

# RDM – Éléments finis

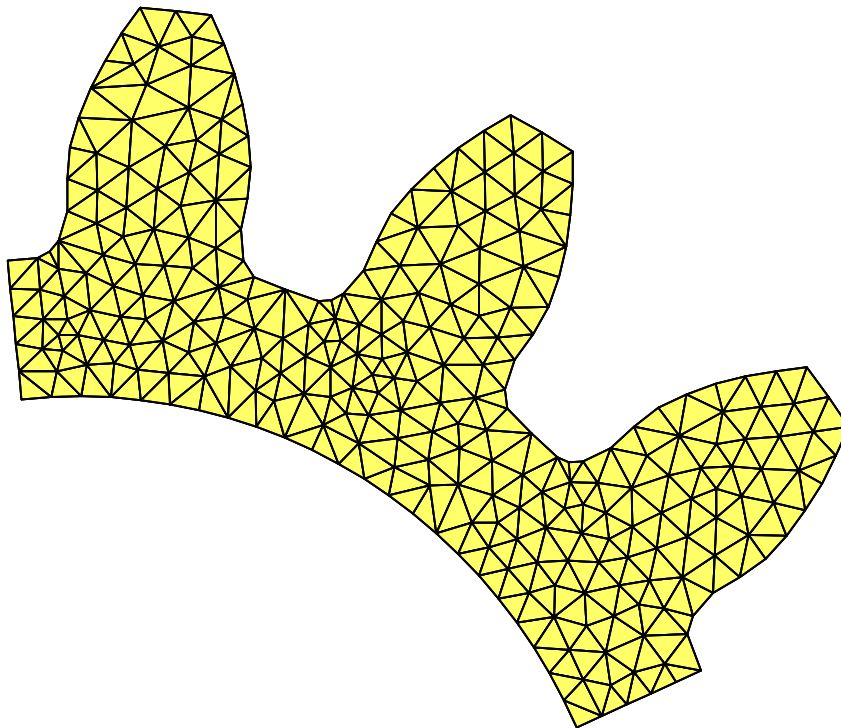
## Manuel d'exercices

Yves Debard

Institut Universitaire de Technologie du Mans  
Département Génie Mécanique et Productique

<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

*26 juin 2006 – 29 mars 2011*





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Élasticité</b>	<b>1</b>
	ELA_1 : Plaque percée d'un trou circulaire, sollicitée en traction . . . . .	1
	ELA_2 : Plaque rectangulaire soumise à l'action de la pesanteur . . . . .	3
	ELA_3 : Disque annulaire en rotation . . . . .	5
	ELA_4 : Tube épais soumis à un gradient thermique . . . . .	7
	ELA_5 : Réservoir sphérique soumis à une pression intérieure et à un gradient thermique . .	9
	ELA_6 : Cylindre à paroi épaisse sous pression . . . . .	12
	ELA_7 : Déformations et contraintes d'origine thermique dans une poutre . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Flexion des plaques</b>	<b>16</b>
	PLA_1 : Flexion d'une plaque circulaire et encastree sur son contour . . . . .	16
	PLA_2 : Vibrations de flexion d'une plaque mince, carrée et encastree sur un côté . . . . .	19
	PLA_3 : Vibrations de flexion d'une plaque mince, carrée et libre . . . . .	21
	PLA_4 : Plaque ou poutre . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Section droite : caractéristiques et contraintes</b>	<b>25</b>
	SEC_1 : Triangle équilatéral . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Thermique</b>	<b>27</b>
4.1	Problèmes stationnaires . . . . .	27
	TS_L_1 : Températures imposées . . . . .	27
4.1.1	TS_L_2 : Convection . . . . .	29
4.1.2	TS_L_3 : Températures imposées – facteur de forme . . . . .	31
4.1.3	TS_L_4 : Convection et source volumique . . . . .	32
4.1.4	TS_L_5 : Convection et source volumique . . . . .	34
4.1.5	TS_L_6 : Températures imposées et source volumique . . . . .	35
4.1.6	TS_L_7 : Température imposée et convection . . . . .	36
4.1.7	TS_L_8 : Convection . . . . .	37
4.1.8	TS_NL_1 : Convection et rayonnement . . . . .	38
4.1.9	TS_NL_2 : Convection et rayonnement . . . . .	39
4.1.10	TS_NL_3 : Convection et rayonnement . . . . .	40
4.2	Problèmes transitoires . . . . .	41
4.2.1	TT_L_1 : Plaque soumise à un choc thermique . . . . .	41
4.2.2	TT_L_2 : Plaque et convection . . . . .	43
4.2.3	TT_L_3 : Sphère et convection . . . . .	45
4.2.4	TT_L_4 : Milieu semi-infini et convection . . . . .	47
4.2.5	TT_NL_1 : Radiation et source de chaleur volumique . . . . .	49
4.2.6	TT_NL_2 : Convection et radiation . . . . .	51



# Chapitre 1

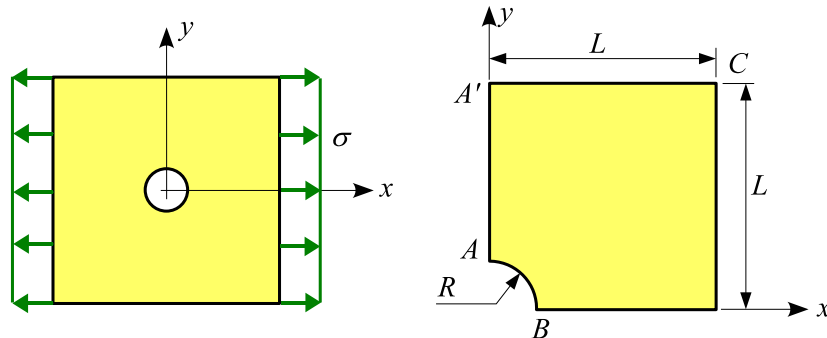
## Élasticité

### ELA\_1 : Plaque percée d'un trou circulaire, sollicitée en traction

Référence : *solution analytique.*

Données :

La plaque carrée de côté  $2L$  et d'épaisseur  $t$  représentée sur la figure est percée en son centre d'un trou circulaire de rayon  $R$  petit devant  $L$ .



Soient  $E$  et  $\nu$  les caractéristiques élastiques du matériau.

La plaque est soumise à une contrainte de traction  $\sigma$  sur les côtés situés à  $x = \pm L$ .

On donne :

$$L = 400 \text{ mm} , R = 20 \text{ mm} , t = 10 \text{ mm}$$

$$E = 210000 \text{ MPa} , \nu = 0.27$$

$$\sigma = 10 \text{ MPa}$$

**Modélisation et calcul :**

Le problème étant symétrique par rapport aux plans  $x = 0$  et  $y = 0$ , il suffit donc de modéliser le quart de la pièce.

Les étapes de la modélisation sont :

**Lancer le module Dessin et maillage**

**Modifier les unités courantes**

Longueur : mm

**Fichier**

**Bibliothèque**

Structure 10 :  $x_O = y_O = 0$  ,  $L = H = 400$  ,  $R = 20$  , sans sous-domaines

**Mailler (Delaunay)**

**Nombre d'éléments**

$\sim 400$

**Modifier localement la taille des éléments**

En  $C$  : 0.5 , en  $A$  et  $B$  : 5

**Discrétiser le domaine en triangles à 6 nœuds à bords curvilignes**

**Fichier**

**Élasticité/Thermique**

**Problème : contraintes planes**

**Matériau**

Module de Young = 210000 MPa , coefficient de Poisson = 0.27

**Épaisseur**

L'épaisseur est égale à 10 mm

**Liaisons/Symétries**

Symétrie par rapport aux plans  $x = 0$  et  $y = 0$

**Cas de charges**

La pression sur la face  $x = L$  est égale à -10 MPa

**Calculer**

**Analyse statique**

Enregistrer les données et lancer le calcul

**Résultats :**

– référence : pour une plaque infinie ( $L$  très grand) :

$$\sigma_{xx}(A) = 3\sigma = 30.00 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_{yy}(B) = -\sigma = -10.00 \text{ MPa}$$

– solution éléments finis :

$$\sigma_{xx}(A) = 29.97 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_{yy}(B) = -10.08 \text{ MPa}$$

Pour extraire ces quantités :

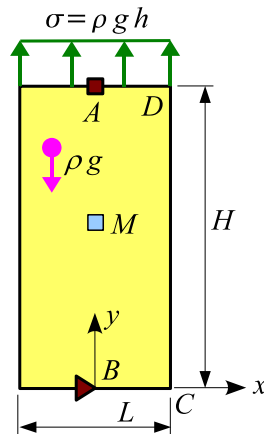
1. effectuer un zoom autour du trou.
2. afficher les faces principales.
3. désigner les points  $A$  et  $B$  à l'aide du bouton droit de la souris.

*Remarque* : pour visualiser la concentration de contrainte autour du trou, effectuer une coupe le long de la ligne  $AA'$ .

## ELA\_2 : Plaque rectangulaire soumise à l'action de la pesanteur

Référence : S.P. TIMOSHENKO, J.N. GOODIER, *Théorie de l'élasticité*, Librairie Polytechnique Béranger, 1961, page 266.

Données :



### – Géométrie :

plaque rectangulaire :  $L = 1000$  mm ,  $H = 3000$  mm , épaisseur = 100 mm

### – Propriétés du matériau :

masse volumique :  $\rho = 7800$  kg m<sup>-3</sup>  
 module de Young :  $E = 200000$  MPa  
 coefficient de poisson :  $\nu = 0.3$

### – Conditions aux limites :

au point  $A(0, H)$  :  $u = v = 0$   
 au point  $B(0, 0)$  :  $u = 0$

### – Charges :

la face supérieure est soumise à une force de pression égale à  $-\rho g H$  où  $g$  est l'accélération de la pesanteur ( $g = 10$  m s<sup>-2</sup>)  
 la plaque est soumise à son poids propre

### Modélisation et calcul :

Les étapes de la modélisation sont :

**Lancer le module Dessin et maillage**

**Fichier**

**Bibliothèque**

structure 1 :  $x_O = y_O = 0$  ,  $L = 1000$  ,  $H = 3000$

**Points**

ajouter un point au milieu de la face supérieure (A)

ajouter un point au milieu de la face inférieure ( $B$ )

ajouter un point au milieu du rectangle ( $M$ )

### Points à mailler

transformer les points  $A$ ,  $B$  et  $M$  en points à mailler (nœuds du maillage)

### Mailler (Delaunay)

### Nombre d'éléments

$\sim 200$

### Discrétiser la structure en triangles à 6 nœuds

### Fichier

### Élasticité/Thermique

### Problème : contraintes planes

### Matériau

module de Young = 200000 MPa

coefficient de Poisson = 0.3

masse volumique = 7800 kg m<sup>-3</sup>

### Épaisseur

l'épaisseur est égale à 100 mm

### Liaisons

au point  $A$  :  $u = v = 0$

au point  $B$  :  $u = 0$

### Cas de charges

poids propre

pression : - 0.234 MPa sur la face supérieure

### Calculer

### Analyse statique

Enregistrer les données et lancer le calcul

### Résultats :

– Référence :

$$\sigma_{xx} = 0 \quad , \quad \sigma_{xy} = 0 \quad , \quad \sigma_{yy} = \rho g y$$

$$u = -\frac{\nu \rho g x y}{E} \quad , \quad v = \frac{\rho g}{2E} (y^2 + \nu x^2 - H^2)$$

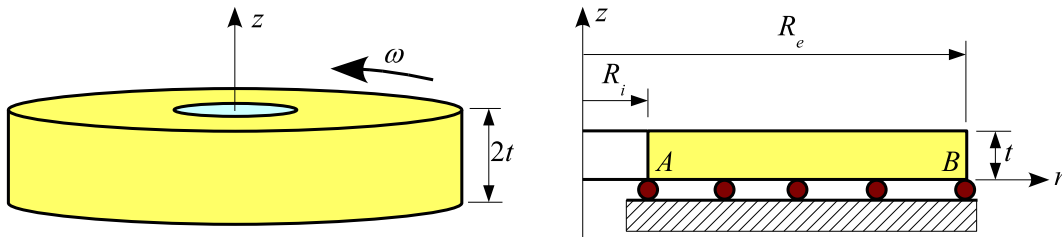
– Solution éléments finis :

	Référence	RDM – Éléments finis
$v$ en $B$	$-1.7550 \cdot 10^{-3}$ mm	$-1.7550 \cdot 10^{-3}$ mm
$v$ en $C$	$-1.7404 \cdot 10^{-3}$ mm	$-1.7404 \cdot 10^{-3}$ mm
$u$ en $D$	$-0.1755 \cdot 10^{-3}$ mm	$-0.1755 \cdot 10^{-3}$ mm
$\sigma_{yy}$ en $M$	0.117 MPa	0.117 MPa
$\sigma_{yy}$ en $A$	0.234 MPa	0.234 MPa

### ELA\_3 : Disque annulaire en rotation

**Référence :** A. BAZERGUI, T. BUI-QUOC, A. BIRON, G. MCINTYRE, C. LABERGE, *Résistance des matériaux*, Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, 1987, page 294.

