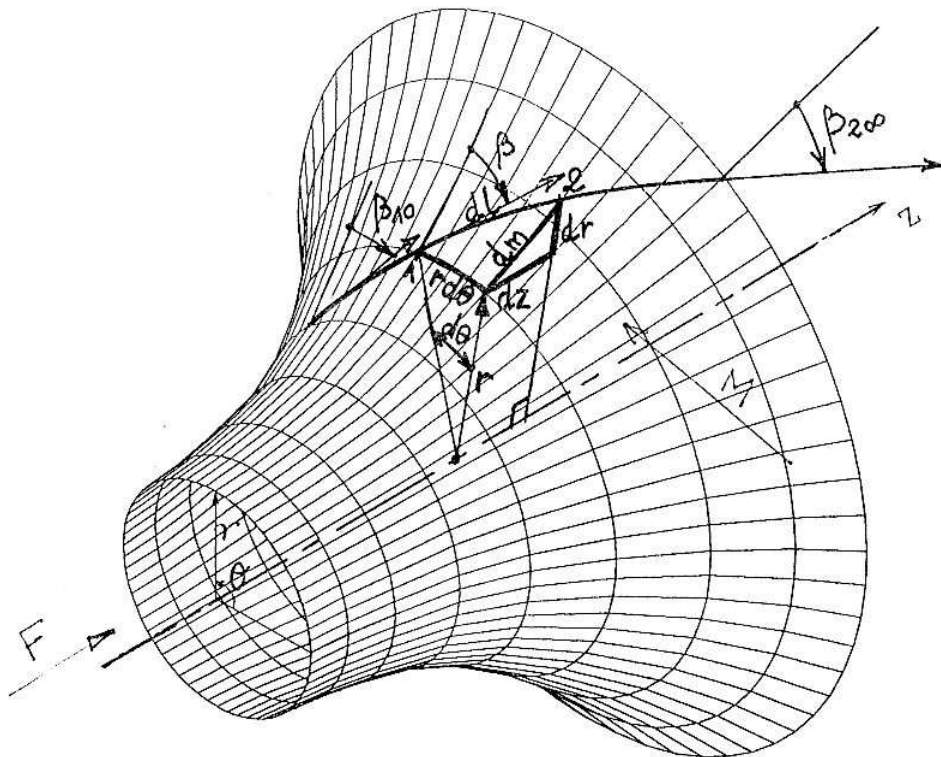
* en vue méridienne : les rayons dr ,

* sur la développée : les valeurs $rd\theta$.

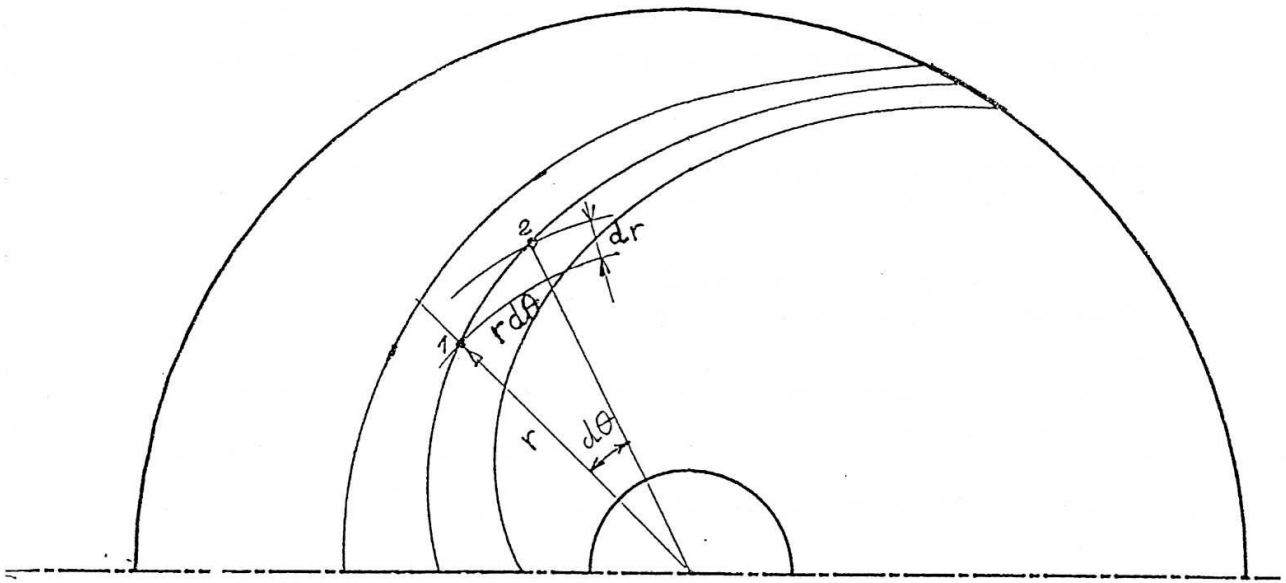
On en déduit ainsi la vue de face à l'aide des couples $[rd\theta, dr]$. Et ainsi de suite de rentrée vers la sortie ou de la sortie vers rentrée.



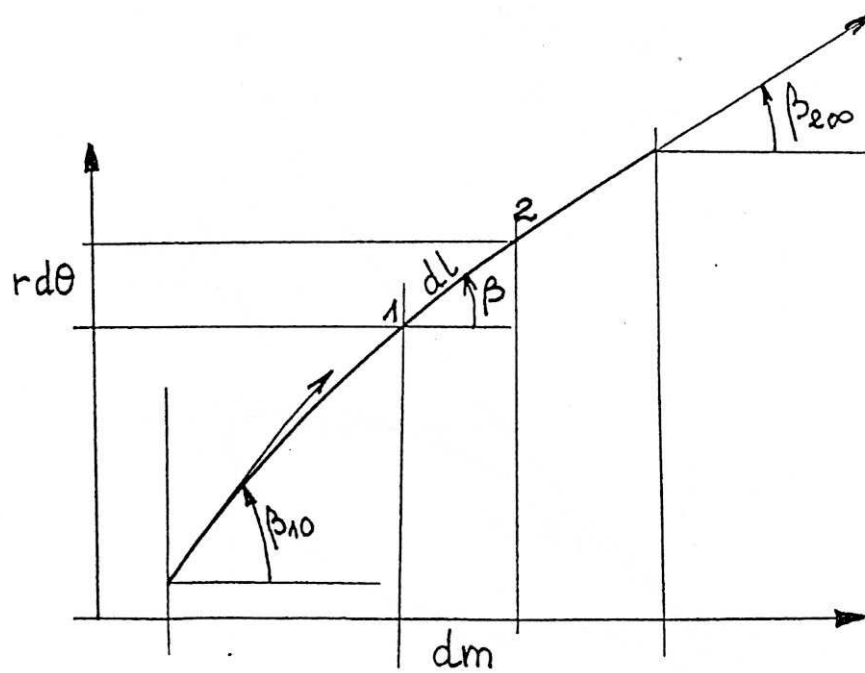
Vue méridienne (suivant M)



Surface de courant moyenne



Vue de face (suivant F)



Développée de l'aube (vraie grandeur)

Figure 22 : Tracé de l'aube en deux vues

4.2. Définition de la développée de la pale

Pour des raisons d'uniformisation avec les lois de cambrure de la majorité des profils aérodynamiques, la développée est définie par une ligne en double arc de cercle (**figure 23**).

La longueur de la pale a une influence certaine sur les performances de la machine. Il est donc intéressant, dans un souci d'optimisation, de pouvoir la modifier.

La développée de la pale, telle que définie ci-dessous, possède ce degré de liberté. Elle introduit même deux paramètres de réglage :

* **l'angle β_3** : défini dans le cas d'un arc de cercle unique par : $\sin \beta_3 = \frac{\sin \beta_{10} + \sin \beta_{2\infty}}{2}$.

L'augmenter ou le réduire permet respectivement d'augmenter ou de réduire la longueur de la pale.

* **Le facteur de forme FF** : c'est un rapport qui définit la position de β_3 sur l'axe des abscisses, on peut le confondre aussi avec la position de flèche maximale. Il permet le réglage fin de la longueur de la pale. Nous le limitons à l'intervalle [0,25 ; 0,75] pour permettre une évolution convenable entre les angles β_{10} et β_3 d'une part et entre β_3 et $\beta_{2\infty}$ d'autre part.

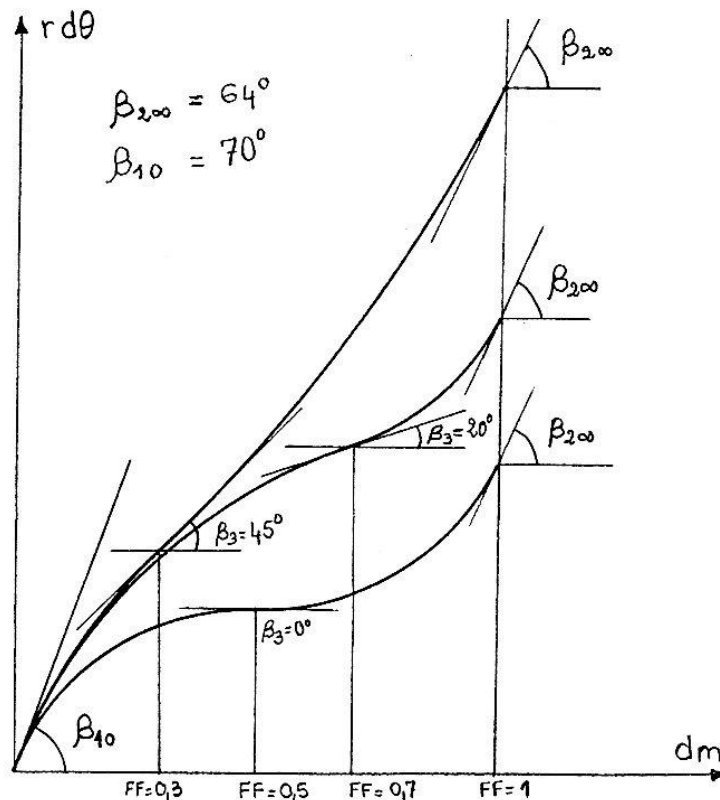


Figure 23 : Définition de la développée en double arc de cercle

4.3. Calage angulaire des lignes en vue de face

Les différentes projections de l'aube en vue de face étant déterminées, il faut se fixer un dernier réglage pour les caler angulairement les unes par rapport aux autres en réalisant une arête d'entrée dirigée vers l'arrière, radiale ou dirigée vers l'avant.

Considérons la roue centrifuge dont on a déterminé les deux lignes AB et CD de l'aube respectivement sur le flasque arrière et le flasque avant (**figure 24**). Si l'on se fixe comme condition à la sortie de la roue une aube parallèle à l'axe, on amènera par rotation le point D à coïncider avec B, ce qui conduira le point C en C_1 . L'arête d'entrée se projettera alors en AC_1 . Si l'on souhaite disposer l'arête d'entrée en AC, proche d'une radiale on devra tolérer à la sortie une inclinaison de la pale. On observe généralement cette disposition sur les roues centrifuges à vitesse spécifique élevée.