**Données :**



– Géométrie :

Disque annulaire d'axe  $z$  :

Rayon intérieur :  $R_i = 10$  mm , rayon extérieur :  $R_e = 100$  mm

Épaisseur :  $2t = 20$  mm

– Propriétés du matériau :

Masse volumique :  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>

Module de Young :  $E = 200000$  MPa

Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.3$

– Conditions aux limites :

$w = 0$  pour tous les points du plan moyen du disque

– Chargement :

Le disque tourne autour de l'axe  $z$  : vitesse de rotation  $N = 3000$  tours/min

**Modélisation et calcul :**

Il suffit de modéliser la moitié d'une section méridienne.

Les étapes de la modélisation sont :

**Lancer le module Dessin et maillage**

**Fichier**

**Bibliothèque**

structure 1 :  $x_O = 10$  ,  $y_O = 0$  ,  $L = 90$  ,  $H = 10$

**Mailler (Delaunay)**

**Nombre d'éléments**

~ 200

**Discrétiser la structure triangles à 6 nœuds**

**Fichier****Élasticité/Thermique****Problème : Élasticité axisymétrique****Matériau**

module de Young = 200000 MPa

coefficient de Poisson = 0.3

masse volumique = 7800 kg/m<sup>3</sup>

**Liaisons**

$w = 0$  sur  $AB$

**Cas de charges**

vitesse de rotation = 3000 tours/min

**Calculer****Analyse statique**

Enregistrer les données et lancer le calcul

**Résultats :**

– **Référence** ( $\omega = 2\pi N/60$  rad s<sup>-1</sup>) :

–  $r = R_i$  :

$$\sigma_{rr} = 0 \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{1-\nu}{4} \rho \omega^2 R_e^2 \left( \frac{3+\nu}{1-\nu} + \left( \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \right)$$

$$u = \frac{3+\nu}{4E} \rho \omega^2 R_i R_e^2 \left( 1 + \frac{1-\nu}{3+\nu} \left( \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \right)$$

–  $r = R_e$  :

$$\sigma_{rr} = 0 \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{1-\nu}{4} \rho \omega^2 R_e^2 \left( 1 + \frac{3+\nu}{1-\nu} \left( \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \right)$$

$$u = \frac{3+\nu}{4E} \rho \omega^2 R_e^3 \left( \frac{1-\nu}{3+\nu} + \left( \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \right)$$

– la contrainte radiale est maximale pour  $r_m = \sqrt{R_i R_e}$  et  $\sigma_{rr}(r_m) = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 R_e^2 \left( 1 - \frac{R_i}{R_e} \right)^2$

– **Solution éléments finis :**

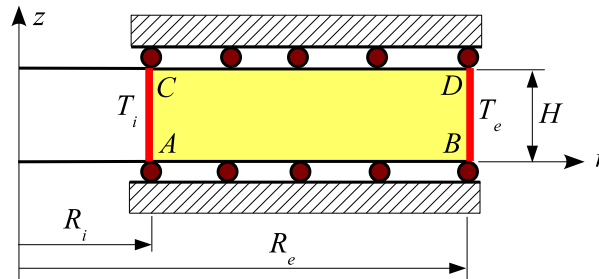
	<b>Référence</b>	<b>RDM – Éléments finis</b>
$u$ en $A$	$3.182 \cdot 10^{-4}$ mm	$3.186 \cdot 10^{-4}$ mm
$\sigma_{\theta\theta}$ en $A$	6.36 MPa	6.43 MPa
$u$ en $B$	$7.054 \cdot 10^{-4}$ mm	$7.076 \cdot 10^{-4}$ mm
$\sigma_{\theta\theta}$ en $B$	1.41 MPa	1.41 MPa
$\sigma_{rr}$ max	2.57 MPa à 30 mm	2.58 MPa à 32.5 mm

*Remarque* : pour extraire ces quantités, sélectionner la commande **Coupe suivant ligne** puis désigner les points  $A$  et  $B$ .

## ELA\_4 : Tube épais soumis à un gradient thermique

Référence : *Guide de validation des progiciels de calcul de structures*, AFNOR, 1990, page 332.

Données :



– Géométrie :

Cylindre creux d'axe  $z$  :  $R_i = 20$  mm ,  $R_e = 80$  mm ,  $H = 20$  mm

– Propriétés du matériau :

Module de Young  $E = 100000$  MPa

Coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$

Coefficient de dilatation  $\alpha = 10^{-5}$  K<sup>-1</sup>

– Conditions aux limites :

La structure est axisymétrique

$w = 0$  sur les faces  $AB$  et  $CD$

– Charges thermique :

Température intérieure  $T_i = 100$  °C

Température extérieure  $T_e = 0$  °C

Température de référence  $T_0 = 0$  °C

**Modélisation et calcul :**

Les étapes de la modélisation sont :

**Lancer le module Dessin et maillage**

**Bibliothèque**

structure 1 :  $x_O = 20$  ,  $y_O = 0$  ,  $L = 60$  ,  $H = 20$

**Mailler (Delaunay)**

**Nombre d'éléments**

~ 200

**Discrétiser la structure triangles à 6 nœuds**

**Fichier**

**Élasticité/Thermique**

**Problème : Élasticité axisymétrique****Matériau**

module de Young = 100000 MPa  
 coefficient de Poisson = 0.3  
 coefficient de dilatation =  $1\text{E}^{-5} \text{ K}^{-1}$

**Liaisons**

$w = 0$  sur  $AB$  et  $CD$

**Charges thermiques**

température imposée :  $T_{AC} = 100 \text{ °C}$  ,  $T_{BD} = 0 \text{ °C}$

**Cas de charges**

gradient thermique : température de référence =  $0 \text{ °C}$

**Calculer****Analyse statique**

Enregistrer les données et lancer le calcul

Résultats :

On obtient :

$r$	Grandeur	Référence	RDM – Éléments finis
$R_i$	$\sigma_{\theta\theta}$	-100.86 MPa	-103.75 MPa
	$\sigma_{zz}$	-130.26 MPa	-133.34 MPa
	$u_r$	$7.644 \cdot 10^{-3}$ mm	$7.70 \cdot 10^{-3}$ mm
$R_e$	$\sigma_{\theta\theta}$	42.00 MPa	41.97 MPa
	$\sigma_{zz}$	12.60 MPa	12.57 MPa
	$u_r$	$30.60 \cdot 10^{-3}$ mm	$30.60 \cdot 10^{-3}$ mm

*Remarque* : pour extraire ces quantités, sélectionner la commande **Coupe suivant droite**.

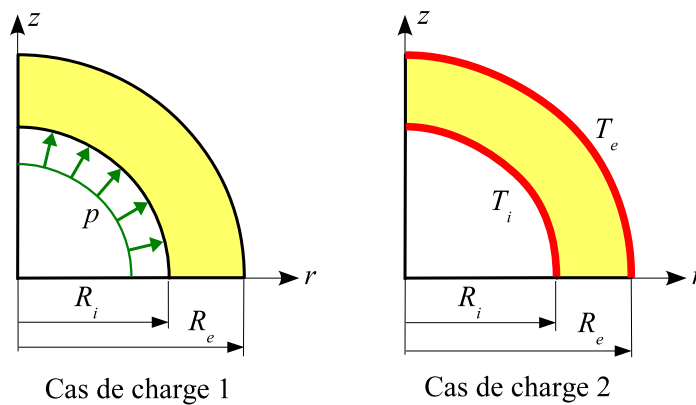
## ELA\_5 : Réservoir sphérique soumis à une pression intérieure et à un gradient thermique

### Références :

L. LANDAU, E. LIFCHITZ, *Théorie de l'élasticité*, Mir, 1967, page 31.

S.P. TIMOSHENKO, J.N. GOODIER, *Théorie de l'élasticité*, Librairie Polytechnique Béranger, 1961, page 452.

### Données :



#### – Géométrie :

Rayon intérieur de la sphère :  $R_i = 100$  mm  
 Rayon extérieur de la sphère :  $R_e = 200$  mm

#### – Propriétés du matériau :

Module de Young :  $E = 200000$  MPa  
 Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.3$   
 Coefficient de dilatation :  $\alpha = 12 \text{ E}^{-6} \text{ K}^{-1}$

#### – Chargement thermique :

Température intérieure :  $T_i = 100$  °C  
 Température extérieure :  $T_e = 0$  °C

#### – Cas de charge 1 :

La face intérieure de la sphère est soumise à une pression égale à :  $p = 100$  MPa.

#### – Cas de charge 2 :

La sphère est soumise au gradient thermique défini ci-dessus. La température initiale  $T_0$  est égale à 0 °C.

**Modélisation et calcul :**

Les étapes de la modélisation sont :

**Lancer le module Dessin et maillage**

Il suffit de modéliser la moitié d'une section méridienne de la sphère

**Fichier****Bibliothèque**

structure 20 : rayon intérieur = 100 mm , rayon extérieur = 200 mm (pas de sous-domaine)

**Mailler (Delaunay)****Nombre d'éléments**

~ 400

**Discrétiser la structure triangles à 6 nœuds et à bords curvilignes****Fichier****Élasticité/Thermique****Élasticité : problème de révolution****Matériau**

module de Young = 200000 MPa

coefficient de Poisson = 0.3

coefficient de dilatation =  $12 \text{ E}^{-6} \text{ K}^{-1}$

**Liaisons**

symétrie par rapport au plan  $z = 0$  ( $AB$ )

**Charges thermiques**

température imposée surfacique :  $T_i = 100 \text{ °C}$  ,  $T_e = 0 \text{ °C}$

**Cas de charges**

la surface intérieure de la sphère est soumise à une pression :  $p = 100 \text{ MPa}$

**Ajouter un cas de charges**

la sphère est soumise à un gradient thermique :  $T_0 = 0 \text{ °C}$

**Calculer****Analyse statique**

Enregistrer les données et lancer le calcul

**Résultats :****Cas de charge 1 :**

– Référence :

Posons :

$$A = \frac{p R_i^3}{R_e^3 - R_i^3} \quad , \quad B = A R_e^3$$

Le déplacement radial est :

$$u = \frac{1 - 2\nu}{E} A r + \frac{1 + \nu}{E} \frac{B}{2 r^2}$$

Les composantes non nulles du tenseur des contraintes sont :

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^3} \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = A - \frac{B}{2 r^3}$$

– Solution éléments finis :

	Référence	RDM – Éléments finis
$u(r = R_i)$	0.0400 mm	0.0400 mm
$u(r = R_e)$	0.0150 mm	0.0150 mm
$\sigma_{rr}(r = R_i)$	-100 MPa	-99.62 MPa
$\sigma_{rr}(r = R_e)$	0	0.05 MPa
$\sigma_{\theta\theta}(r = R_i)$	71.43 MPa	71.48 MPa
$\sigma_{\theta\theta}(r = R_e)$	21.43 MPa	21.44 MPa

*Remarque* : pour extraire ces résultats, effectuer une coupe suivant la ligne  $AB$ .

**Cas de charges 2 :**

– Référence :

$$\sigma_{rr} = C_0 \left( C_1 - \frac{C_2}{r} + \frac{C_3}{r^3} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_0 \left( C_1 - \frac{C_2}{2r} + \frac{C_3}{2r^3} \right)$$

où

$$C_0 = \frac{\alpha E T_i}{1 - \nu} \frac{R_i R_e}{R_e^3 - R_i^3}$$

$$C_1 = R_i + R_e \quad , \quad C_2 = R_i^2 + R_i R_e + R_e^2 \quad , \quad C_3 = R_i^2 R_e^2$$

La contrainte  $\sigma_{rr}$  est maximale lorsque  $r^2 = \frac{3C_3}{C_2}$ .

– Solution éléments finis :

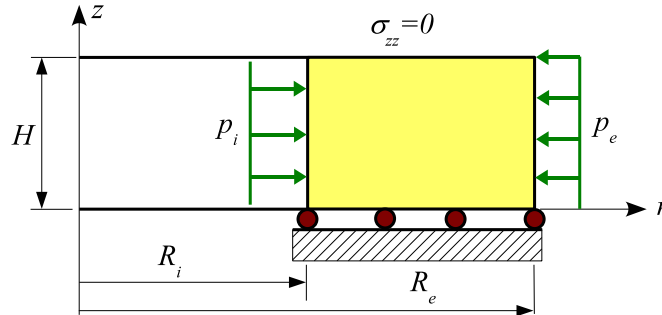
	Référence	RDM – Éléments finis
$u(r = R_i)$		0.0343 mm
$u(r = R_e)$		0.0686 mm
$u$ maximal		0.0752 mm à $r = 161$ mm
$\sigma_{rr}(r = R_i)$	0	2.41 MPa
$\sigma_{rr}(r = R_e)$	0	-0.35 MPa
$\sigma_{rr}$ maximal	-55.27 MPa à $r = 130.93$ mm	-56.25 MPa à $r = 133.33$ mm
$\sigma_{\theta\theta}(r = R_i)$	-244.90 MPa	-245.58 MPa
$\sigma_{\theta\theta}(r = R_e)$	97.96 MPa	97.82 MPa

*Remarque* : pour extraire ces résultats, effectuer une coupe suivant la ligne  $AB$ .

## ELA\_6 : Cylindre à paroi épaisse sous pression

Référence : *solution analytique.*

Données :



On considère un cylindre creux d'axe  $z$ . Ce cylindre est en acier de module de Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ . Il est soumis successivement à une pression intérieure  $p_i$  et à une pression extérieure  $p_e$ .

On donne :

$$R_i = 100 \text{ mm} , R_e = 200 \text{ mm}$$

$$E = 200000 \text{ MPa} , \nu = 0.3$$

$$p_i = p_e = 100 \text{ MPa}$$

Modélisation :

Structure paramétrée 1 :  $x_O = 100 \text{ mm}$  ,  $y_O = 0$  ,  $L = 100 \text{ mm}$  ,  $H = 10 \text{ mm}$ .

Discretiser la structure en  $\sim 400$  triangles à 6 nœuds.

Problème de révolution d'axe  $z$ .

Résultats :

Cas de charge 1 : le cylindre est soumis à une pression intérieure.

Référence :

$$u = \frac{r}{E} \left( (1 - \nu) A + (1 + \nu) \frac{B}{r^2} \right) \quad \text{avec} \quad A = \frac{p_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} , \quad B = A R_e^2$$

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} , \quad \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2}$$

On obtient :

	Référence	RDM – Éléments finis
$u(r = R_i)$	0.0885 mm	0.0885 mm
$u(r = R_e)$	0.0600 mm	0.0600 mm
$\sigma_{rr}(r = R_i)$	-90 MPa	-89.96 MPa
$\sigma_{rr}(r = R_e)$	0 MPa	0.00 MPa
$\sigma_{\theta\theta}(r = R_i)$	150.00 MPa	150.02 MPa
$\sigma_{\theta\theta}(r = R_e)$	60.00 MPa	60.00 MPa

**Cas de charge 2 : le cylindre est soumis à une pression extérieure.**

Référence :

$$u = \frac{r}{E} \left( (1 - \nu) A + (1 + \nu) \frac{B}{r^2} \right) \quad \text{avec } A = -\frac{p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \quad , \quad B = A R_i^2$$

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2}$$

Le déplacement radial  $u$  passe par une valeur maximale pour :

$$r_m = R_i \sqrt{\frac{1 + \nu}{1 - \nu}}$$

si

$$R_i < r_m < R_e \quad \text{soit} \quad \nu < \frac{R_e^2 - R_i^2}{R_i^2 + R_e^2}$$

d'où

$$u(r_m) = \frac{\sqrt{(1 + \nu)(1 - \nu)}}{E} A R_i$$

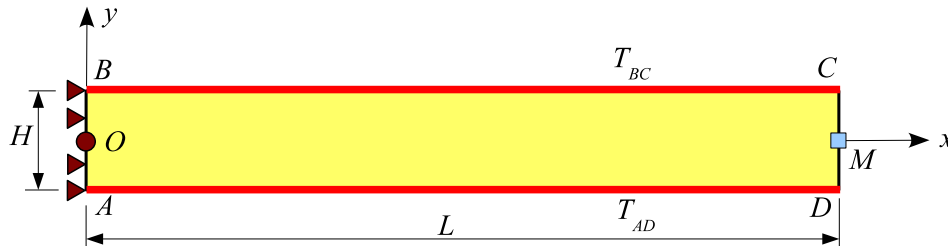
On obtient :

	Référence	RDM – Éléments finis
$u(r = R_i)$	-0.1200 mm	-0.1200 mm
$u(r = R_e)$	-0.1230 mm	-0.1230 mm
$u$ maximal	-0.1145 mm à $r = 136.28$ mm	-0.1145 mm à $r = 135.71$ mm
$\sigma_{rr}(r = R_i)$	0 MPa	-0.04 MPa
$\sigma_{rr}(r = R_e)$	-90 MPa	-90.00 MPa
$\sigma_{\theta\theta}(r = R_i)$	-240.00 MPa	-240.02 MPa
$\sigma_{\theta\theta}(r = R_e)$	-150.00 MPa	-150.00 MPa

## ELA\_7 : Déformations et contraintes d'origine thermique dans une poutre

Référence : *théorie des poutres*.

Données :



Considérons la poutre  $OM$  de longueur  $L$  et de section droite rectangulaire (hauteur  $H$ , épaisseur  $t$ ) représentée sur la figure ci-dessus.

Soient  $E$  et  $\nu$  les caractéristiques élastiques du matériau et  $\alpha$  son coefficient de dilatation.

Le déplacement horizontal de  $AB$  est nul. Le déplacement vertical du point  $O$  est nul.

La poutre est soumise à un gradient thermique : les températures des surfaces  $BC$  et  $AD$  sont respectivement égales à  $T_{BC}$  et  $T_{AD}$ . La température de référence (température de montage) est égale à  $T_O = 0.5(T_{BC} + T_{AD})$ .

On donne :

$$\begin{aligned} L &= 300 \text{ mm} , H = 30 \text{ mm} , t = 10 \text{ mm} \\ E &= 210000 \text{ MPa} , \nu = 0.3 , \alpha = 13 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ T_{BC} &= 50 \text{ } ^\circ\text{C} , T_{AD} = 30 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ d'où } T_O = 40 \text{ } ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

### Première étude :

Évaluer le déplacement vertical du point  $M$ .

### Deuxième étude :

On bloque le déplacement vertical du point  $M$ .

Évaluer l'action de liaison en  $M$  et la contrainte  $\sigma_{xx}$  en  $B$ .

### Modélisation :

Ajouter un point à mailler en  $M$ .

Discretiser la structure en  $\sim 600$  triangles à 6 nœuds.

Problème : contraintes planes.

**Résultats :**

Posons :  $\Delta T = \frac{T_{BC} - T_{AD}}{H}$

**Première étude :**– **Référence :**

Le déplacement vertical du point  $M$  est égal à :

$$v_M = -\frac{1}{2} \alpha \Delta T L^2 = -0.3900 \text{ mm}$$

– **Solution éléments finis :**

$$v_M = -0.3900 \text{ mm}$$

**Deuxième étude :**– **Référence :**

L'action de liaison en  $M$  est solution de l'équation :

$$F_{yM} \left( \frac{L^3}{3EI_z} + \frac{L}{GAk_y} \right) - \frac{1}{2} \alpha \Delta T L^2 = 0$$

avec

$$I_z = \frac{tH^3}{12} \quad , \quad A = tH \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad k_y = \frac{5}{6}$$

d'où  $F_{yM} = 203.17 \text{ N}$

La contrainte  $\sigma_{xx}$  en  $B$  est alors égale à :

$$\sigma_{xx} = -\frac{L F_{yM} H}{I_z} \frac{1}{2} = -40.63 \text{ MPa}$$

– **Solution éléments finis :**

$$F_{yM} = 203.0 \text{ N}$$

$$\sigma_{xx} = -40.94 \text{ MPa}$$

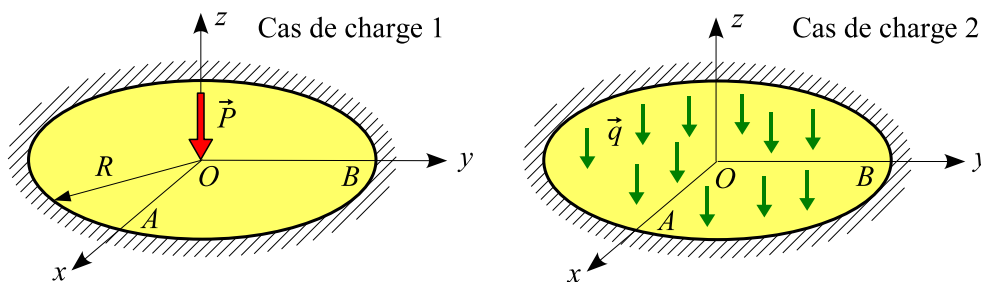
## Chapitre 2

# Flexion des plaques

### PLA\_1 : Flexion d'une plaque circulaire et encastree sur son contour

Référence : *solution analytique.*

Données :



Considérons une plaque circulaire de rayon  $R$ , d'épaisseur  $t$ , encastree sur son contour. Soient  $E$  et  $\nu$  les caractéristiques élastiques du matériau.

Le cisaillement transversal est négligé (hypothèse de Kirchhoff).

On donne :

$$R = 1 \text{ m} , t = 10 \text{ mm}$$
$$E = 200000 \text{ MPa} , \nu = 0.3$$

**Cas de charge 1** : la plaque porte en son centre une force d'intensité  $P = -5000 \text{ N}$ .

**Cas de charge 2** : la plaque porte sur toute sa surface une force uniformément répartie d'intensité  $q = -0.001 \text{ MPa}$  par unité de surface.

**Modélisation et calcul :**

Le problème étant symétrique par rapport aux plans  $x = 0$  et  $y = 0$ , il suffit de modéliser le quart  $OAB$  de la pièce.