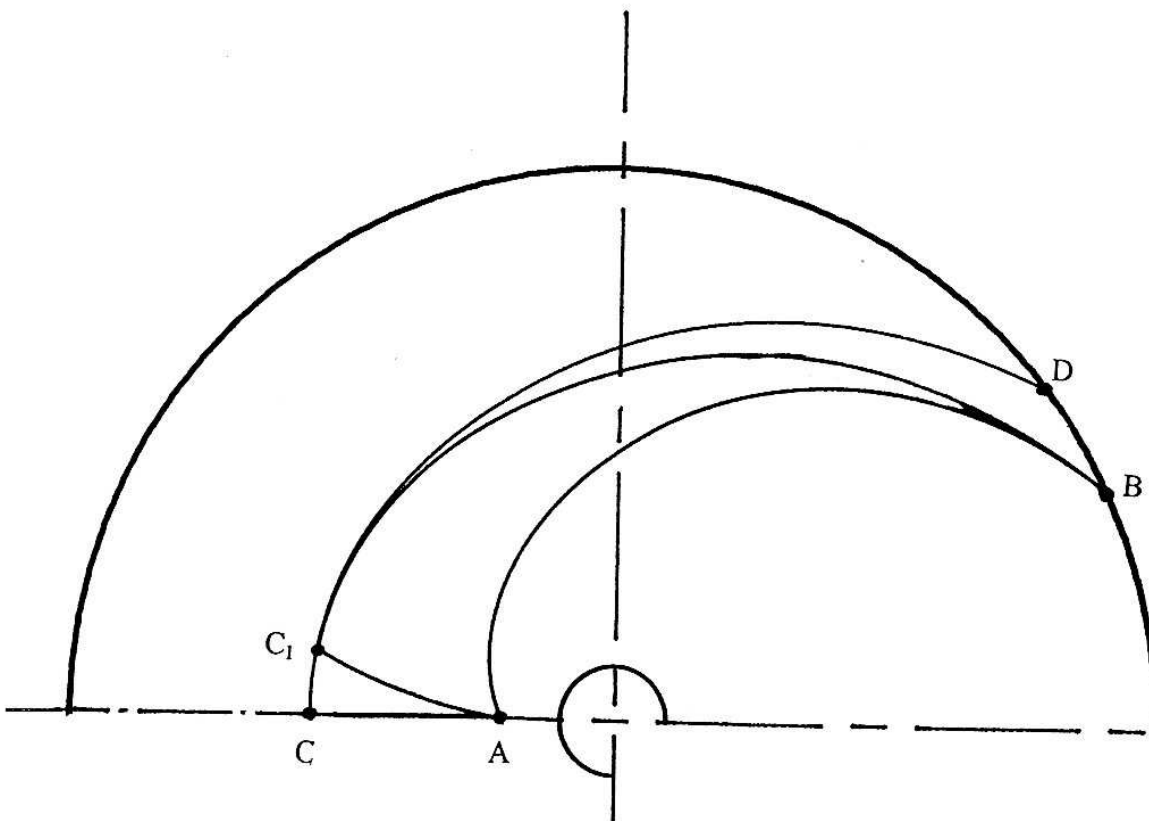


Figure 24 : Calage angulaire des projections de l'aube

4.4. Contrôle du galbe de la pale

Le meilleur outil de visualisation permettant d'apprécier la qualité du dessin de la pale est évidemment le tracé tridimensionnel (en perspective). Mais on peut également exercer une critique objective sur ce tracé en réalisant la liaison entre la vue méridienne et la vue de face. On procède de la manière suivante :

Sur la vue de face, on fixe l'origine des angles et un pas angulaire $\Delta\theta$. On découpe la vue de face par des plans méridiens espacés de $\Delta\theta$. Ces plans interceptent les projections de la pale sur des rayons que nous reportons sur la vue méridienne. En joignant ensuite les points ainsi obtenus, on définit les iso-angulaires de la vue méridienne donnant le galbe de la pale (**figure 25**).

Trois cas de figure peuvent se présenter :

- pale à surface réglée (**figure 26a**) : les iso angulaires sont des droites de l'entrée à la sortie d'aubage. La réalisation de telles pales est évidemment facilitée.
- pale concave (**figure 26b**) : utilisée pour éviter la cavitation dans le cas des pompes par augmentation de la section du col formé entre deux aubages.
- pale convexe (**figure 26c**) ; configuration ne présentant pas d'intérêt particulier, elle est donc à éviter.

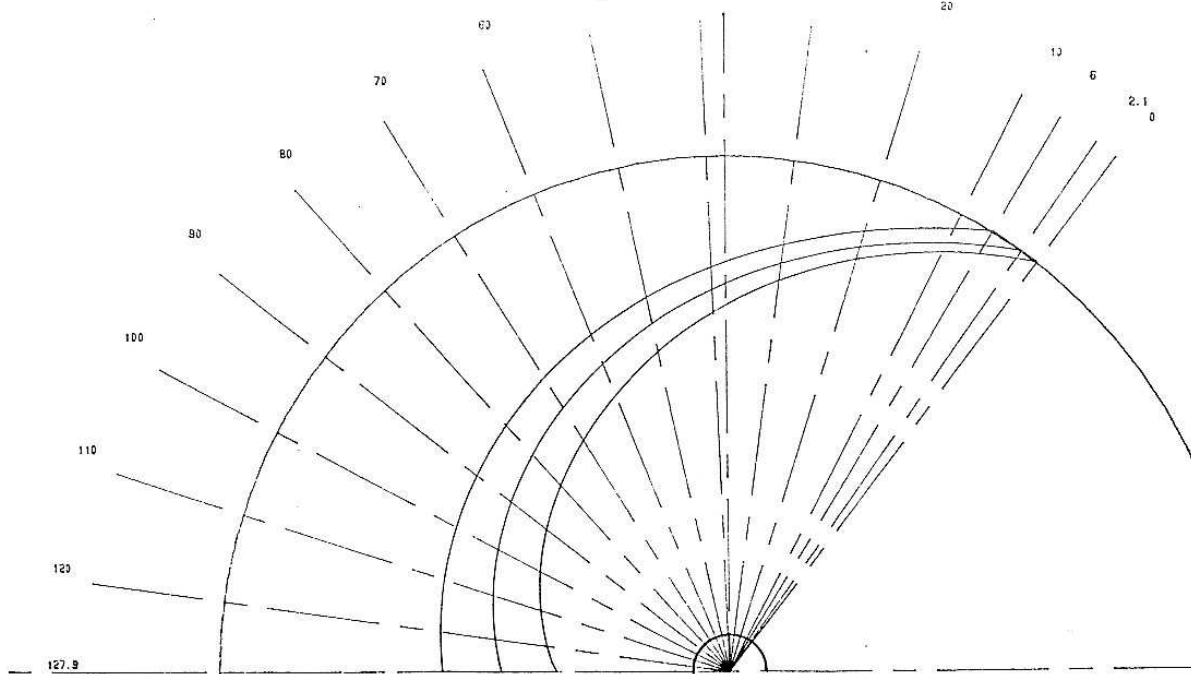
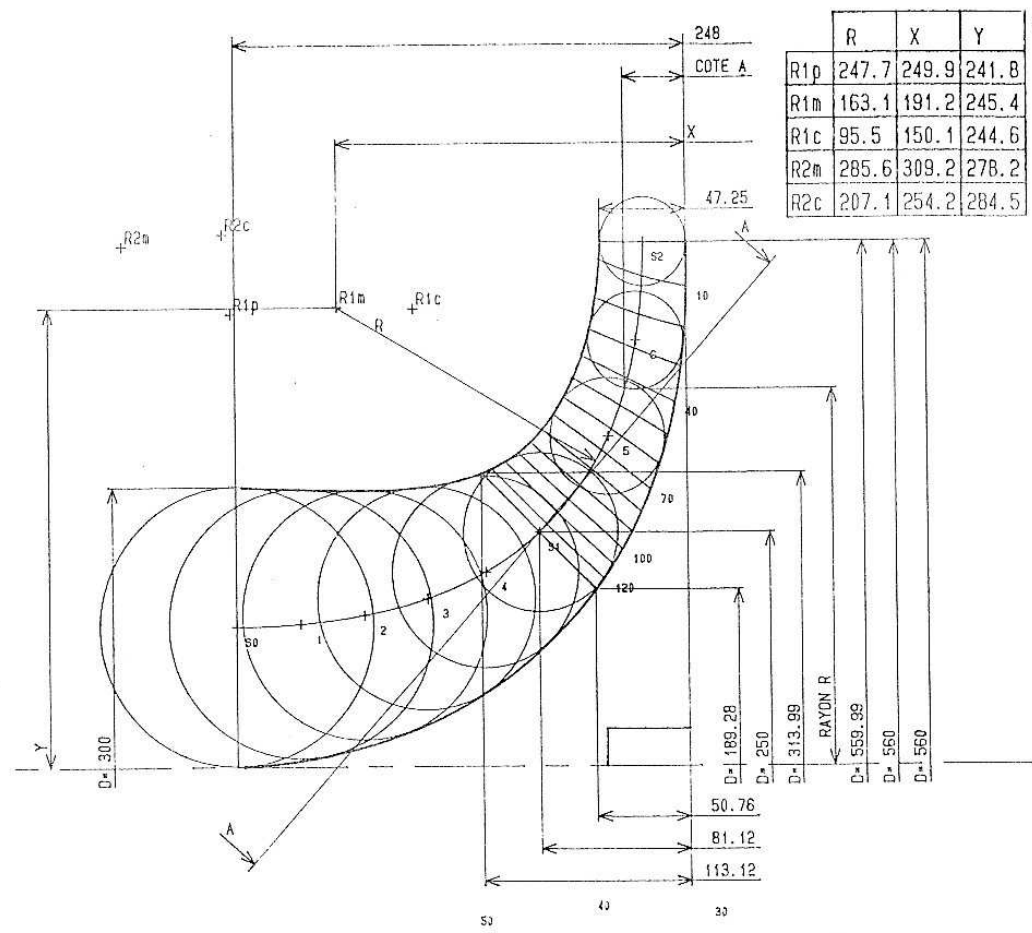


Figure 25 : Définition des iso-angulaires

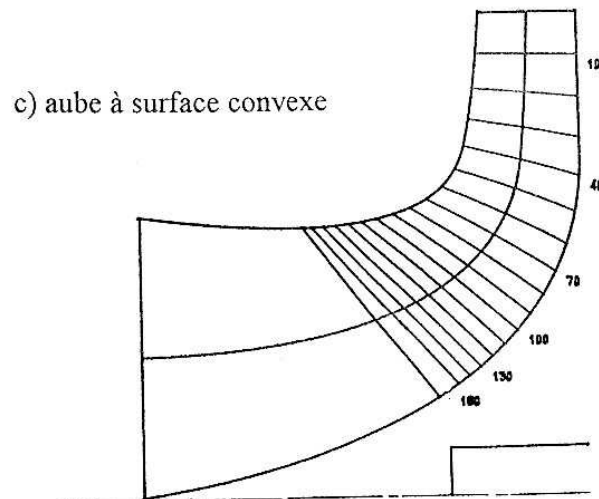
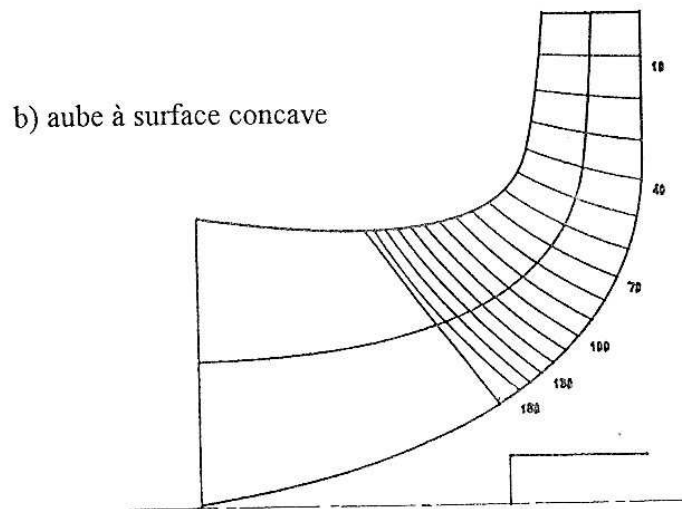
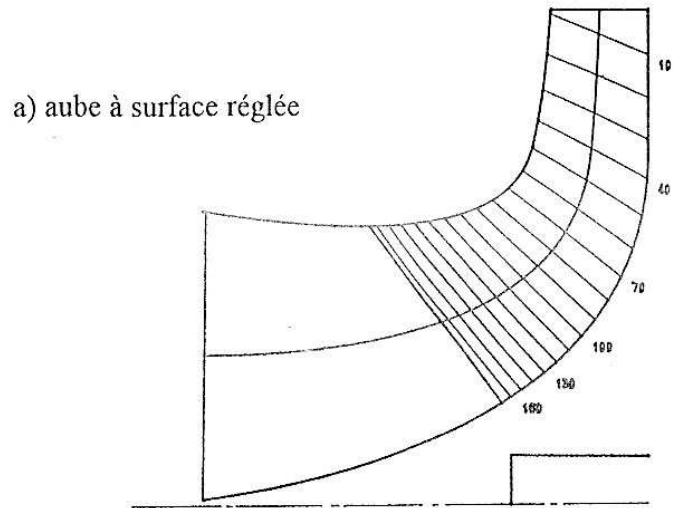


Figure 26 : Trois configurations des iso-angulaires

V - CALCUL ET TRACE DE LA VOLUTE

La volute dont le rôle est de canaliser le fluide sortant de la roue, est utilisée également pour transformer partiellement son énergie cinétique en énergie de pression. Les volutes de section transversale circulaire sont le plus souvent utilisées compte tenu de leur qualité et de leur simplicité de réalisation. Cependant, pour des raisons d'encombrement radial, on est parfois amené à définir d'autres formes (**figure 27**). Dans tous les cas, le principe de calcul est le même : il s'agit de définir l'évolution de section permettant, pour une vitesse moyenne fixée, d'assurer le débit attendu.