Lancer le module Dessin et maillage

Fichier

**Bibliothèque**

Structure 40 avec :  $x_O = y_O = 0$  ,  $R = 1000$  mm (sans sous-domaines)

**Mailler (Delaunay)****Nombre d'éléments**

$\sim 400$

**Modifier localement la taille des éléments**

5 en  $O$

**Discrétiser la structure triangles à 3 nœuds****Fichier****Flexion des plaques****Matériau**

Module de Young = 200000 MPa , coefficient de Poisson = 0.3

**Épaisseur**

L'épaisseur est égale à 10 mm

**Liaisons**

Symétrie par rapport aux plans  $x = 0$  et  $y = 0$

La plaque est encastree sur l'arc

**Cas de charges**

Le point  $O$  porte la charge  $-1250$  N

(le quart de la plaque porte le quart de la charge)

**Cas de charges****Ajouter un cas de charges**

La plaque porte sur toute sa surface la charge  $-0.001$  MPa

**Calculer****Paramètres**

Le cisaillement transverse est négligé : modèle de Kirchhoff

**Calculer****Analyse statique**

Enregistrer les données et lancer le calcul

**Résultats :**

Posons :  $D = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)}$

**Cas de charge 1 :**

Référence :

$$w(O) = \frac{PR^2}{16\pi D}$$

$$M_{xx}(A) = -\frac{P}{4\pi} \quad , \quad M_{yy}(A) = -\frac{\nu P}{4\pi} \quad , \quad M_{xx}(O) = M_{yy}(O) = -\infty$$

On obtient :

	<b>Théorie (Kirchhoff)</b>	<b>Éléments finis (DKT)</b>
$w(O)$	-5.431 mm	-5.440 mm
$M_{xx}(A)$	398 N	402 N
$M_{yy}(A)$	119 N	121 N
$M_{xx}(O)$	$-\infty$	-2971 N
$M_{yy}(O)$	$-\infty$	-2957 N

**Cas de charge 2 :**

Référence :

$$w(O) = \frac{qPR^4}{64D}$$

$$M_{xx}(A) = -\frac{qR^2}{8} \quad , \quad M_{yy}(A) = -\frac{\nu qR^2}{8}$$

$$M_{xx}(O) = M_{yy}(O) = \frac{qR^2(1+\nu)}{16}$$

On obtient :

	<b>Référence</b>	<b>Éléments finis (DKT)</b>
$w(O)$	-0.8531 mm	-0.8551 mm
$M_{xx}(A)$	125.00 N	126,28 N
$M_{yy}(A)$	37.50 N	37,87 N
$M_{xx}(O)$	-81.25 N	-81.36 N
$M_{yy}(O)$	-81.25 N	-81.35 N

*Remarque* : si le cisaillement transversal est pris en compte (modèle de Mindlin), la flèche au centre est égale à :

$$w = w_K \left( 1 + 4.57 \left( \frac{t}{R} \right)^2 \right)$$

où  $w_K$  est la solution de Kirchhoff.

On obtient pour  $w/w_K$  :

$t$ en mm	<b>Référence</b>	<b>Éléments finis (DST)</b>
10	1.000	1.003
100	1.046	1.048
150	1.103	1.105
200	1.183	1.185

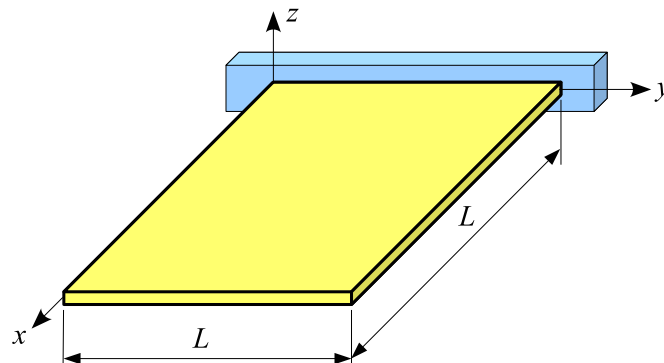
## PLA\_2 : Vibrations de flexion d'une plaque mince, carrée et encastrée sur un côté

Référence : R.D. BLEVINS, *Formula for natural frequency and mode shape*, Krieger, 1993, page 254.

### Données :

Considérons une plaque carrée de côté  $L$ , d'épaisseur  $t$ , encastrée sur l'un de ses côtés.

Soient  $E$  et  $\nu$  les caractéristiques élastiques du matériau et  $\rho$  sa masse volumique.



On donne :

$$\begin{aligned} L &= 1 \text{ m} , t = 10 \text{ mm} \\ E &= 200000 \text{ MPa} , \nu = 0.3 \\ \rho &= 8000 \text{ kg m}^{-3} \end{aligned}$$

Le cisaillement transversal est négligé (hypothèse de Kirchhoff).

**Problème** : étude des 6 premiers modes propres de la plaque.

**Modélisation et calcul** :

**Lancer le module Dessin et maillage**

**Fichier**

**Bibliothèque**

Structure 1,  $x_0 = y_0 = 0$  ,  $L = H = 1000$ , pas de sous-domaines

**Mailler par blocs**

La structure est discrétisée en 10 x 10 quadrangles à 4 nœuds

**Fichier**

**Flexion des plaques**

**Matériau**

Module de Young = 200000 MPa

Coefficient de Poisson = 0.3

Masse volumique = 8000 kg m<sup>-3</sup>

**Épaisseur**

$t = 10 \text{ mm}$

**Liaisons**

Encastrement sur un côté

**Calculer****Paramètres**

Le cisaillement transversal est négligé (éléments DKQ)

**Calculer****Analyse dynamique**

6 modes propres , méthode : itération sur sous-espace

Enregistrer les données et lancer le calcul

**Résultats :**– **Référence :**

$$\omega_n = B_n \sqrt{\frac{Et^2}{12\rho(1-\nu^2)}}$$

où  $n$  est le numéro du mode.

$n$	1	2	3	4	5	6
$B_n$	3.492	8.525	21.43	27.33	31.11	54.44

– **Solution éléments finis :** pulsations en radians/seconde :

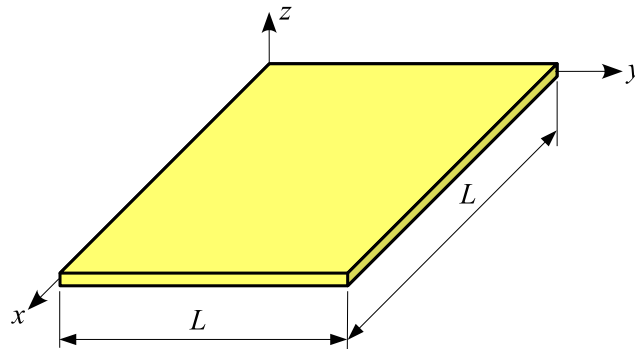
Mode	Référence	3 x 3 DKQ	5 x 5 DKQ	10 x 10 DKQ	30 x 30 DKQ
1	52.84	51.94	52.32	52.46	52.51
2	128.99	126.47	127.86	128.47	128.67
3	324.25	346.30	334.08	325.27	322.35
4	413.52	431.53	422.30	414.47	411.79
5	470.72	489.78	479.28	471.24	468.60
6	823.71	860.53	837.57	824.64	820.16

### PLA\_3 : Vibrations de flexion d'une plaque mince, carrée et libre

Référence : R.D. BLEVINS, *Formula for natural frequency and mode shape*, Krieger, 1993, p. 254.

#### Données :

Considérons une plaque carrée de côté  $L$ , d'épaisseur  $t$ . Soient  $E$  et  $\nu$  les caractéristiques élastiques du matériau et  $\rho$  sa masse volumique.



On donne :

$$L = 1 \text{ m} , t = 10 \text{ mm}$$

$$E = 200000 \text{ MPa} , \nu = 0.3 , \rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$$

Le cisaillement transversal est négligé (hypothèse de Kirchhoff).

Problème : étudier les 6 premiers modes propres élastiques de la plaque.

#### Modélisation :

Discrétiser la structure en quadrangles (maillage par blocs)

#### Calcul :

Introduire un décalage spectral égal à 10 Hz (il y a 3 modes rigides)

#### Résultats :

Référence :

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{Et^2}{12\rho(1-\nu^2)}}$$

avec

$$\lambda_i = 13.49, 19.79, 24.43, 35.02, 35.02, 61.53$$

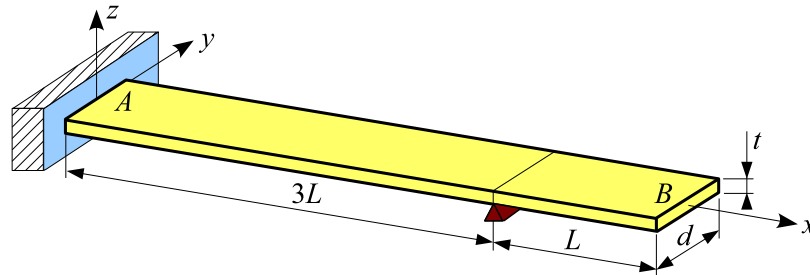
On obtient (fréquences en Hz) :

<b>Mode</b>	<b>Référence</b>	<b>3 x 3 DKQ</b>	<b>5 x 5 DKQ</b>	<b>10 x 10 DKQ</b>	<b>30 x 30 DKQ</b>
1	32.90	33.69	33.18	32.93	32.85
2	48.26	50.35	49.13	48.16	47.82
3	59.58	64.59	61.86	59.91	59.26
4	85.41	88.68	86.80	85.42	84.92
5	85.41	89.61	87.74	85.67	84.95
6	150.06	165.17	162.26	154.31	149.54

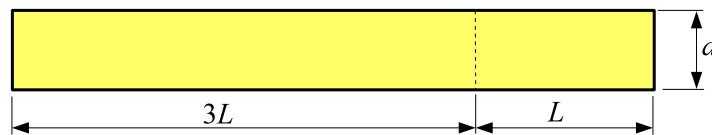
## PLA\_4 : Plaque ou poutre

Référence : *théorie des poutres*.

Données :



Considérons la poutre  $AB$  de longueur  $4L$  et de section droite rectangulaire représentée sur la figure.



Cette poutre est modélisée comme une plaque. Le cisaillement transversal est négligé (hypothèse de Kirchhoff).

Soient  $E$  et  $\nu$  les caractéristiques élastiques du matériau et  $\rho$  sa masse volumique.

La plaque est encastree en  $x = 0$  et repose sur un appui simple en  $x = 3L$ .

On donne :

$$L = 100 \text{ mm} , d = 30 \text{ mm} , t = 10 \text{ mm}$$

$$E = 200000 \text{ MPa} , \nu = 0.3 , \rho = 8000 \text{ kg/m}^3$$

Charges :

**Cas de charge 1** : la plaque porte le long de la ligne  $x = 4L$  une force verticale d'intensité  $p = -10 \text{ N/mm}$ .

**Cas de charge 2** : la plaque porte le long de la ligne  $x = 4L$  un couple d'intensité  $c = -100 \text{ N}$ .

**Cas de charge 3** : la plaque porte sur toute sa surface une force d'intensité  $q = -0.1 \text{ N/mm}^2$ .

**Cas de charge 4** : la plaque est soumise à son poids propre ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

**Modélisation :**

Ajouter un point à mailler en B.

Discrétiser la structure en  $\sim 600$  triangles à 3 nœuds.

**Résultats :**

– Référence (théorie des poutres) :

Le moment quadratique de la poutre par rapport à  $y$  est égal à :  $I_y = \frac{dt^3}{12} = 2500 \text{ mm}^4$ .