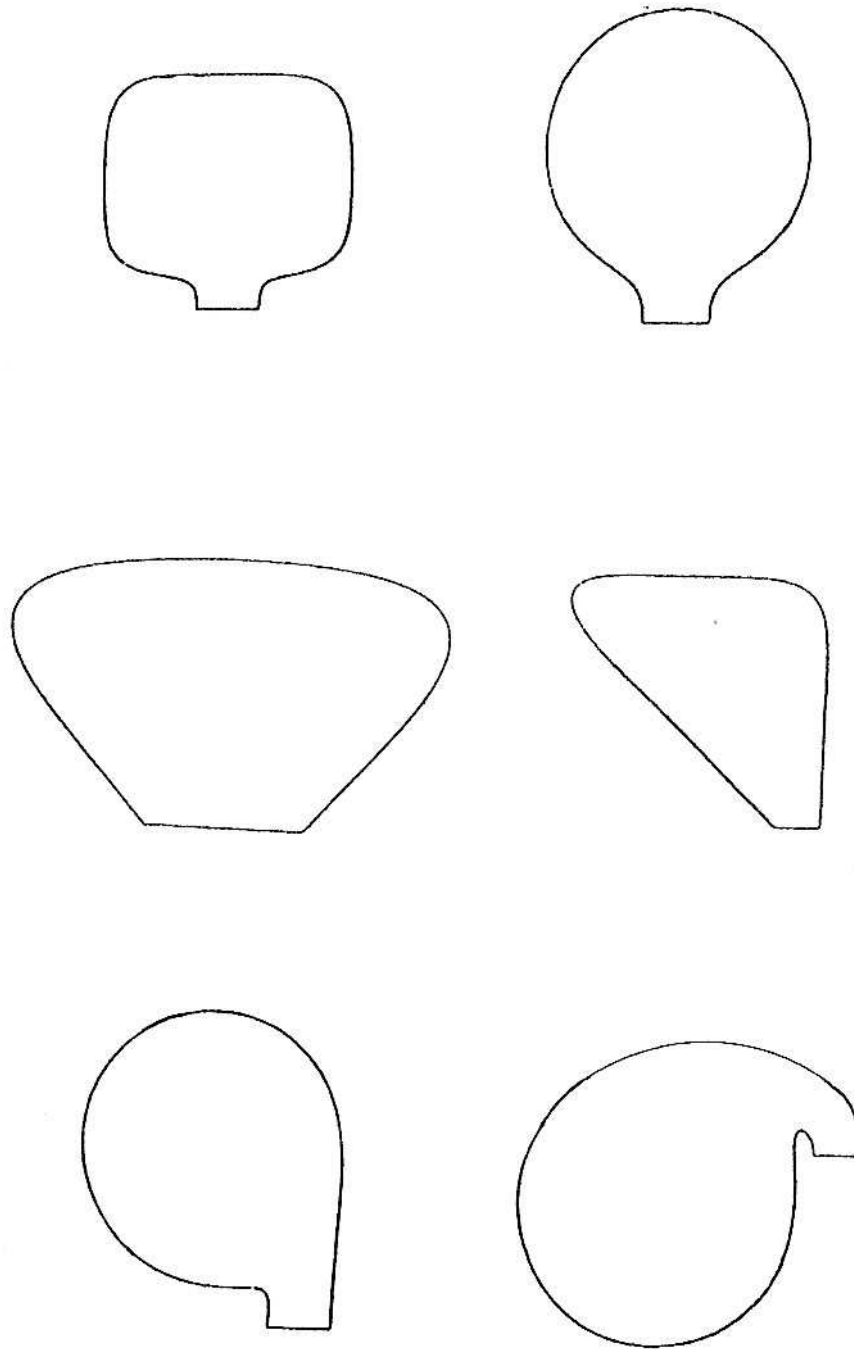


Figure 27 : Section transversales de volute.

5.1. Définition des paramètres géométriques de la volute

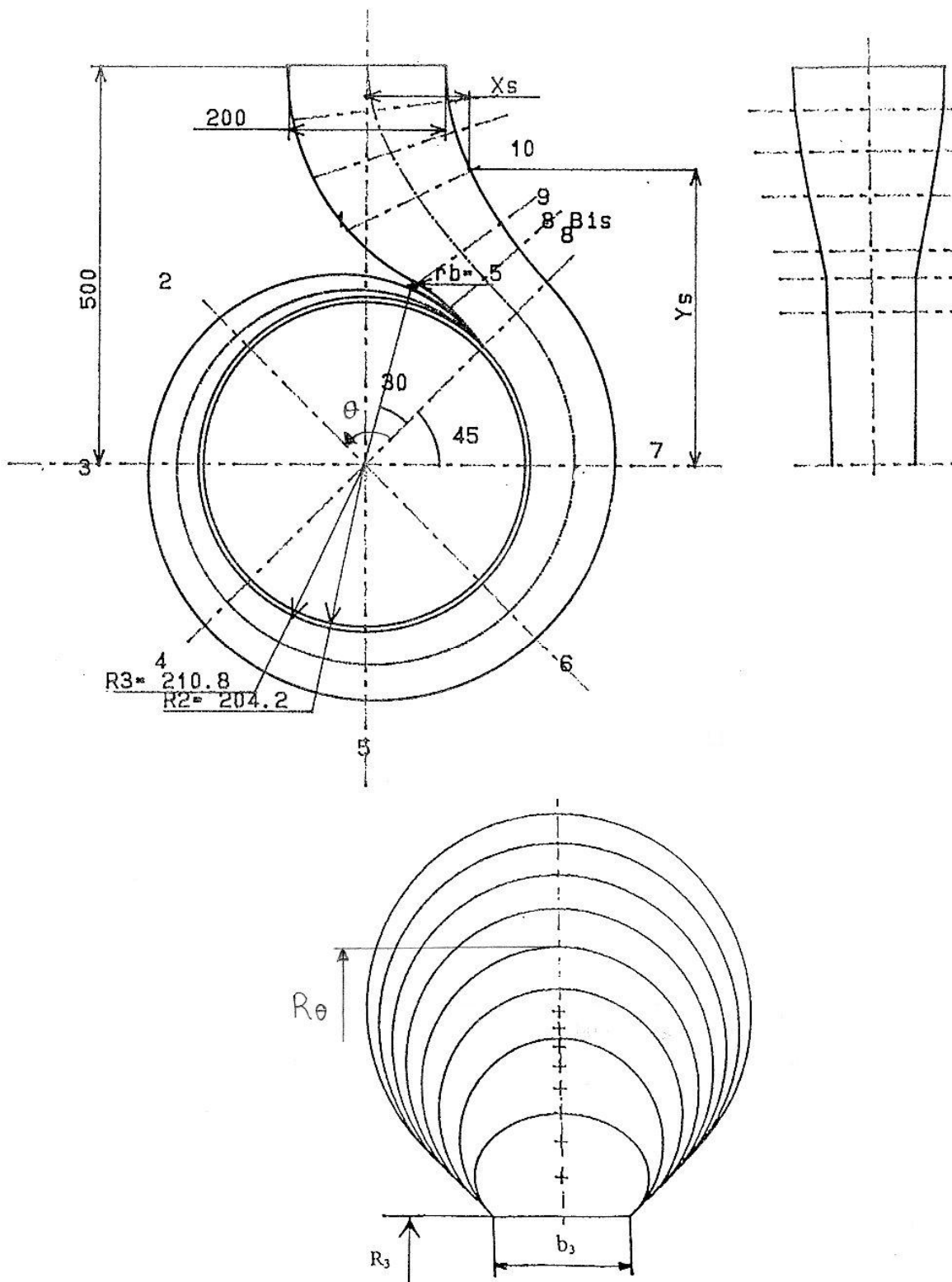


Figure 28 : Dessin de définition d'une volute.

Rayon de base R_3

Une distance minimale doit être maintenue entre la roue et le bec de volute pour limiter l'interaction du sillage des aubages avec celui-ci (**figure 28**). Cette distance est fonction du diamètre de la roue et de la vitesse spécifique de la machine. Elle constitue un compromis entre les fluctuations de pression et le rendement. Dans la pratique, on peut retenir le rapport approximatif $R_3/R_2 = 1,05$ à $1,10$.

Largeur b_3 au rayon de base

La largeur de la volute b_3 doit être supérieure à la largeur en sortie de roue (**figure 28**), le rapport entre les deux s'établissant dans les limites $b_3/b_2 = 1,05$ à $1,3$. Les valeurs inférieures de b_3/b_2 se rapportent aux machines de vitesse spécifique élevée.

Définition du divergent

La section terminale de la volute est généralement inférieure à la section de la tubulure de refoulement. Le passage de l'une à l'autre est assuré par un divergent constituant le prolongement de la volute spirale (**figure 28**). C'est une pièce importante puisque c'est dans le divergent qu'intervient la transformation finale de l'énergie cinétique du fluide en énergie de pression.

La **figure 29** représente la liaison entre l'angle δ' et la vitesse moyenne d'écoulement du fluide Cu_3 en sortie de volute. Le divergent terminal doit présenter un angle d'élargissement δ' susceptible d'éviter le décollement du fluide (de l'ordre de 15°).

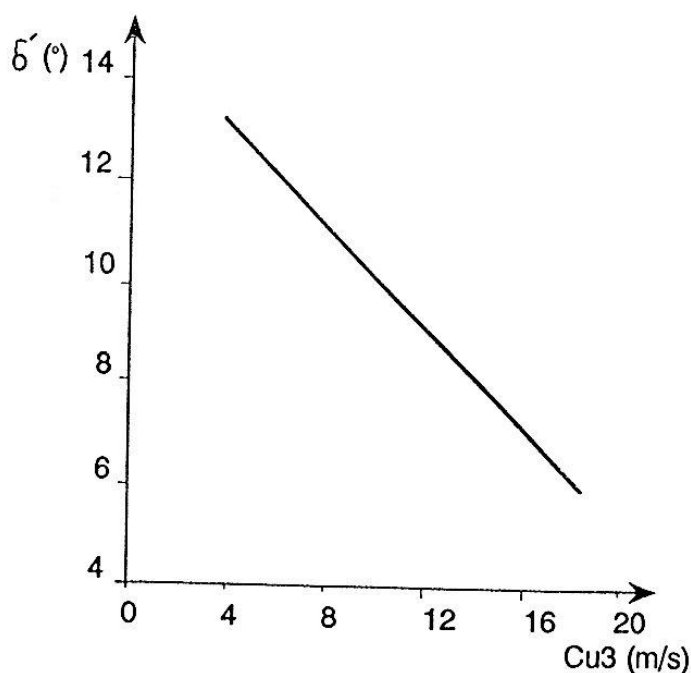


Figure 29 : Relation entre l'angle δ' et la vitesse d'écoulement Cu_3 en sortie de volute.

5.2 Calcul et tracé de la volute

Il existe plusieurs méthodes de calcul et de tracé de la volute. On présente ici deux modèles :

A) Tracé suivant le principe de la conservation du moment cinétique

Cette méthode de calcul est fondée sur l'hypothèse d'un écoulement irrotationnel dans la volute spirale, conforme au principe de la conservation du moment cinétique (vortex libre) :

$$\chi = Cu r = Cu_2 R_2 = \text{Constante} \quad (78)$$

Le débit assuré dans la section élémentaire $dA = b(r).dr$ (**figure 28**) est donné par :

$$dq_v = Cu.dA = b(r).dr \quad (79)$$

Soit, en intégrant sur toute la section débitante allant de R_3 à R_θ :

$$qv_\theta = \chi \int_{R_3}^{R_\theta} b(r) \frac{dr}{r} \quad (80)$$

Ce débit doit être égal à celui sortant de la roue depuis le bec de volute jusqu'à la section considérée (fraction du débit total de la pompe), soit :

$$qv_\theta = \frac{\theta}{360} qv \quad (81)$$

En égalant ces deux dernières relations et en réalisant l'intégration, on détermine les rayons R_θ de la spirale.