– Cas de charge 1 :

$$w_B = \frac{13pdL^3}{12EI_y} = -0.6500 \text{ mm}$$

– Cas de charge 1 :

$$w_B = \frac{-5cdL^2}{4EI_y} = 0.0750 \text{ mm}$$

– Cas de charge 1 :

$$w_B = \frac{-3qdL^4}{48EI_y} = 0.0375 \text{ mm}$$

– Cas de charge 1 :

$$w_B = \frac{3\rho gh d L^4}{48EI_y} = 3.00 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$$

– Solution éléments finis (plaque) :

– Cas de charge 1 :  $w_B = -0.6369 \text{ mm}$

– Cas de charge 1 :  $w_B = 0.0737 \text{ mm}$

– Cas de charge 1 :  $w_B = 0.0396 \text{ mm}$

– Cas de charge 1 :  $w_B = 3.17 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$

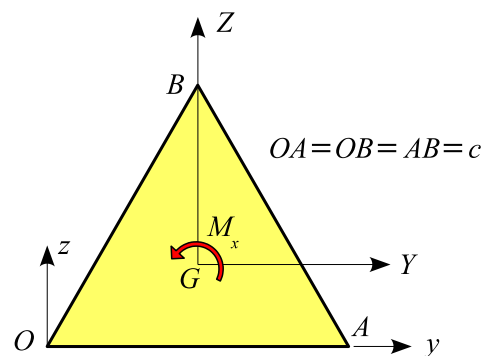
## Chapitre 3

# Section droite : caractéristiques et contraintes

### SEC\_1 : Triangle équilatéral

Référence : *solution analytique.*

Données :



- Géométrie : triangle équilatéral de côté  $c = 10$  mm
- Force intérieure : moment de torsion  $M_x = 1000$  N.mm

**Modélisation et calcul :**

Les étapes de la modélisation sont :

**Lancer le module Dessin et maillage**

**Nouvelle étude**

Cadre de travail : origine =  $(0, 0)$  , longueur = 20 , hauteur = 20

**Point**

Point  $O = (0, 0)$  mm

Point  $A = (10, 0)$  mm

Le point  $B$  est défini par ses coordonnées polaires  $(O, 60^\circ, 10$  mm)

**Segment**

Dessiner le triangle

Mailler (Delaunay)

Nombre d'éléments

~ 200

Discrétiser la structure triangles à 6 nœuds

Fichier

Section droite

Calculer

Analyse statique

Enregistrer les données et lancer le calcul

Résultats :

– Référence :

Centre de gravité  $G$  :

$$x_G = \frac{1}{2}c \quad , \quad y_G = \frac{\sqrt{3}}{6}c$$

Constante de torsion de Saint Venant :

$$J = \frac{\sqrt{3}}{80}c^4$$

Contrainte de cisaillement maximale :

$$\tau_{\max} = 20 \frac{M_x}{c^3}$$

– Solution éléments finis :

	Référence	RDM – Éléments finis
$x_G$	5 mm	5 mm
$y_G$	2.887 mm	2.887 mm
$J$	216.506 mm <sup>4</sup>	216.517 mm <sup>4</sup>
$\tau_{\max}$	20.00 MPa	19.99 MPa

# Chapitre 4

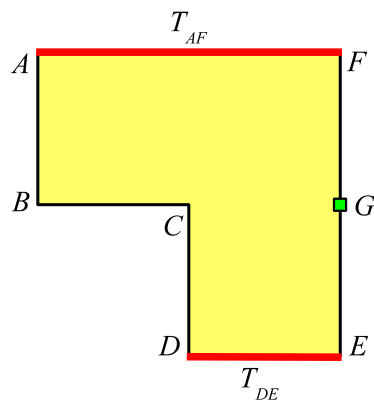
## Thermique

### 4.1 Problèmes stationnaires

#### TS\_L\_1 : Températures imposées

Référence : *Guide de validation des progiciels de calcul de structures*, AFNOR, 1990, page 276.

Données :



– Géométrie :

$$AF = EF = 800 \text{ mm}$$

$$BC = CD = 400 \text{ mm}$$

$$\text{épaisseur} = 1 \text{ mm}$$

– Propriété du matériau :

$$\text{coefficient de conductivité} = 1 \text{ W}/(\text{m.K})$$

– Conditions aux limites :

$$\text{segment } AF : \text{température } T_{AF} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\text{segment } DE : \text{température } T_{DE} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$$

**Modélisation :**

Les étapes de la modélisation sont :

**Lancer le module Dessin-Maillage****Fichier****Bibliothèque**

Structure 50 :  $x_O = y_O = 0$  ,  $L = H = 800$  ,  $a = b = 400$

**Points**

Ajouter un point au milieu de  $EF$

**Points à mailler**

Transformer le point  $G$  en point à mailler

**Mailler (Delaunay)****Nombre d'éléments**

$\sim 400$

**Discrétiser la structure en triangles à 6 nœuds****Fichier****Élasticité/Thermique****Problème : Thermique – problème plan****Matériau**

Coefficient de conduction :  $1 \text{ W}/(\text{m.K})$

**Épaisseur**

Épaisseur :  $1 \text{ mm}$

**Charges thermiques**

Température imposée :  $T_{AF} = 10 \text{ °C}$

Température imposée :  $T_{DE} = 0 \text{ °C}$

**Calculer**

Enregistrer les données et lancer le calcul

**Résultats :**

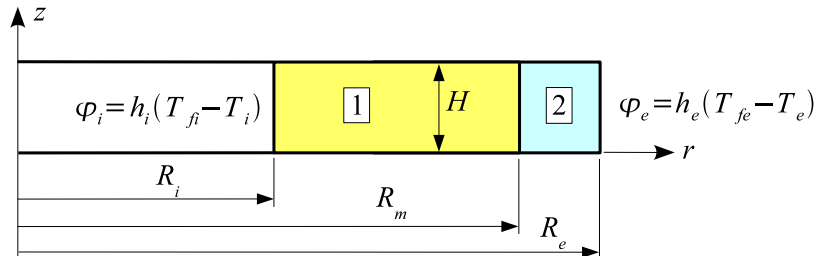
Températures obtenues (en °C) :

	Référence	RDM – Éléments finis
$T_C$	6.667	6.667
$T_B$	9.009	9.003
$T_G$	5.495	5.499

### 4.1.1 TS\_L\_2 : Convection

Référence : *solution analytique.*

Données :



– **Géométrie :**

Cylindre creux d'axe  $z$  :

$$R_i = 100 \text{ mm} , R_m = 250 \text{ mm} , R_e = 300 \text{ mm} , H = 20 \text{ mm}$$

– **Conductivité thermique :**

Matériau [1] – coefficient de conductivité :  $\lambda_1 = 100 \text{ W}/(\text{m.K})$

Matériau [2] – coefficient de conductivité :  $\lambda_2 = 50 \text{ W}/(\text{m.K})$

– **Conditions aux limites :**

Convection sur la face intérieure :

coefficient  $h_i = 120 \text{ W}/(\text{m}^2.\text{K})$ , température du fluide  $T_{fi} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$

Convection sur la face extérieure :

coefficient  $h_e = 50 \text{ W}/(\text{m}^2.\text{K})$ , température du fluide  $T_{fe} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$

**Modélisation :**

Les étapes de la modélisation sont :

**Lancer le module Dessin-Maillage**

**Fichier**

**Nouvelle étude**

Ébauche

Cadre de travail (en mm) : origine  $x_O = y_O = 0$  , longueur = 300 , hauteur = 20

**Horizontale**

Ajouter deux droites horizontales à  $y = 0$  et  $y = 20$

**Verticale**

Ajouter trois droites verticales à  $x = 100$  ,  $x = 250$  et  $x = 300$

**Fin ébauche**

**Modifier le trait du segment intérieur**

Trait plein  $\rightarrow$  trait pointillé

**Mailler (Delaunay)****Nombre d'éléments**

~ 300

**Discrétiser la structure en triangles à 6 nœuds****Fichier****Élasticité/Thermique****Analyse thermique – problème axisymétrique****Matériaux**

Créer le deuxième groupe de matériau : modifier la couleur courante et attribuer cette couleur à l'un des sous-domaines

Définir le matériau 1 : coefficient de conductivité = 100 W/(m.K)

Définir le matériau 2 : coefficient de conductivité = 50 W/(m.K)

**Charges thermiques**

Convection sur la face intérieure :

coefficient de convection = 120 W/(m<sup>2</sup>.K)

température du fluide = 100 °C

Convection sur la face extérieure :

coefficient de convection = 50 W/(m<sup>2</sup>.K)

température du fluide = 20 °C

**Calculer**

Enregistrer les données et lancer le calcul

**Résultats :**

Les températures  $T_i$ ,  $T_m$  et  $T_e$  sont les solutions de l'équation :

$$\begin{bmatrix} k_1 + R_i h_i & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + R_e h_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_m \\ T_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_i h_i T_{fi} \\ 0 \\ R_e h_e T_{fe} \end{Bmatrix}$$

avec :

$$k_1 = \frac{\lambda_1}{\ln \frac{R_m}{R_i}} \quad , \quad k_2 = \frac{\lambda_2}{\ln \frac{R_e}{R_m}}$$

Les densités de flux  $\varphi_{ri}$  et  $\varphi_{rm}$  et  $\varphi_{re}$  sur les faces  $i$ ,  $m$  et  $e$  dans la direction  $r$  sont :

$$\varphi_{ri} = h_i (T_{fi} - T_i) \quad , \quad \varphi_{rm} = \frac{k_1}{R_m} (T_i - T_m) \quad , \quad \varphi_{re} = h_e (T_e - T_{fe})$$

On obtient :

	<b>Référence</b>	<b>RDM – Éléments finis</b>
$T_i$	59.052 °C	59.052 °C
$T_m$	54.550 °C	54.550 °C
$T_e$	52.758 °C	52.758 °C
$\varphi_{ri}$	4913.72 W/m <sup>2</sup>	4912.05 W/m <sup>2</sup>
$\varphi_{rm}$	1965.49 W/m <sup>2</sup>	1965.36 W/m <sup>2</sup>
$\varphi_{re}$	1637.91 W/m <sup>2</sup>	1637.84 W/m <sup>2</sup>

### 4.1.2 TS\_L\_3 : Températures imposées – facteur de forme

**Référence :** B. EYGLUNENT, *Manuel de thermique*, Hermès, 2000, page 117.

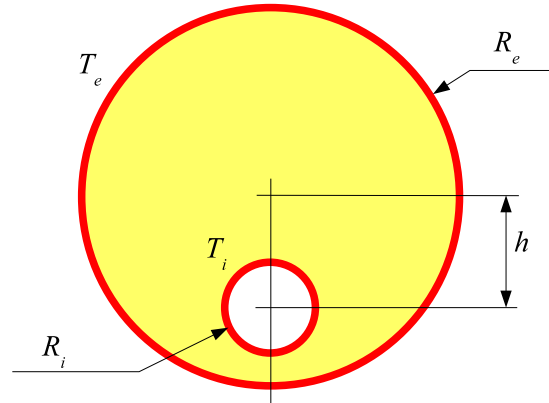
**Données :**

**Géométrie :**

Cylindres d'axes parallèles, de longueur  $L$ , de rayon  $R_e$  et  $R_i$  et excentrés de  $h$ .

On donne :

$$R_e = 200 \text{ mm} , R_i = 50 \text{ mm} \\ h = 100 \text{ mm} , L = 1000 \text{ mm}$$



**Conductivité thermique :**

$$\lambda = 50 \text{ W/(m.K)}$$

**Conditions aux limites :**

$$\text{Face extérieure : } T_e = 0 \text{ °C} \\ \text{Face intérieure : } T_i = 100 \text{ °C}$$

**Modélisation :**

Densifier le maillage le long du cercle intérieur (coefficient = 5).  
Mailler la structure en  $\sim 300$  triangles à 6 nœuds à bords curvilignes  
Problème thermique plan : épaisseur =  $L$

**Résultats :**

Les flux thermiques  $\Phi_i$  et  $\Phi_e$  sur les faces intérieure et extérieure sont :

$$\Phi_i = -\Phi_e = K \lambda (T_i - T_e) \quad \text{où} \quad K = \frac{2 \pi L}{\cosh^{-1} \left( \frac{R_e^2 + R_i^2 - h^2}{2 R_e R_i} \right)}$$

est le facteur de forme (il s'exprime en m).

*Rappel :*  $\cosh^{-1}(x) = \arg \cosh(x)$ .