Dans certains cas (largeur constante, évolution circulaire,...) la forme de la fonction $b(r)$ permet d'intégrer l'équation (80).

B) Tracé suivant l'hypothèse d'une vitesse moyenne d'écoulement constante

L'hypothèse d'une vitesse moyenne d'écoulement constante est appliquée au calcul des volutes spirales de section transversale quelconque.

La vitesse d'écoulement dans la volute est calculée au moyen de la formule :

$$Cu_3 = Ks \sqrt{2 gH} \quad (82)$$

Ks étant un coefficient expérimental tenant compte de la répartition non uniforme des vitesses et des pertes de frottement. La liaison entre le coefficient Ks et la vitesse spécifique nsq de la machine est représentée sur la **figure 30**.

Après avoir calculé la valeur de Cu_3 , on calcule la section de la volute pour un angle au centre θ quelconque, au moyen de la relation :

$$S_\theta = \frac{\theta}{360} \frac{qv}{Cu_3} \quad (83)$$

qv est le débit de la roue que l'on peut minorer d'une certaine fraction pour tenir compte des fuites internes. En majorant Ks , on réduit l'encombrement de la volute mais évidemment au détriment des pertes.

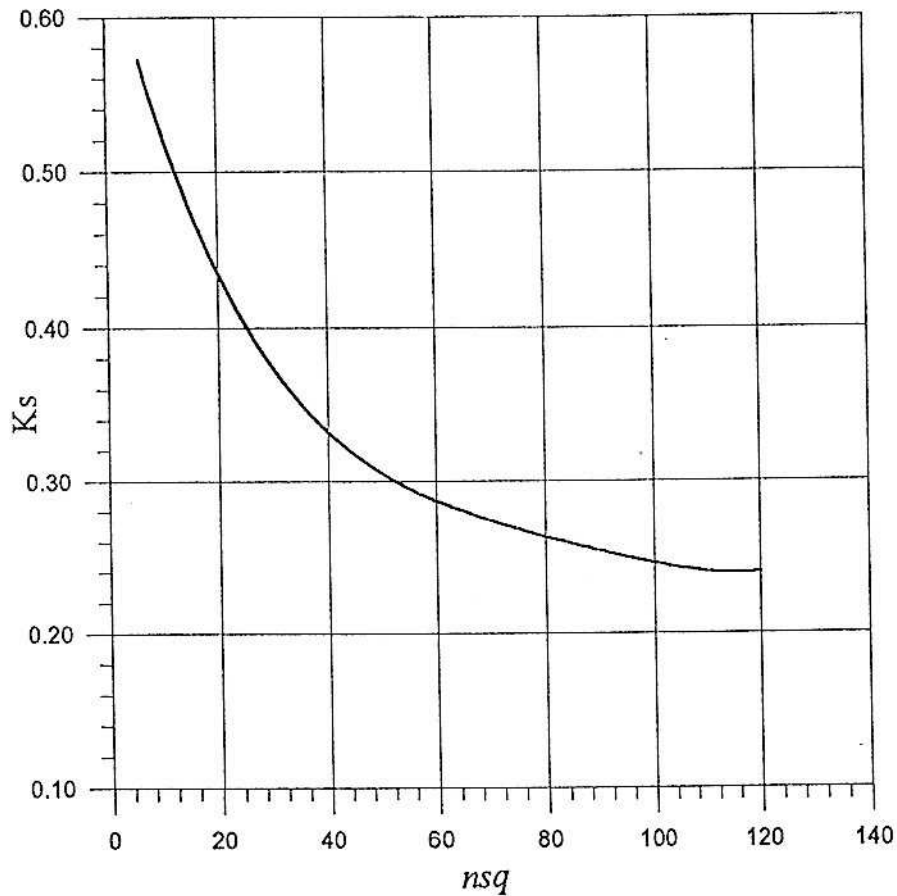


Figure 30 : Liaison entre le coefficient Ks et la vitesse spécifique nsq .

- C -

**EXERCICES D'APPLICATION
ET
PROBLEMES**

Exercice 1 :

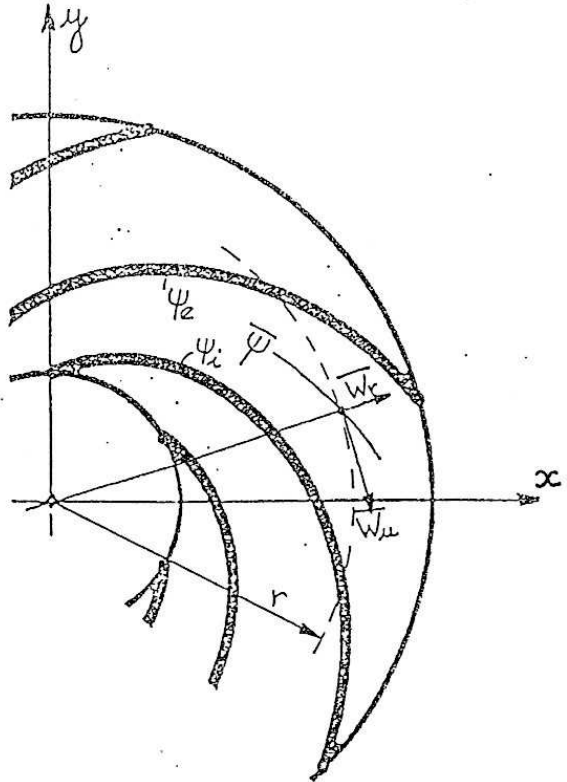
L'étude proposée concerne l'écoulement interaubages généré par une roue centrifuge bidimensionnelle en rotation ($\omega = 150 \text{ rd/s}$). Sur la ligne de courant moyennée les deux composantes de la vitesse relative \vec{W} sont calculables à partir de la géométrie de la machine.

$$\vec{W} \begin{cases} \overline{W_r} = \frac{qv}{2\pi r b} \\ \overline{W_u} = \overline{W_r} \operatorname{tg} \beta \end{cases}$$

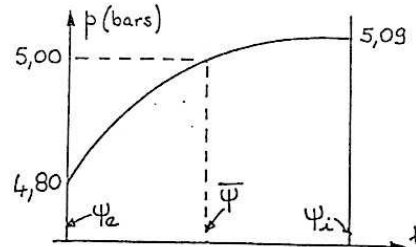
1 - Calculer $\overline{W_r}$, $\overline{W_u}$ et \overline{W} pour les conditions suivantes :

- Angle d'aubage $\beta = -60^\circ$
- Rayon $r = 200 \text{ mm}$
- Epaisseur de la roue $b = 20 \text{ mm}$
- Débit volumique $qv = 200 \text{ m}^3/\text{h}$

$$\begin{aligned} \overline{W_r} &= \\ \overline{W_u} &= \\ \overline{W} &= \end{aligned}$$



2 - En cours de rotation, on mesure l'évolution de la pression statique grâce à un capteur de pression fixe disposé au rayon r . Entre deux aubages, le signal est le suivant (signal observé dans le cadre d'un fluide parfait incompressible).



• Calculer la rothalpie I_0 sur la ligne de courant moyenne pour $\rho = 1000 \text{ kg / m}^3$.

$$I_0 =$$

3 - En déduire au même rayon r les valeurs de W sur les lignes de courant ψ_e et ψ_i .

$$W_e =$$

$$W_i =$$

Problème 1. Analyse du fonctionnement d'une pompe centrifuge.

La pompe étudiée possède les caractéristiques pression-débit données en figure 1 (essais réalisés à l'eau). On donne en figure 2 le dessin de définition de la roue.

Hypothèses retenues :

- A. Pour l'ensemble des points de fonctionnement l'entrée du fluide dans la roue s'effectue sans prérotation
- B. Le débit d'adaptation q_{va} et le débit de rendement maximal sont confondus.
- C. Par convention, les angles relatifs seront comptés positivement dans le sens inverse du sens trigonométrique.

I - ANALYSE GLOBALE

1- Relever ou déduire directement des figures 1 et 2 l'ensemble des paramètres géométriques constructifs ou de fonctionnement pour la roue de référence :

- * à l'entrée de l'aubage : R_1, b_1 .
- * à la sortie de l'aubage : $R_2, b_2, \beta_{2\infty}$
- * vitesse de rotation N , débit d'adaptation q_{va} , hauteur nominale.
- * le nombre d'aubes N_a

En déduire l'angle d'entrée d'aubage $\beta_{1\infty}$.

2- A l'aide du diagramme de Cordier, déterminer la valeur du rayon standard qu'on notera R_e .
Le comparer à R_2 .

3- En se plaçant au débit d'adaptation, déterminer :

- * le coefficient de glissement μ (on prendra un angle de centrifugation égal à celui observé en sortie de roue).

* Les composantes de la vitesse absolue :

$$\vec{C}_2 \left| \begin{array}{l} C_{r2} \\ C_{u2\infty} \end{array} \right.$$

* La hauteur théorique d'Euler $H_{th\infty}$.

* Le rendement hydraulique η_H et la perte hydraulique correspondante Δh .

4- Toujours au débit d'adaptation, on suppose connues les pertes mécaniques et volumétriques

$$P_m = 5600 \text{ watts}$$

$$q_{vf} = 16,5 \text{ m}^3/\text{h}$$

En déduire les divers rendements.

II - ECOULEMENT INTERNE

On s'intéresse ici à l'écoulement interaubages généré par la roue centrifuge à son point nominal.

Hypothèses retenues :

D. Les lignes de courant relatives forment les mêmes angles que les aubages.

E. La vitesse observée sur la ligne de courant moyenne $\bar{\psi}$ est égale à la vitesse moyenne débitante.

1- Déterminer sur la ligne de courant moyenne au rayon intermédiaire R^* (figure 2) les composantes de la vitesse relative.

$$\vec{W} \left| \begin{array}{l} W_r \\ W_u \end{array} \right.$$

Ces composantes sont à reporter à une échelle correcte sur la figure 2.

2- A l'aide d'un capteur de pression fixe disposé au rayon R^* , on mesure lors de la rotation de la roue l'évolution de la pression statique absolue. Le signal obtenu est donné en figure 3, quels sont vos commentaires.

3- Sachant que la rothalpie I est constante, en déduire les valeurs de la vitesse relative W_c et W_i sur les lignes de courant ψ_c et ψ_i .