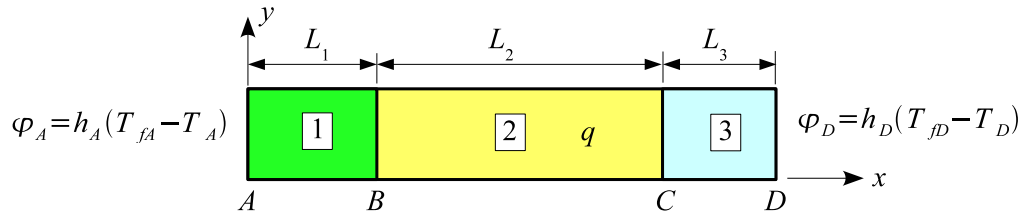
On obtient :

	Référence	RDM – Éléments finis
$\Phi_i$	29451 W	29383 W
$\Phi_e$	-29451 W	-29400 W
$K$	5.8901 m	5.8766 m , 5.880 m

### 4.1.3 TS\_L\_4 : Convection et source volumique

**Référence :** *solution analytique.*

**Données :**



La structure plane représentée sur la figure est constituée de trois domaines : [1] , [2] et [3].

On donne :

$$L_1 = 50 \text{ mm} , L_2 = 300 \text{ mm} , L_3 = 40 \text{ mm}$$

$$H = 20 \text{ mm}$$

$$\text{épaisseur} : t = 10 \text{ mm}$$

**Conductivité thermique :**

$$\text{Domaine [1]} : \lambda_1 = 1 \text{ W/(m.K)}$$

$$\text{Domaine [2]} : \lambda_2 = 3 \text{ W/(m.K)}$$

$$\text{Domaine [3]} : \lambda_3 = 10 \text{ W/(m.K)}$$

**Conditions aux limites :**

Convection sur la face A :  
coefficient  $h_A = 120 \text{ W/(m}^2\text{.K)}$ , température du fluide  $T_{fA} = 30 \text{ }^\circ\text{C}$

Convection sur la face D :  
coefficient  $h_D = 200 \text{ W/(m}^2\text{.K)}$ , température du fluide  $T_{fD} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$

Source volumique dans le domaine [2] :  $q = 3000 \text{ W/m}^3$

**Modélisation :**

Mailler la structure en  $\sim 400$  triangles à 6 nœuds.

**Résultats :**

Les températures  $T_A$ ,  $T_B$ ,  $T_C$  et  $T_D$  sont les solutions de l'équation :

$$\begin{bmatrix} k_1 + h_A & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & k_3 + h_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_A \\ T_B \\ T_C \\ T_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_A T_{Ae} \\ q L_2/2 \\ q L_2/2 \\ h_D T_{De} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad k_i = \frac{\lambda_i}{L_i}$$

Dans le domaine [2], la température est égale à :

$$T(\xi) = T_B (1 - \xi) + T_C \xi + \frac{qL_2^2}{2\lambda_2} \xi (1 - \xi) \quad \text{où} \quad \xi = \frac{x - L_1}{L_2}$$

La température est maximale dans le domaine [2] à l'abscisse  $x_m$  égale à :

$$x_m = L_1 + \frac{L_2}{2} + \frac{\lambda_2}{qL_2} (T_C - T_B)$$

Soit  $\varphi_x$  la densité de flux suivant l'axe  $x$ .

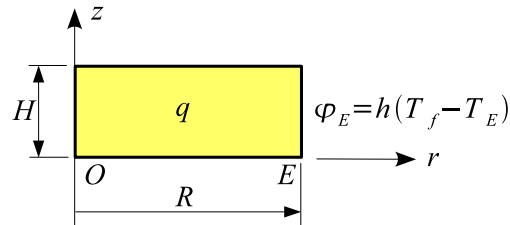
On obtient :

	Référence	RDM – Éléments finis
$T_A$	31.648 °C	31.648 °C
$T_B$	41.539 °C	41.539 °C
$T_C$	16.320 °C	16.320 °C
$T_D$	13.511 °C	13.511 °C
$\varphi_{xA} = \varphi_{xB}$	-197.809 W/m <sup>2</sup>	-197.809 W/m <sup>2</sup>
$\varphi_{xC} = \varphi_{xD}$	702.191 W/m <sup>2</sup>	702.191 W/m <sup>2</sup>
Température maximale	43.713 °C à $x = 115.937$ mm	43.71 °C à $x = 115.5$ mm

#### 4.1.4 TS\_L\_5 : Convection et source volumique

**Référence :** *solution analytique.*

**Données :**



**Géométrie :**

cylindre plein d'axe  $z$  :

Rayon :  $R = 40$  mm

Hauteur :  $H = 10$  mm

**Conductivité thermique :**  $\lambda = 200$  W/(m.K)

**Conditions aux limites :**

Source volumique d'intensité :  $q = 10000$  W/m<sup>3</sup>

Convection sur la face  $E$  :

coefficient :  $h = 20$  W/(m<sup>2</sup>.K), température du fluide :  $T_f = 20$  °C

**Modélisation :** mailler la structure en  $\sim 300$  triangles à 6 nœuds.

**Résultats :**

La densité de flux  $\varphi_E$  sur la face extérieure du cylindre est égale à :

$$\varphi_E = -q \frac{R}{2} = h(T_f - T_E)$$

Les températures  $T_E$  et  $T_O$  à l'extérieur et au centre du cylindre sont respectivement égales à :

$$T_E = T_f + \frac{qR}{2h} \quad , \quad T_O = T_E + \frac{qR^2}{4\lambda}$$

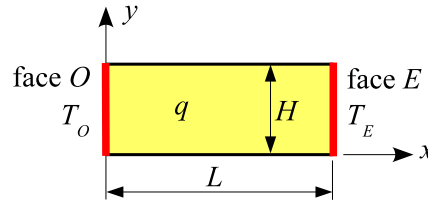
On obtient :

	Référence	RDM – Éléments finis
$T_O$	30.020 °C	30.020 °C
$T_E$	30.000 °C	30.000 °C
$\varphi_E$	-200.00 W/m <sup>2</sup>	-200 W/m <sup>2</sup>

#### 4.1.5 TS\_L\_6 : Températures imposées et source volumique

Référence : *solution analytique.*

Données :



Géométrie : rectangle :

Longueur :  $L = 100$  mm

Hauteur :  $H = 10$  mm

Épaisseur  $t = 10$  mm

Conductivité thermique :  $\lambda = 20$  W/(m.K)

Conditions aux limites :

Source volumique d'intensité :  $q = 200000$  W/m<sup>3</sup>

Température imposée sur la face  $O$  :  $T_O = 10$  °C

Température imposée sur la face  $E$  :  $T_E = 30$  °C

Modélisation : mailler la structure en  $\sim 300$  triangles à 6 nœuds.

Résultats :

Le champ de températures  $T(x)$  et la densité de flux  $\varphi_x(x)$  ont pour expression :

$$T(x) = T_O + \frac{x}{L} (T_E - T_O) + \frac{q x}{2\lambda} (L - x)$$

$$\varphi_x(x) = \frac{\lambda}{L} (T_O - T_E) + q \left( x - \frac{L}{2} \right)$$

d'où :

$$\varphi_O = \varphi_x(0) = \frac{\lambda}{L} (T_O - T_E) - \frac{qL}{2}, \quad \varphi_E = -\varphi_x(L) = \frac{\lambda}{L} (T_E - T_O) - \frac{qL}{2}$$

La température est maximale à l'abscisse :

$$x = \frac{L}{2} + \frac{\lambda}{qL} (T_E - T_O)$$

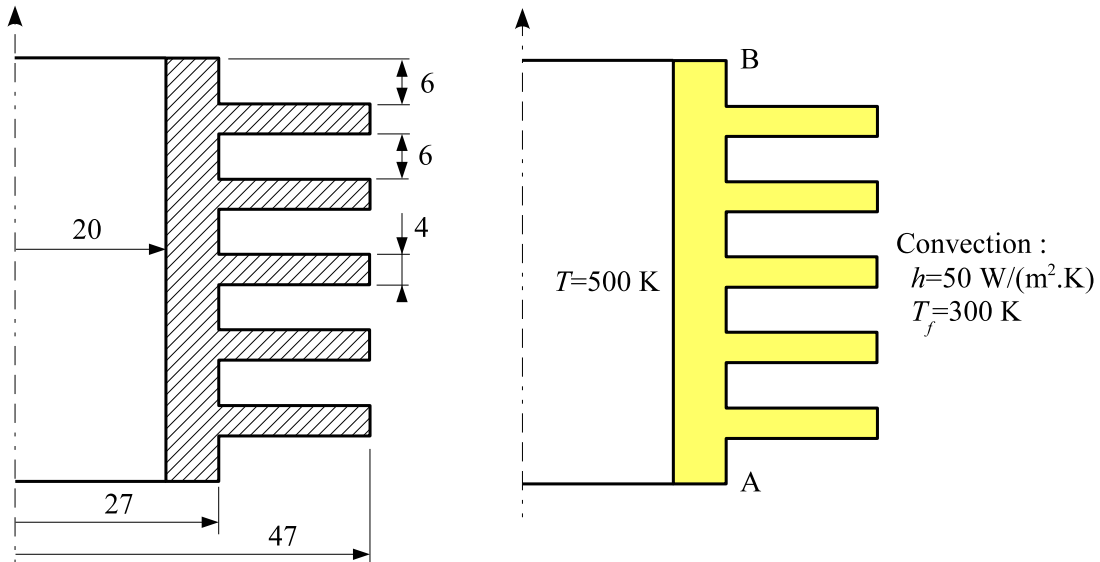
On obtient :

	Référence	RDM – Éléments finis
Température maximale	34.50 °C à $x = 70.00$ mm	34.50 °C à $x = 70.00$ mm
$\varphi_O$	-14000 W/m <sup>2</sup>	-14000 W/m <sup>2</sup>
$\varphi_E$	-6000 W/m <sup>2</sup>	-6000 W/m <sup>2</sup>

### 4.1.6 TS\_L\_7 : Température imposée et convection

#### Données :

Les dimensions sont en mm.



#### Conductivité thermique :

$$\lambda = 200 \text{ W}/(\text{m.K})$$

#### Conditions aux limites :

Température imposée sur la paroi intérieure :  $T = 500 \text{ K}$

Convection sur la paroi extérieure (entre A et B) :  $h = 50 \text{ W}/(\text{m}^2.\text{K})$  ,  $T_f = 300 \text{ K}$

#### Modélisation :

Discrétiser la structure en  $\sim 1000$  triangles à 6 nœuds.

Problème de révolution d'axe  $z$

#### Résultats :

La température minimale dans les ailettes est : 490 K.

Le flux de chaleur qui traverse le mur est égal à 562.57 W (commande **Flux entrant**) d'où le flux moyen par unité de surface :

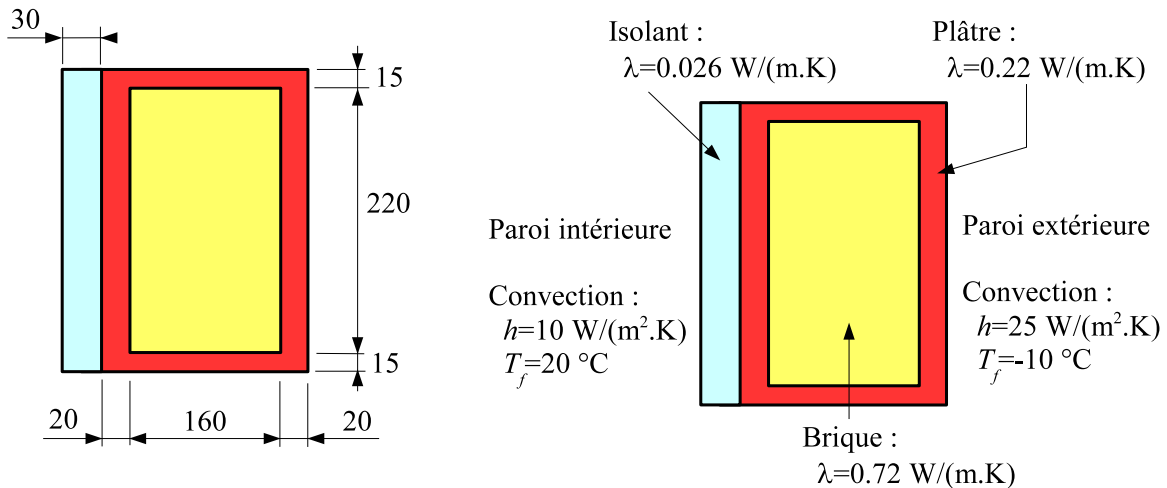
$$\frac{562.57}{2 \times \pi \times 0.02 \times 0.056} = 79943 \text{ W}/\text{m}^2$$

#### 4.1.7 TS\_L\_8 : Convection

**Référence :** Y. A. CENGEL, *Heat transfer – A practical approach*, McGraw-Hill, 1988, pages 146-148.

**Données :**

Les dimensions sont en mm.