MORET

MP 200.150.400

1450 tr/mn
Rpm

H1248

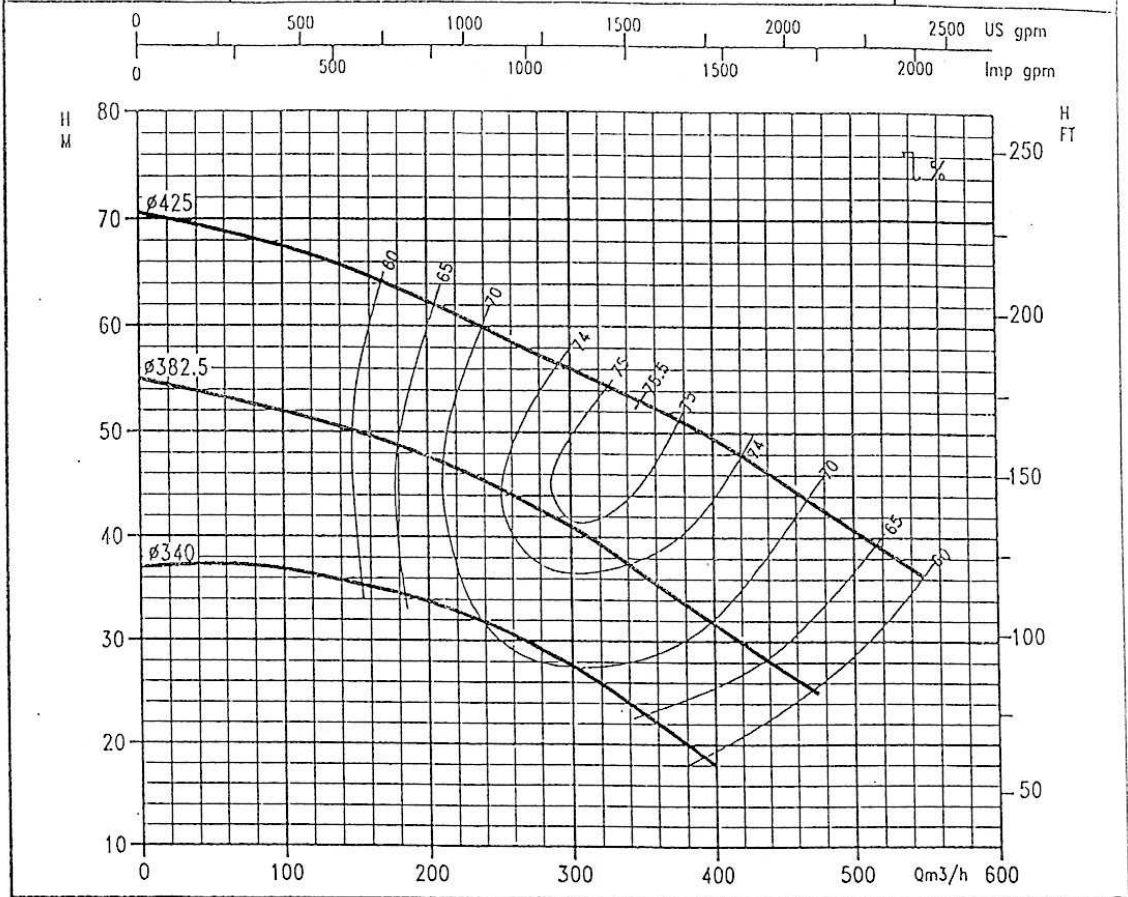
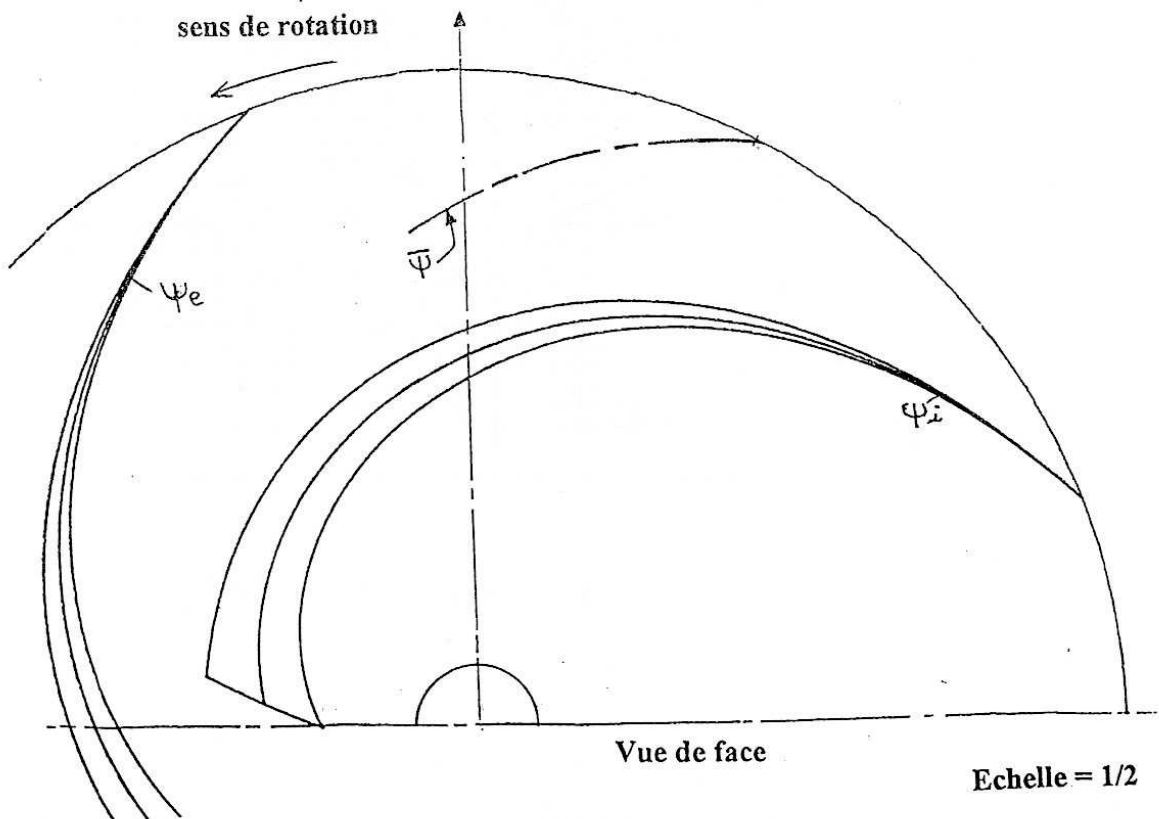
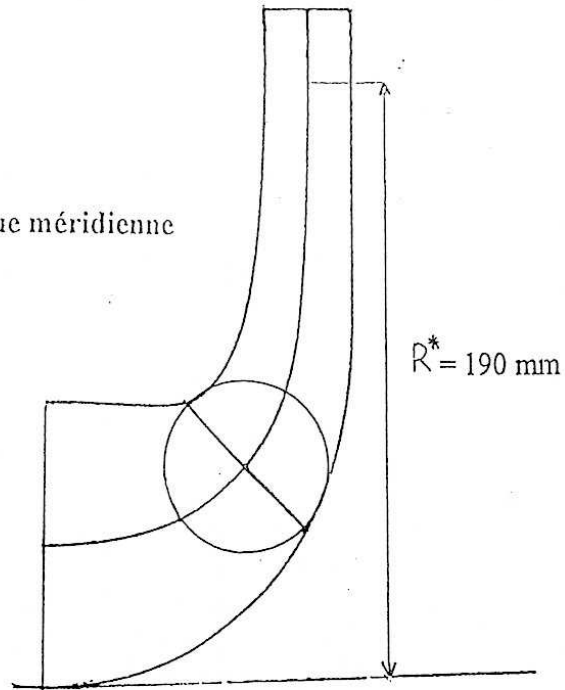


Figure 1 : Caractéristiques de fonctionnement pression-débit.

Nom :
Prenom :

H6

Vue méridienne



Vue de face

Echelle = 1/2

Figure 2 : dessin de définition de la roue.

Capteur de pression CASTLER n°3

Rayon R*
 $qv = qva$
 $N = 1450 \text{ tr/mn}$

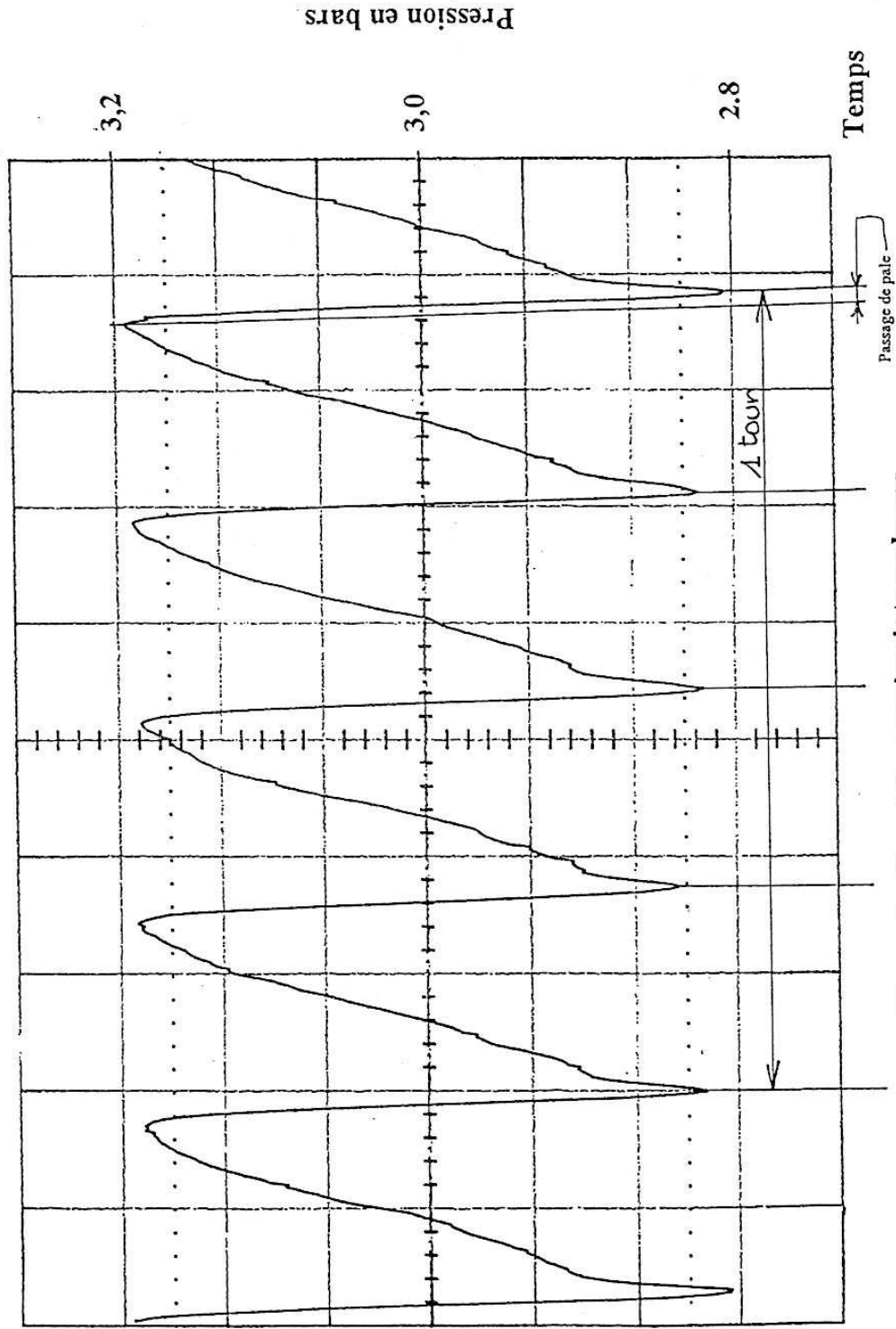


Figure 3 : Signal de pression interaubages.

Problème N° 2

ANALYSE DU FONCTIONNEMENT DE LA TURBOPOMPE A OXYGENE DU MOTEUR VULCAIN - (8 points)

On s'intéresse dans cette étude au fonctionnement nominal de la turbopompe à oxygène du moteur Vulcain. Cette machine est constituée d'une pompe centrifuge alimentée par un inducteur mixte monté sur le même arbre. On donne en figure 1 la coupe méridienne de la turbopompe ainsi que les vues 3D de l'inducteur et de la roue centrifuge.

Hypothèses retenues

- L'entrée du fluide dans les roues s'effectue sans prérotation.
- Le débit d'adaptation q_{va} de la roue centrifuge et le débit nominal q_n de l'inducteur sont confondus.
- Le rétrécissement des sections d'entrée d'aubages par l'épaisseur du bord d'attaque est négligeable.