**Conductivités thermiques :**

Brique :  $\lambda = 0.72 \text{ W/(m.K)}$

Plâtre :  $\lambda = 0.22 \text{ W/(m.K)}$

Isolant :  $\lambda = 0.026 \text{ W/(m.K)}$

**Charges thermiques :**

Convection sur la paroi extérieure :  $h = 25 \text{ W/(m}^2\text{.K)}$ ,  $T_f = -10 \text{ }^\circ\text{C}$

Convection sur la paroi intérieure :  $h = 10 \text{ W/(m}^2\text{.K)}$ ,  $T_f = 20 \text{ }^\circ\text{C}$

**Modélisation :**

Discrétiser la structure en  $\sim 1000$  triangles à 6 nœuds.

Problème plan : épaisseur = 1000 mm

**Résultats :**

Le flux de chaleur qui traverse le mur est égal à 4.43 W (commande **Flux entrant**) d'où le flux moyen par unité de surface :

$$\frac{4.43}{0.25 \times 1} = 17.72 \text{ W/m}^2 \quad (\text{référence : } 17.5 \text{ W/m}^2)$$

## 4.1.8 TS\_NL\_1 : Convection et rayonnement

Référence : *solution analytique.*

Données :

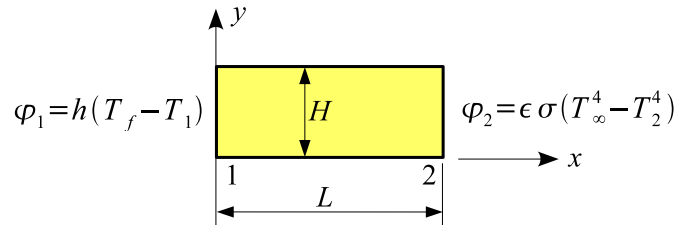
Géométrie :

Rectangle :

Longueur :  $L = 300$  mm

Hauteur :  $H = 50$  mm

Épaisseur :  $t = 20$  mm



Conductivité thermique :  $\lambda = 1$  W/(m.K)

Conditions aux limites :

Convection sur la face 1 : coefficient :  $h = 30$  W/(m<sup>2</sup>.K), température du fluide  $T_f = 20$  °C

Rayonnement sur la face 2 : émissivité :  $\varepsilon = 0.8$  , température extérieure  $T_\infty = 500$  °C

Modélisation : mailler la structure en  $\sim 300$  triangles à 6 nœuds.

Résultats :

Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les densités de flux sur les faces 1 et 2. Les températures  $T_1$  et  $T_2$  (exprimées en Kelvin) sur les faces 1 et 2 sont les solutions de l'équation :

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h(T_f - T_1) \\ \varepsilon \sigma (T_\infty^4 - T_2^4) \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad C = \frac{\lambda}{L}$$

Cette équation est résolue numériquement par la méthode de Newton-Raphson. La matrice tangente de cette équation est :

$$[K_t] = C \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 4\varepsilon\sigma T_2^3 \end{bmatrix}$$

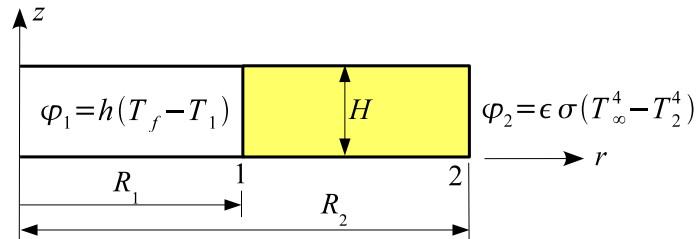
On obtient :

	Référence	RDM – Éléments finis
$T_1$	66.288 °C	66.288 °C
$T_2$	482.880 °C	482.880 °C
$\varphi_1 = -\varphi_2$	-1388.64 W/m <sup>2</sup>	-1388.64 W/m <sup>2</sup>

### 4.1.9 TS\_NL\_2 : Convection et rayonnement

**Référence :** *solution analytique.*

**Données :**



**Géométrie :** cylindre creux d'axe  $z$

Rayon intérieur :  $R_1 = 200$  mm

Rayon extérieur :  $R_2 = 400$  mm

Hauteur :  $H = 10$  mm

**Conductivité thermique :**  $\lambda = 40$  W/(m.K)

**Conditions aux limites :**

Convection sur la face 1 : coefficient :  $h = 120$  W/(m<sup>2</sup>.K), température du fluide  $T_f = 20$  °C

Rayonnement sur la face 2 : émissivité :  $\epsilon = 0.6$  , température extérieure  $T_\infty = 500$  °C

**Modélisation :** mailler la structure en  $\sim 300$  triangles à 6 nœuds.

**Résultats :**

Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les densités de flux sur les faces 1 et 2. Les températures  $T_1$  et  $T_2$  (exprimées en Kelvin) sur les faces 1 et 2 sont les solutions de l'équation :

$$\begin{Bmatrix} R_1 \varphi_1 \\ R_2 \varphi_2 \end{Bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 h (T_f - T_1) \\ R_2 \epsilon \sigma (T_\infty^4 - T_2^4) \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad C = \frac{\lambda}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Cette équation est résolue numériquement par la méthode de Newton-Raphson. La matrice tangente de cette équation est :

$$[K_t] = C \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 h & 0 \\ 0 & 4 R_2 \epsilon \sigma T_2^3 \end{bmatrix}$$

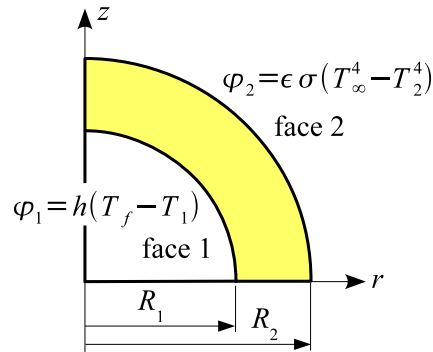
On obtient :

	Référence	RDM – Éléments finis
$T_1$	180.854 °C	180.854 °C
$T_2$	247.752 °C	247.752 °C
$\varphi_1$	-19302.51 W/m <sup>2</sup>	-19301.62 W/m <sup>2</sup>
$\varphi_2$	9651.25 W/m <sup>2</sup>	9651.15 W/m <sup>2</sup>

#### 4.1.10 TS\_NL\_3 : Convection et rayonnement

Référence : *solution analytique.*

Données :



Géométrie : sphère creuse

Rayon intérieur :  $R_1 = 300$  mm

Rayon extérieur :  $R_2 = 400$  mm

Conductivité thermique :  $\lambda = 40$  W/(m.K)

Conditions aux limites :

Convection sur la face 1 : coefficient :  $h = 140$  W/(m<sup>2</sup>.K), température du fluide  $T_f = -20$  °C

Rayonnement sur la face 2 : émissivité :  $\varepsilon = 0.6$  , température extérieure  $T_\infty = 500$  °C

Modélisation : modéliser la moitié d'une section méridienne de la sphère puis discrétiser la structure en  $\sim 300$  triangles à 6 nœuds à bords curvilignes.

Résultats :

Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les densités de flux sur les faces 1 et 2. Les températures  $T_1$  et  $T_2$  (exprimées en Kelvin) sur les faces 1 et 2 sont les solutions de l'équation :

$$\begin{Bmatrix} R_1^2 \varphi_1 \\ R_2^2 \varphi_2 \end{Bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1^2 h (T_f - T_1) \\ R_2^2 \varepsilon \sigma (T_\infty^4 - T_2^4) \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad C = \frac{\lambda}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

Cette équation est résolue numériquement par la méthode de Newton-Raphson. La matrice tangente de cette équation est :

$$[K_t] = C \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1^2 h & 0 \\ 0 & 4 R_2^2 \varepsilon \sigma T_2^3 \end{bmatrix}$$

On obtient :

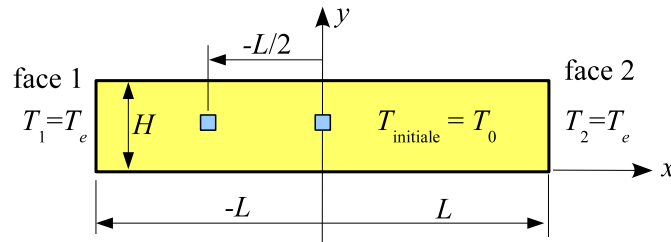
	Référence	RDM – Éléments finis
$T_1$	119.664 °C	119.664 °C
$T_2$	156.326 °C	156.326 °C
$\varphi_1$	-19552.97 W/m <sup>2</sup>	-19513.77 W/m <sup>2</sup>
$\varphi_2$	10998.55 W/m <sup>2</sup>	10989.82 W/m <sup>2</sup>

## 4.2 Problèmes transitoires

### 4.2.1 TT\_L\_1 : Plaque soumise à un choc thermique

Référence : *solution analytique.*

Données :



Géométrie : rectangle

Longueur :  $2L = 50 \text{ mm}$

Hauteur :  $H = 2 \text{ mm}$

Épaisseur :  $t = 1 \text{ mm}$

Matériau :

Conductivité :  $\lambda = 50 \text{ W/(m.K)}$

Masse volumique :  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

Capacité thermique massique :  $c_P = 450 \text{ J/(kg.K)}$

Condition initiale :

La température est uniforme dans la structure et égale à :  $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$

Remarque : il suffit d'imposer cette température en un point

Conditions aux limites :

Température imposée sur les faces 1 et 2 :  $T_1 = T_2 = T_e = 100 \text{ }^\circ\text{C}$

Modélisation :

Ajouter un point à mailler au centre de la pièce et à  $x = -0.0125 \text{ mm}$

Mailler la structure en  $\sim 300$  triangles à 6 nœuds

Durée du chargement = 60 s

nombre de pas de temps = 60

$\alpha = 0.667$

**Résultats :**

Le champ de températures est égal à :

$$\frac{T(x;t) - T_e}{T_0 - T_e} = \sum_{n=1,3,5,\dots} C_n \cos(\omega_n x) \exp(-\omega_n^2 a t)$$

où :

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_P} \quad , \quad \omega_n = \frac{n\pi}{2L} \quad , \quad C_n = \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

La température (en °C) au centre est égale à :

Temps (s)	Référence	RDM – Éléments finis
2	20.15	20.47
4	23.07	23.45
6	28.94	29.04
8	35.64	35.53
10	42.17	41.95
20	66.92	66.59
30	81.15	80.86
60	96.51	96.40

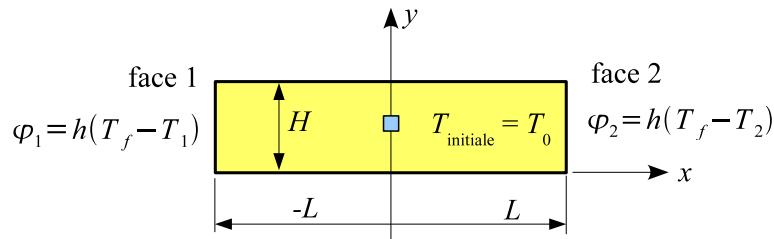
La température (en °C) à  $x = -0.0125$  mm est égale à :