Les données retenues pour cette analyse sont :

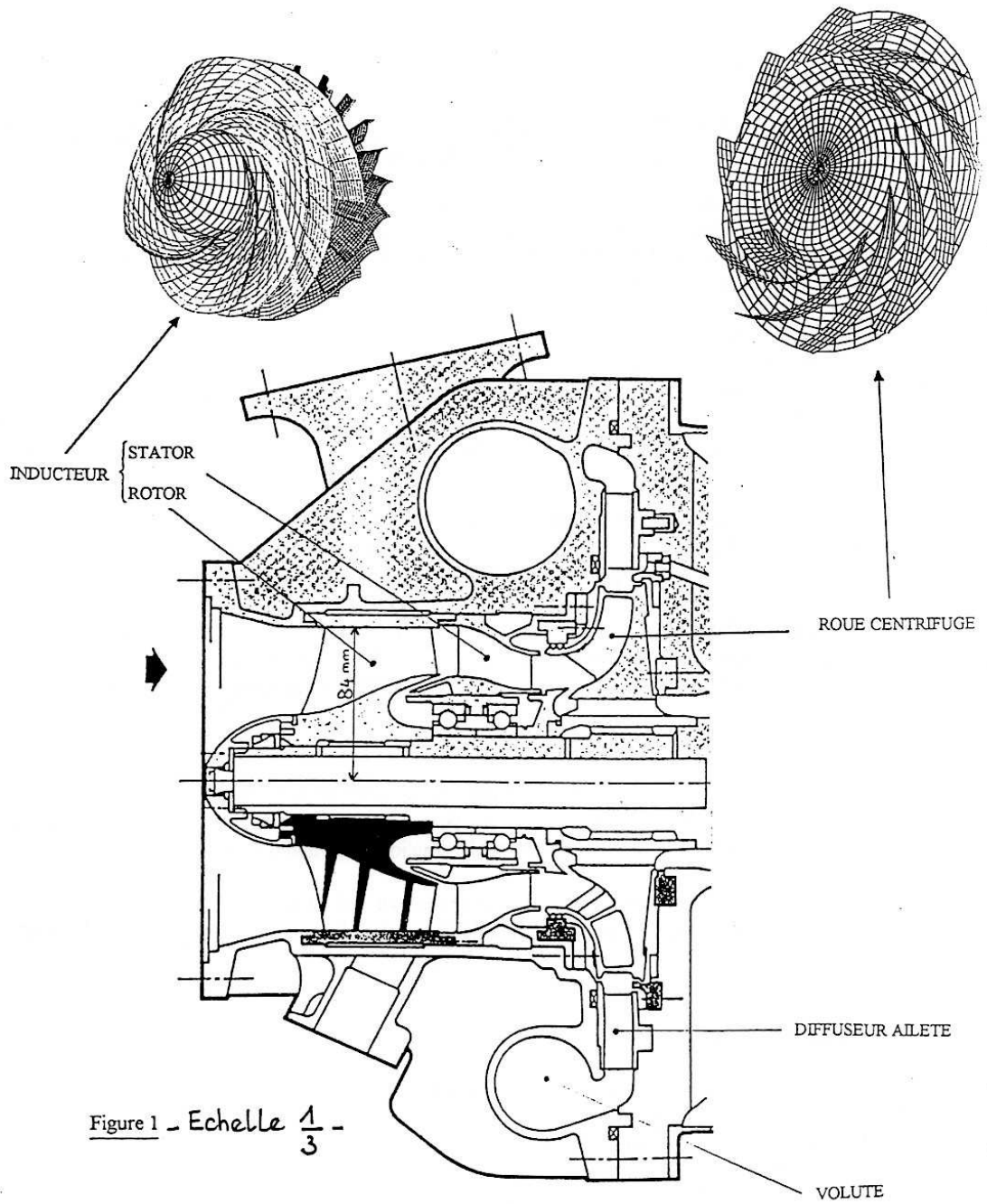
| | |
|--|------------------------------------|
| - Vitesse de rotation : | $N = 13290 \text{ tr/mn.}$ |
| - Elévation de pression de la pompe centrifuge : | $\Delta p_c = 125 \text{ bars.}$ |
| - Débit massique : | $Q = 207,6 \text{ kg/s.}$ |
| - Température à l'entrée : | $T_1 = 91^\circ\text{K.}$ |
| - Masse volumique de l'oxygène liquide : | $\rho(T_1) = 1182 \text{ kg/m}^3.$ |
| - NPSD disponible : | $\text{NPSD} = 1,6 \text{ bars.}$ |

A - Analyse de la roue centrifuge.

- 1/ - Après avoir relevé sur la figure 1 les paramètres géométriques nécessaires, calculer les angles de l'aubage à l'entrée β_{10} et à la sortie $\beta_{2\infty}$. On prendra pour ce calcul un coefficient de glissement égal à $\mu = 0,75$ et le rendement hydraulique sera défini par la relation de Lomakine.
- 2/ - Calculer le **NPSPrequis** sachant que la section au col est égale à $S_c = 0,25 S_1$; S_1 étant la section d'entrée d'aubage. Le coefficient de dépression dynamique λ sera pris égal à $\lambda = 0,55$.
- 3/ - Que peut-on en conclure ?

B- Analyse de l'inducteur.

- 1/ - Relever sur la figure 1, à l'entrée d'aubage, les rayons extérieur R_e et intérieur R_i .
- 2/ - Quelle est la pression minimale Δp_i que doit fournir l'inducteur pour un fonctionnement sans cavitation au sens industriel du terme.
 - En déduire la pression globale Δp_p délivrée par la turbopompe.
- 3/ - Calculer la vitesse spécifique Ω de l'inducteur.
- 4/ - Calculer la vitesse spécifique d'aspiration S sachant que la section au col est ici égale à $S_c = 105 \text{ cm}^2$ et le coefficient de dépression dynamique $\lambda = 0,08$.



**TURBOPOMPE OXYGENE
MOTEUR VULCAIN**

Deuxième partie : Analyse et conception de ventilateurs (11 points).

Ce problème se compose de deux parties A et B pouvant être traitées indépendamment.

A - Analyse de la maquette d'une grille d'aubes plane.

On se propose d'analyser la grille développée en plan d'un ventilateur automobile constituée de profils NACA 65 de 3% d'épaisseur relative (*figure II.1*). On appliquera pour les calculs la théorie des grilles d'aubes constituées de profils NACA 65 de 10% d'épaisseur relative.

- 1- Déterminer directement à partir de la figure II.1 les paramètres géométriques suivants :
 - l'angle de calage γ .
 - la corde des profils l .
 - le pas t .
 - la cambrure aérodynamique $C_{z\infty 0}$.
- 2- On suppose que l'écoulement est axial à l'amont de la grille. La vitesse C_1 est égale à 14 m/s. La grille est entraînée à une vitesse de translation uniforme U égale à 35,6 m/s.
 - Tracer le **triangle de vitesses à l'entrée** de la grille.
- 3- Comparer l'angle d'incidence i à l'angle d'incidence nominale i_0 .
- 4- Déterminer la déflexion $\Delta\beta$ assurée par la grille. Déduire les **triangles de vitesses à la sortie** et la hauteur théorique H_{th} communiquée au fluide.
- 5- Calculer le facteur de diffusion global D . **Commenter.**

B - Dimensionnement d'un ventilateur centrifuge.

On étudie ici un ventilateur centrifuge formé d'une roue et d'une volute. La grille circulaire constituant la roue du ventilateur est obtenue à partir d'une transformation conforme de la grille définie en A (*figure II.2*). La propriété principale de cette transformation est de conserver les angles (l'angle β de la roue centrifuge est égal à l'angle γ de la grille plane).

L'équation principale donnant le rayon R s'écrit :

$$R = 0,07 \exp(k.X)$$

Avec :

- X : paramètre variant de 0 à $l \cdot \cos \gamma$ (l la corde de la grille plane donnée en mètre) pour R variant de R_1 à R_2 (R est donné en mètre).
- k : échelle de la transformation.

Cahier des charges du ventilateur :

- Vitesse de rotation du moteur $N = 2900$ tr/mn.
- Hauteur nominale $H = 136$ m de colonne d'air.
- Débit nominal $q_{va} = 0,048$ m³/s.

Hypothèses retenues :

- a - les débits nominal et d'adaptation sont confondus.
- b - l'obstruction des sections de passage par l'épaisseur des aubes est supposée négligeable.
- c - l'air se présente à l'entrée de la roue sans prérotation.
- d - le moment cinétique dans la volute est conservé (vortex libre, $r.Cu = \text{constante}$).

- 1- Evaluer le rayon spécifique Λ . Déduire le rayon extérieur R_2 de la roue et calculer la valeur k de la transformation conforme.
- 2- Donner la valeur du rayon d'entrée R_1 . Calculer la largeur d'aubes b_1 à l'entrée, conformément aux hypothèses a, b et c.
- 3- Définir la largeur b en fonction de r , b_1 et R_1 pour garantir une vitesse débitante C_r constante à travers la roue. Calculer ainsi b_2 et schématiser l'allure de la vue méridienne.
- 4- En respectant l'hypothèse d, montrer que l'expression de la section transversale de la volute supposée rectangulaire s'écrit :

$$S_0 = b_3 R_3 [\exp(X) - 1]$$

$$\text{avec : } X = \frac{\theta q v a}{360 b_3 R_2 C u_2} \quad \theta \text{ est en degrés.}$$

Calculer la section S_{180} ($\theta=180^\circ$) pour une largeur $b_3=2.b_2$ et un rayon de base $R_3=R_2$.
Pour le calcul du coefficient de glissement μ on prendra un angle de centrifugation δ égal à 90° .

- 5- Calculer la puissance absorbée P_a par le ventilateur et son rendement global η_g sachant que les rendements volumétrique et mécanique valent chacun 0,93.

Echelle : 1/1

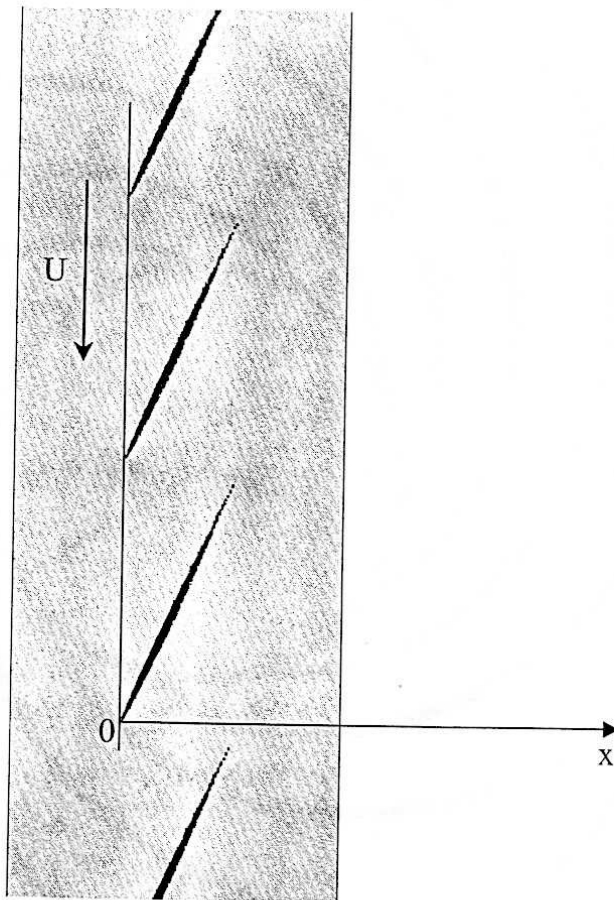


Figure II.1 : Grille d'aubes plane.

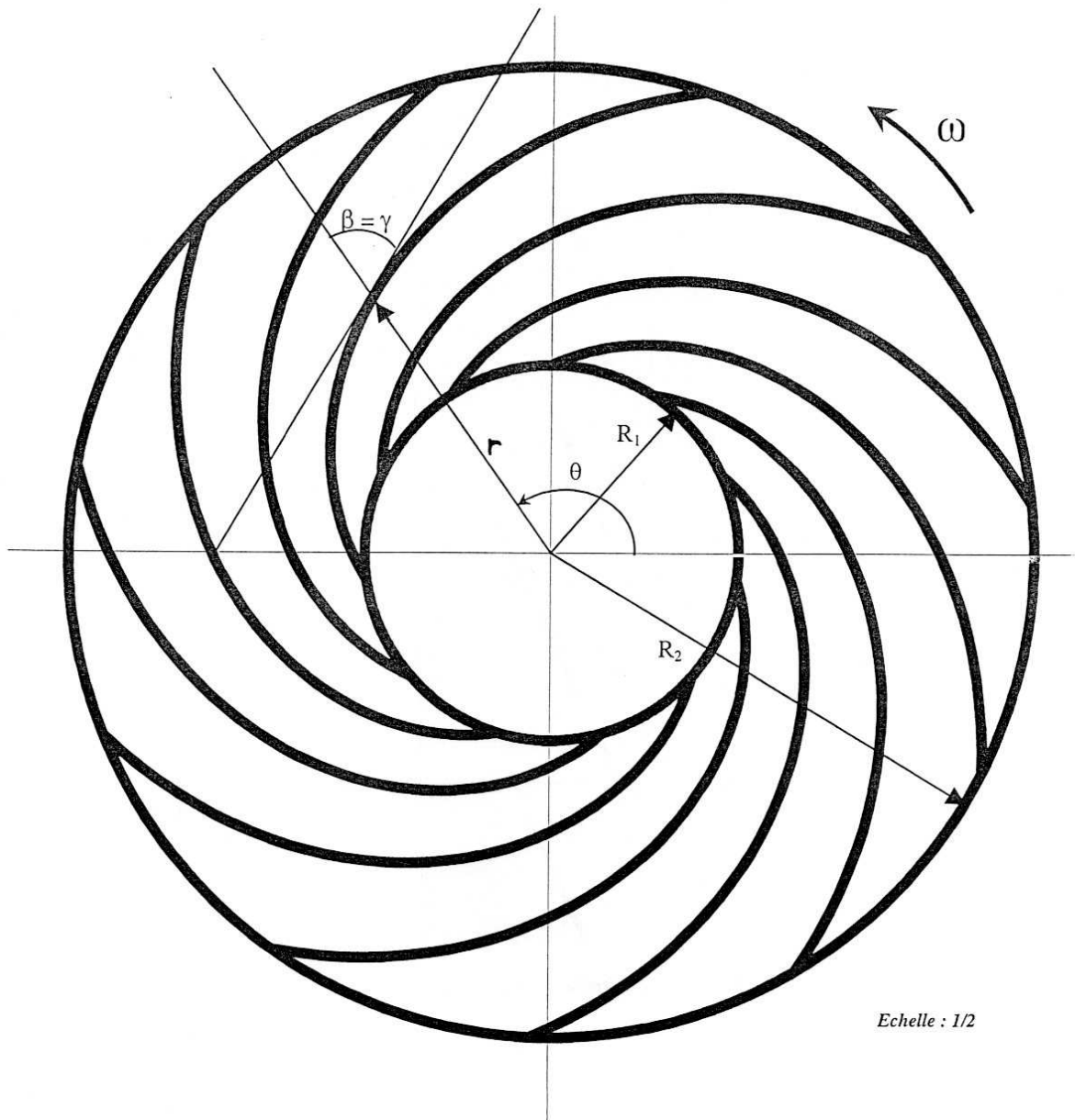


Figure II.2 : roue du ventilateur centrifuge

Problème II : Analyse d'une pompe centrifuge (8 pts)

Une pompe centrifuge constituée d'une roue et d'une volute a donné sur banc d'essai les caractéristiques hydrauliques représentées sur la figure 1.

La figure 2 montre la vue méridienne de la roue. Les aubes de la roue, au nombre de 5, sont définies avec un angle d'aubage $\beta = 70^\circ$, de l'entrée à la sortie de l'aube.

Hypothèses :

- L'eau arrive dans la roue sans prérotation.
- L'épaisseur des aubes est supposée négligeable.
- La hauteur théorique est parallèle à la hauteur théorique pour un nombre d'aubes infini.

Questions :

- 1) Définir le débit d'adaptation q_{va} de la pompe.

Calculer à ce débit :

- 2) le coefficient de glissement μ (utiliser la relation simplifiée de Pfleiderer, $\delta=90^\circ$).
- 3) le rendement hydraulique η_{hn} à partir du calcul de la hauteur théorique.
- 4) le rendement mécanique η_m sachant que le rendement volumétrique est égale à $\eta_v = 0,95$.
- 5) la puissance sur l'arbre P_a .

Calculer au débit $q_v = 0,5 \cdot q_{va}$:

- 6) la hauteur théorique H_{th} .
- 7) le rendement hydraulique η_h .



MP 200.150.315

ACS 28

1450 tr/mn
Rpm

H1246

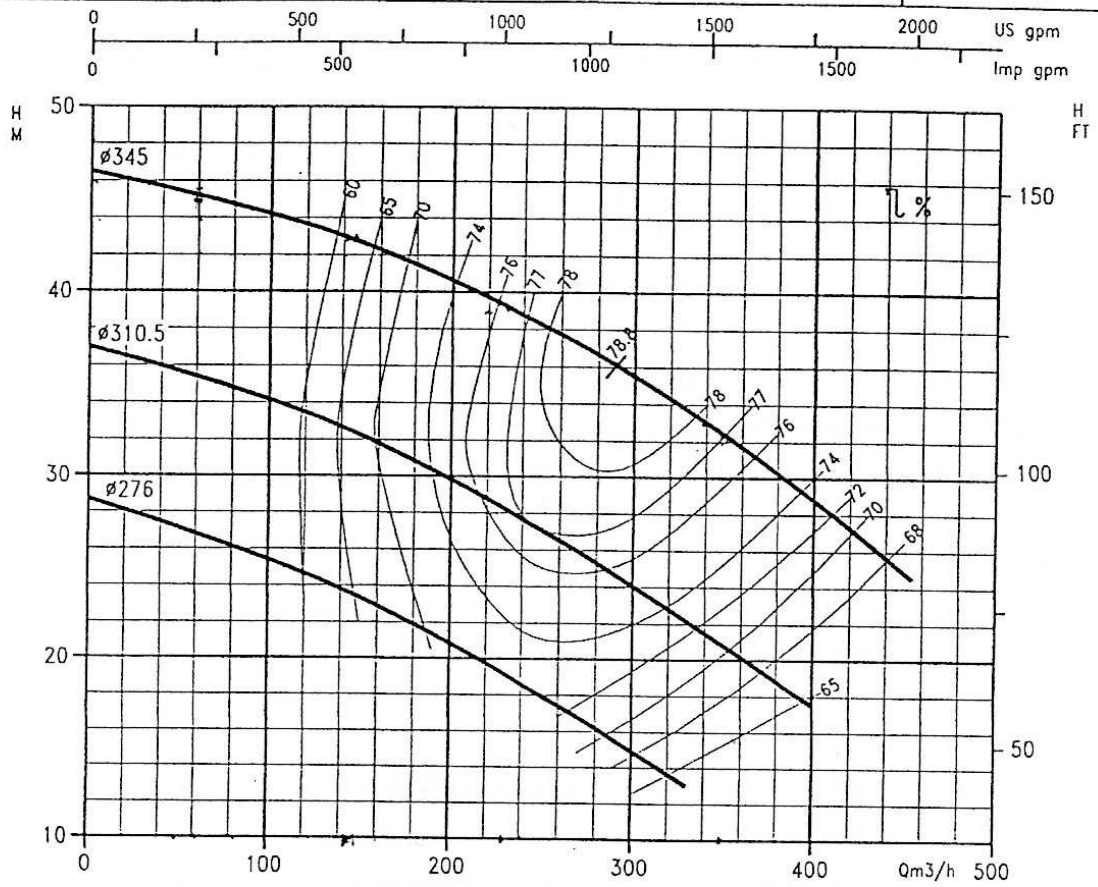
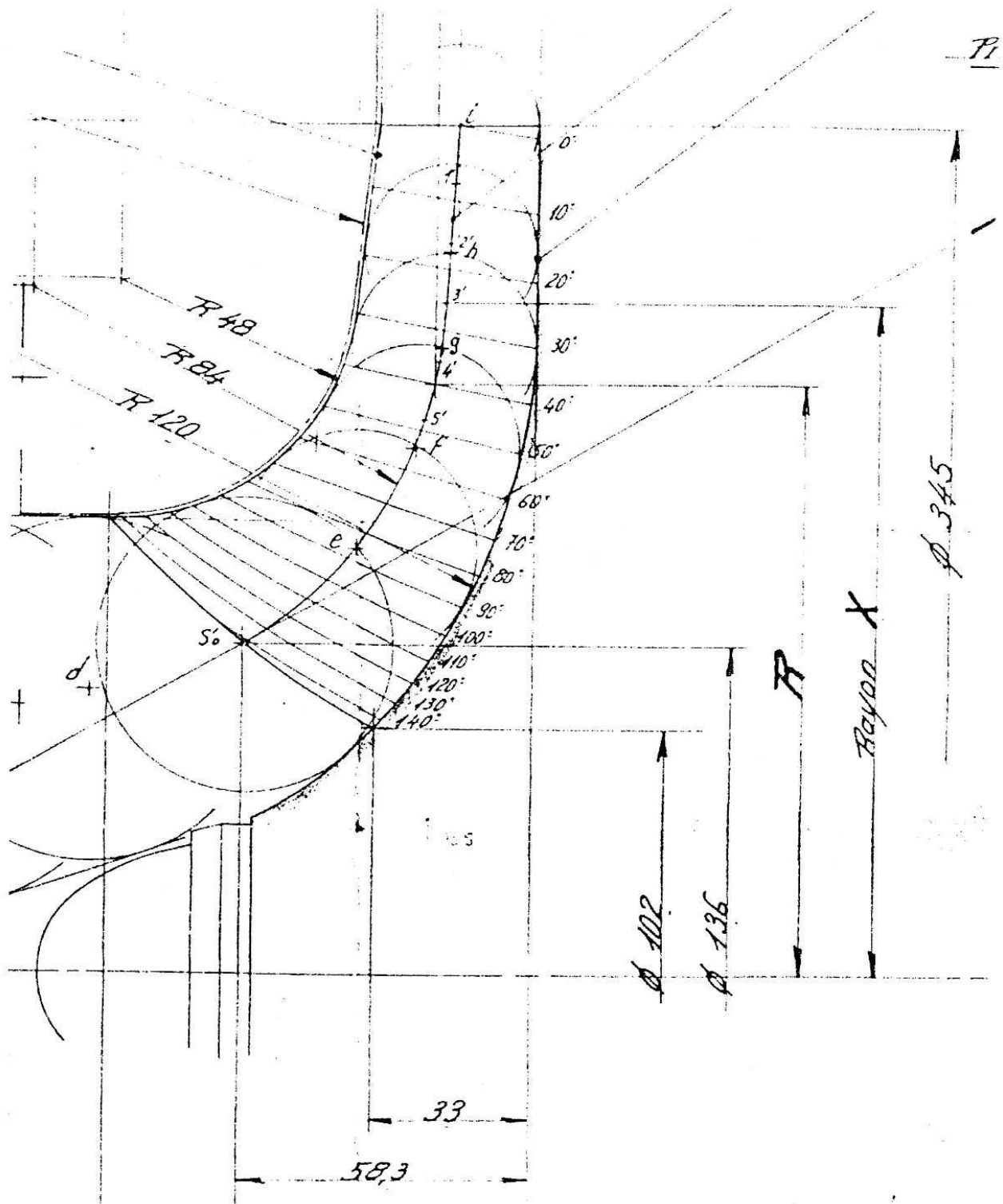


Figure : 1 Caractéristiques hydrauliques de la pompe.



Echelle : 1/1
 Figure 2 : Vue méridienne de la roue.

R. 14. – Mouvement relatif

$$\vec{\text{rot}} \vec{C} = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial C_a}{\partial \theta} - \frac{\partial C_u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_a}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rC_u)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial C_r}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

En remplaçant chaque composante de la vitesse absolue par sa valeur en fonction des composantes relatives et d'entraînement :

$$\vec{C} = \vec{U} + \vec{W} = \begin{vmatrix} 0 \\ \omega r \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} W_r \\ W_u \\ W_a \end{vmatrix} = \begin{cases} C_r = W_r \\ C_u = \omega r + W_u \\ C_a = W_a \end{cases}$$

Le système (1) s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{C} = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial W_a}{\partial r} - \frac{\partial W_u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_a}{\partial r} = 0 \\ 2\omega + \frac{1}{r} \frac{\partial(rW_u)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

En observant que le rotationnel de \vec{U} s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{U} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{vmatrix}$$

Le système (2) peut s'écrire :

$$\vec{\text{rot}} \vec{C} = \vec{\text{rot}} \vec{W} + 2 \vec{\omega}$$

ou encore :

$$\text{rot } \vec{W} = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial W_a}{\partial r} - \frac{\partial W_u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_a}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rW_u)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} = -2\omega \end{cases} \quad (3)$$

Le mouvement relatif est donc rotationnel.

R. 21. – Euler 3D

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = W_m \sin \delta \left[\frac{\partial W_m}{\partial r} \sin \delta + W_m \cos \delta \frac{\partial \delta}{\partial r} \right] + \left[\frac{W_m}{r} \operatorname{tg} \beta + \omega \right] \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \sin \delta$$

$$+ W_m \cos \delta \left[\frac{\partial W_m}{\partial z} \sin \delta + W_m \cos \delta \frac{\partial \delta}{\partial z} \right] - \frac{Cu^2}{r} + \frac{\partial W_m}{\partial t} \sin \delta - f_D \cos \beta \sin \delta$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} = W_m \sin \delta \left[\frac{\partial W_m}{\partial r} \operatorname{tg} \beta + W_m (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] + \left[\frac{W_m}{r} \operatorname{tg} \beta + \omega \right] \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \operatorname{tg} \beta$$

$$+ W_m \cos \delta \left[\frac{\partial W_m}{\partial z} \operatorname{tg} \beta + W_m (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \frac{\partial \beta}{\partial z} \right] + \frac{Cu}{r} W_m \sin \delta + \frac{\partial W_m}{\partial t} \operatorname{tg} \beta + r \frac{d\omega}{dt} - f_D \sin \beta$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = W_m \sin \delta \left[\frac{\partial W_m}{\partial r} \cos \delta - W_m \sin \delta \frac{\partial \delta}{\partial r} \right] + \left(\frac{W_m}{r} \operatorname{tg} \beta + \omega \right) \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \cos \delta$$

$$+ W_m \cos \delta \left[\frac{\partial W_m}{\partial z} \cos \delta - W_m \sin \delta \frac{\partial \delta}{\partial z} \right] + \frac{\partial W_m}{\partial t} \cos \delta - f_D \cos \beta \cos \delta$$

En utilisant les propriétés géométriques de (28) et en remarquant que :

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = \frac{\partial W_m}{\partial t} \cdot \frac{dm}{dt} \frac{dt}{dm} = \frac{\partial W_m}{\partial t} W_m \frac{dt}{dm},$$

les composantes s'écrivent :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{W_m \sin \delta}{dm} \left[\frac{\partial W_m}{\partial r} dr + \frac{\partial W_m}{r \partial \theta} r d\theta + \frac{\partial W_m}{\partial z} dz + \frac{\partial W_m}{\partial t} dt \right]$$

$$+ \frac{W_m^2}{dm} \cos \delta \left[\frac{\partial \delta}{\partial r} dr + \frac{\partial \delta}{\partial z} dz \right] - \frac{Cu^2}{r} + \omega \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \sin \delta - f_D \cos \beta \sin \delta$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{W_m \operatorname{tg} \beta}{dm} \left[\frac{\partial W_m}{\partial r} dr + \frac{\partial W_m}{r \partial \theta} r d\theta + \frac{\partial W_m}{\partial z} dz + \frac{\partial W_m}{\partial t} dt \right]$$

$$+ \frac{W_m^2}{dm} (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \left[\frac{\partial \beta}{\partial r} dr + \frac{\partial \beta}{\partial z} dz \right] + \frac{Cu}{r} W_m \sin \delta + r \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \operatorname{tg} \beta - f_D \sin \beta$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{W_m \cos \delta}{dm} \left[\frac{\partial W_m}{\partial r} dr + \frac{\partial W_m}{r \partial \theta} r d\theta + \frac{\partial W_m}{\partial z} dz + \frac{\partial W_m}{\partial t} dt \right]$$

$$- \frac{W_m^2}{dm} \sin \delta \left[\frac{\partial \delta}{\partial r} dr + \frac{\partial \delta}{\partial z} dz \right] + \omega \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \cos \delta$$

Les termes entre crochets sont des différentielles totales.

$$dW_m = \frac{\partial W_m}{\partial r} dr + \frac{\partial W_m}{r \partial \theta} r d\theta + \frac{\partial W_m}{\partial z} dz + \frac{\partial W_m}{\partial t} dt$$

$$d\delta = \frac{\partial \delta}{\partial r} dr + \frac{\partial \delta}{\partial z} dz$$

$$d\beta = \frac{\partial \beta}{\partial r} dr + \frac{\partial \beta}{\partial z} dz$$

- D -

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1) OUVRAGES GENERAUX

- 101 - R. COMOLET : « Mécanique expérimentale des fluides »
1982 - Ed. Masson - Paris
- 102 - R. OUZIAUX et J. PERRIER : « Mécanique des fluides appliquée »
1972 - Ed. Dunod - Paris
- 103 - A. HOUBERECHT : « Les turbines »
1972 - Ed. Vander - Louvain
- 104 - KARASSIK : « Pump Handbook »
1976 - Ed. Mc Graw Hill Co - New York
- 105 - I. RYHMING : « Dynamique des fluides »
1985 - Ed. Presses Polytechniques Romandes
- 106 - G.T. CSANADY : « Theory of turbomachinery »
1964 - Ed. Mc Graw Hill Co - New York
- 107 - G. MEAUZE et A. CARRERE : « Etude aérodynamique de l'écoulement dans les aubages de machines tournantes »
1984 - Cours à l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace
- 108 - F. LEBOEUF, R. VOUILLARMET, P. FERRAND : « Aérodynamique des turbomachines »
Cours de l'Ecole Centrale de Lyon
- 109 - B. LAKSHINARAYANA : « An assessment of computational fluid dynamic techniques in the analysis and design of turbomachinery »
1991 - Journal of Fluids Engineering - ASME - Vol. 113
- 110 - D. ALTHAUS, F.X. WORTMANN : « Stuttgarter profilkatalog I »
1981 - Ed. VIEWEG - Wiesbaden
- 111 - F.W. RIEGELS : « Results from wind-tunnel investigations »
1961 - Ed. Butterworths – London

112 - F. GIRERT : « Aérodynamique B2 »
1977 - Cours du CNAM

113 - D. ALTHAUS : « Profilpolaren für den modellflug »
1980 - Ed Neckar - Verlag - Villingen

2) PUBLICATIONS ET COMMUNICATIONS

- 201 - E. BONATAKI, P. CHAVIAROPOULOS, K.D. PAPAILIOU : « An inverse inviscid method for the design of quasi-three-dimensional turbomachinery cascade »
ASME - journal of Fluids Engineering - March 1993 - Vol. 115
- 202 - Document CETIM - HYD/CD - 85 Ni049
Mai 1985
- 203 - M.H. FAGARD : « Etude des écoulements décollés en grilles d'aubes en régime sous-sonique compressible »
Thèse de Doctorat - LEMFI - Paris VI - 1993
- 204 - T.S. LUU, B. VINEY, L. BENCHERIF : « Inverse problem using S2-S1 approach for the design of the turbomachine with splitter blades »
Revue Française de Mécanique - p. 209-224 - n° 1992.3 - FRANCE
- 205 - A.A. FAY : « Simple performance model for pumps »
Pumping Machinery - ASME - FED. Vol. 154 - p. 119-125 - 1993
- 206 - M. JAREMCZAK : « Analyse théorique et expérimentale du bruit hydraulique des pompes centrifuges »
Thèse de Doctorat - Université de Lille - FRANCE - 1992
- 207 - F.C. VISSER, J.J.H. BROUWERS : « Review of status of potential flow calculations in radially bladed pump impellers »
Pumping machinery - ASME FED. Vol. 154 - p. 219-226 - 1993
- 208 - J. CHAUVIN, R.A. VAN DEN BRAEMBUSSCHE, P. LUBUNGA, C. LOUDET : « Calcul de l'écoulement dans le plan circonférentiel d'une roue mixte »
Institut Von Karman - Rhodes - Belgique - 1973
- 209 - G. ASSASSA et K.D. PAPAILIOU : « An integral method for calculating turbulent boundary layers with separations »
1979 - ASME - Journal of fluid engineering - Vol. 100 - p. 110-116

- 210 - WU C.H. : « A general theory of three dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial, radial and mixed-flow types »
NACA - TN 2604 - 1952
- 211 - MARSH M. : « A digital computer program for the through flow fluid mechanics in an arbitrary turbomachine using a matrix method »
Reports et Memoranda - N° 3509 - 1966
- 212 - BOSMAN C. et MARSH M. : « Improved method for calculating the flow in turbomachine, including a consistent loss model »
JSME - Vol. 16 - N° 1 - 1974
- 213 - BOSMAN C. et EL SHAARAWI . : « Quasi three dimensional numerical solutions of flow in turbomachines »
ASME - 1977
- 214 - DAVIS W.R. et MILLAR D. : « A comparison of the matrix and streamline curvative methods of axial flow turbomachinery analysis from a user's point of view »
ASME - 1975
- 215 - RIBAUD Y. et SOVRANO R. : « Calculs théoriques d'écoulements dans les turbomachines radiales. Calcul de l'écoulement moyen »
ONERA - NT N° 1/3086 - 1973
- 216 - NOVAK R.A. : « Streamline curvature computing procedures for fluid-flow problems »
ASME - 1967
- 217 - SENOO Y. et NAKASE Y. : « An analysis of flow through a mixed flow impeller »
ASME - 1972
- 218 - FROST D. : « A streamline curvature through-flow computer program for analyzing the flow through axial-flow turbomachines »
Reports and Memoranda - N° 3687 - 1970

- 219 - WILKINSON D.H.
- 220 - NOVAK R.A. et HEARSEY R.H. : « A nearly three-dimensional intrablade computing system for turbomachinery »
ASME - 1977
- 221 - HIRSCH C.H. et WARZEE G. : « A finite element method for the axisymmetric flow computation in a turbomachine »
INJME - Vol. 10 - 1976
- 222 - HONG TUAN HA : « Etablissement d'un programme de calcul de l'écoulement méridien d'une turbomachine radiale par la méthode des éléments finis »
Journal de Mécanique Appliquée - N° 4 - 1979
- 223 - DENTON J.D. et SINGH U.K. : « Time marching methods for turbomachinery flows calculation »
VKI - Lectures series - 1979
- 224 - VEUILLOT J.P. : « Calculation of the quasi-three dimensional flow in a turbomachine blade row »
ASME - N° 76- GT-56 - 1976
- 225 - CROCCO L. : « A suggestion for the numerical solution of the steady Navier-Stokes equations »
AIAA - Vol. 3 - N° 10
- 226 - KATSANIS T. : « Computer program for calculating velocities and streamlines on a blade-to-blade surface of a turbomachine »
NASA - TN 4525 - 1968
NASA - TN 8430 - 1977
- 227 - WEISS P. : « Etude théorique et expérimentale de la compression diphasique. Application au pompage de liquides aérés »
1996 - Thèse de Doctorat - LEMFI - ENSAM - Paris

- 228 - BELAMRI T. : « Modélisation des écoulements par la méthode des singularités »
1994 - DEA Conversion de l'Energie - Filière I - LEMFI - ENSAM – Paris
- 229 - ROUIBI M. : « Mise en oeuvre numérique et analyse critique de différents modèles de couche limite »
1995 - DEA Conversion de l'Energie - Filière I - LEMFI - ENSAM - Paris
- 230 - KUS U. : « Contribution à la prédiction des performances globales et locales des grilles d'aubes »
1995 - Thèse de Doctorat - LEMFI - ENSAM - Paris
- 231 - HERRIG L., EMERY C., ERWIN R. : « Systematic two dimensionnal cascade tests of NACA 65 - Series compressor blades at low speeds »
1957 - NACA TN 3916
- 232 - REY R. : « Méthode générale de détermination d'un étage de turbomachine axiale de compression »
1981 - Thèse de Doctorat d'Etat - Paris VI
- 233 - NOGUERA R. : « Contribution à la maîtrise du dimensionnement et du fonctionnement des turbomachines axiales - Etude des débits partiels et de la cavitation »
1987 - Thèse de Doctorat d'Etat - Paris VI
- 234 - BAKIR F. : « Méthode de dimensionnement et d'analyse des machines de compression hélico-centrifuges en régime incompressible »
1992 - Thèse de Doctorat - LEMFI - ENSAM - Paris
- 235 - KOUIDRI S. : « Etude théorique et expérimentale de l'influence des paramètres constructifs sur les caractéristiques aéroacoustiques des ventilateurs axiaux »
1993 - Thèse de Doctorat - LEMFI - ENSAM - Paris