Temps (s)	Référence	RDM – Éléments finis
2	27.82	27.36
4	39.37	38.86
6	47.45	47.06
8	53.65	53.35
10	58.80	58.54
20	76.61	76.37
30	86.67	86.47
60	97.53	97.46

### 4.2.2 TT\_L\_2 : Plaque et convection

Référence : *solution analytique.*

Données :



Géométrie : rectangle

Longueur :  $2L = 200$  mm

Hauteur :  $H = 5$  mm

Épaisseur :  $t = 1$  mm

Matériau :

Conductivité :  $\lambda = 50$  W/(m.K)

Masse volumique :  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>

Capacité thermique massique :  $c_P = 450$  J/(kg.K)

Condition initiale :

La température est uniforme dans la structure et égale à :  $T_0 = 20$  °C

Remarque : il suffit d'imposer cette température en un point

Conditions aux limites :

Convection sur les faces 1 et 2 :

coefficient  $h = 200$  W/(m<sup>2</sup>.K), température du fluide  $T_f = 500$  °C

Modélisation :

Ajouter un point à mailler au centre de la plaque

Mailler la structure en  $\sim 300$  triangles à 6 nœuds

Durée du chargement = 26 min 40 s

nombre de pas de temps = 120

$\alpha = 0.667$

**Résultats :**

Le champ de températures est égal à :

$$\frac{T(x;t) - T_f}{T_0 - T_f} = \sum_{n=1,2,3,\dots} C_n \cos(\omega_n x) \exp(-\omega_n^2 a t)$$

où :

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_P} \quad , \quad C_n = \frac{2 \sin \xi_n}{\xi_n + \sin \xi_n \cos \xi_n} \quad , \quad \omega_n = \frac{\xi_n}{L}$$

Les coefficients  $\xi_n$  sont les solutions de l'équation :

$$\xi_n \tan \xi_n = \frac{h L}{\lambda}$$

On obtient :

Température (en °C) au centre de la plaque :

Temps (s)	Référence	RDM – Éléments finis
40	20.11	20.27
80	22.26	22.58
120	27.37	27.64
200	42.25	42.36
400	84.50	84.42
600	124.07	123.95
800	159.93	159.78
1600	272.29	272.09

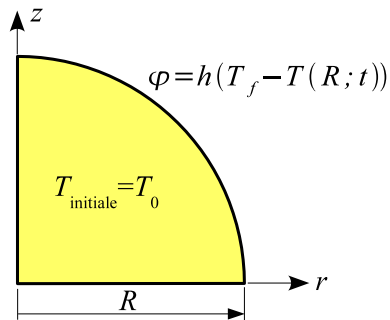
Température (en °C) à la surface de la plaque :

Temps (s)	Référence	RDM – Éléments finis
40	67.63	67.58
80	85.20	84.73
120	97.95	97.61
200	117.44	117.25
400	155.35	155.26
600	188.30	188.19
800	218.04	217.91
1600	311.20	311.03

### 4.2.3 TT\_L\_3 : Sphère et convection

Référence : *solution analytique.*

Données :



Géométrie :

Sphère pleine de rayon :  $R = 40$  mm

Matériau :

Conductivité :  $\lambda = 50$  W/(m.K)

Masse volumique :  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>

Capacité thermique massique :  $c_P = 450$  J/(kg.K)

Condition initiale :

La température est uniforme dans la structure et égale à :  $T_0 = (x, 0) = 20$  °C

Remarque : il suffit d'imposer cette température en un point

Conditions aux limites :

Convection sur la face extérieure :

coefficient :  $h = 200$  W/(m<sup>2</sup>.K), température du fluide :  $T_f = 1000$  °C

Modélisation :

Modéliser la moitié d'une section méridienne de la sphère

Mailler la structure en  $\sim 300$  triangles à 6 nœuds à bords curvilignes

Durée du chargement = 6 min 40 s

Nombre de pas de temps = 120

$\alpha = 0.667$

**Résultats :**

Le champ de températures est égal à :

$$\frac{T(r;t) - T_f}{T_0 - T_f} = \sum_{n=1,2,3,\dots} C_n \frac{\sin(\omega_n r)}{\omega_n r} \exp(-\omega_n^2 a t)$$

où :

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_P} \quad , \quad C_n = 2 \frac{\sin \xi_n - \xi_n \cos \xi_n}{\xi_n - \sin \xi_n \cos \xi_n} \quad , \quad \omega_n = \frac{\xi_n}{R}$$

Les coefficients  $\xi_n$  sont les solutions de l'équation :

$$1 - \frac{\xi_n}{\operatorname{tg} \xi_n} = \frac{h R}{\lambda}$$

On obtient :

Température (en °C) au centre de la sphère :

Temps (s)	Référence	RDM – Éléments finis
10	26.32	27.69
20	56.88	57.23
40	130.16	129.88
60	199.23	198.79
100	321.42	320.79
150	448.28	447.51
200	551.42	550.58
400	803.79	803.24

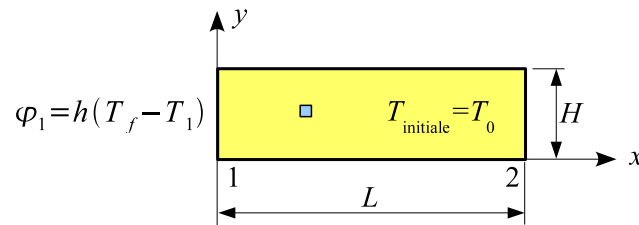
Température (en °C) à la surface de la sphère :

Temps (s)	Référence	RDM – Éléments finis
10	87.16	87.23
20	126.18	125.86
40	195.96	195.65
60	259.85	259.43
100	372.79	372.20
150	490.05	489.32
200	585.38	584.60
400	818.82	818.13

#### 4.2.4 TT\_L\_4 : Milieu semi-infini et convection

Référence : *solution analytique.*

Données :



Géométrie : rectangle

Longueur :  $L = 250$  mm

Hauteur :  $H = 5$  mm

Épaisseur :  $t = 1$  mm

Matériau :

Conductivité :  $\lambda = 50$  W/(m.K)

Masse volumique :  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>

Capacité thermique massique :  $c_P = 450$  J/(kg.K)

Condition initiale :

La température est uniforme dans la structure et égale à :  $T_0 = 20$  °C

Remarque : il suffit d'imposer cette température en un point

Conditions aux limites :

Convection sur la face 1 :

coefficient  $h = 100$  W/(m<sup>2</sup>.K), température du fluide  $T_f = 500$  °C

Modélisation :

Ajouter un point à mailler à  $x = 50$  mm

Mailler la structure en  $\sim 300$  triangles à 6 nœuds

Durée du chargement = 2 min

Nombre de pas de temps = 120

$\alpha = 0.667$

**Résultats :**

Le champ de températures est égal à :

$$\frac{T(x; t) - T_f}{T_0 - T_f} = \operatorname{erfc}(u) - \operatorname{erfc}(u + v) e^{\frac{hx}{\lambda}} e^{v^2}$$

où :

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_P} \quad , \quad u = \frac{x}{2\sqrt{at}} \quad , \quad v = \frac{h\sqrt{at}}{\lambda}$$

$$\operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u)$$

où

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\xi^2} d\xi$$

est la fonction « erreur ».

Au bout de deux minutes la température sur la face 2 est égale à 20.00 °C, ce qui valide l'hypothèse milieu semi-infini.

La température (en °C) sur la face 1 est égale à :

Temps (s)	Référence	RDM – Éléments finis
1	24.06	24.40
2	25.73	25.51
4	28.07	27.98
6	29.85	29.79
10	32.66	32.61
20	37.75	37.71
30	41.60	41.57
40	44.80	44.77
50	47.60	47.57
60	50.10	50.08
120	61.70	61.68

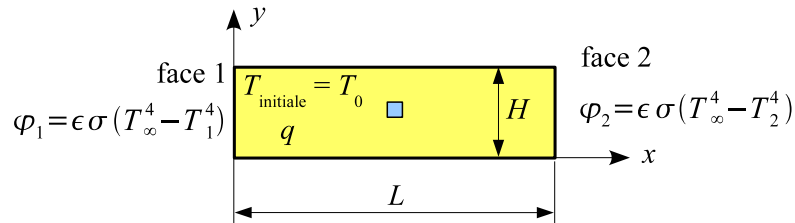
La température (en °C) à  $x = 50$  mm est égale à :

Temps (s)	Référence	RDM – Éléments finis
6	20.00	20.00
10	20.01	20.02
20	20.30	20.31
30	20.98	20.99
40	21.93	21.94
50	23.04	23.04
60	24.22	24.22
120	31.59	31.58

#### 4.2.5 TT\_NL\_1 : Radiation et source de chaleur volumique

**Référence** : solution analytique (hypothèse isotherme).

**Données** :



**Géométrie** : rectangle

Longueur :  $L = 20$  mm

Hauteur :  $H = 2$  mm

Épaisseur :  $t = 1$  mm

**Matériau** :

Conductivité :  $\lambda = 800$  W/(m.K)

Masse volumique :  $\rho = 8000$  kg/m<sup>3</sup>

Capacité thermique massique :  $c_P = 450$  J/(kg.K)

**Condition initiale** :

La température est uniforme dans la structure et égale à :  $T_0 = 20$  °C

*Remarque* : il suffit d'imposer cette température en un point

**Conditions aux limites** :

Rayonnement sur les faces 1 et 2 : émissivité :  $\varepsilon = 0.8$  , température extérieure  $T_\infty = 500$  °C

Source de chaleur volumique :  $q = 400000$  W/m<sup>3</sup> dans toute la structure

**Modélisation** :

Ajouter un point à mailler à au centre du rectangle

Mailler la structure en  $\sim 300$  triangles à 6 nœuds

Durée du chargement = 33 min 20 s (2000 s)

Nombre de pas de temps = 100

$\alpha = 0.667$

**Résultats :**

La température  $T(t)$  supposée constante dans toute la structure est solution de l'équation :

$$\rho L c_P \frac{dT}{dt} = q L + 2 \varepsilon \sigma (T_\infty^4 - T^4)$$

avec :  $T(0) = T_0$  .

Cette équation est résolue numériquement : entre les instants  $t_s$  et  $t_{s+1}$ , on est amené à résoudre le problème non linéaire :

$$C \frac{\Delta T}{\Delta t} = F(\Delta T)$$

avec :

$$C = \rho L c_P \quad , \quad F = q L + 2 \varepsilon \sigma (T_\infty^4 - T^4)$$

$$\Delta t = t_{s+1} - t_s, \quad \Delta T = T_{s+1} - T_s \quad , \quad T = T_s + \alpha \Delta T$$

Ce problème est résolu de manière itérative par la méthode de substitution :

$$C \Delta T_i = \Delta t F(\Delta T_{i-1})$$

avec les paramètres suivants : pas de temps = 1 s ,  $\alpha = 0.667$ .

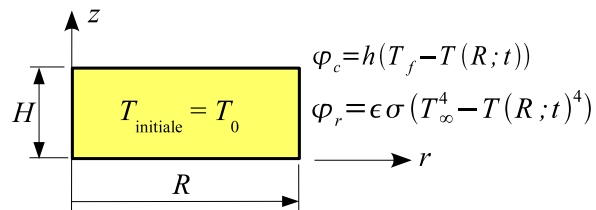
La température (en °C) dans la structure est égale à :

Temps (s)	Référence	RDM – Éléments finis (faces 1 et 2)	RDM – Éléments finis (centre)
20	31.03	31.12	30.97
40	42.02	42.06	41.98
100	74.78	74.82	74.72
200	128.40	128.39	128.29
500	276.19	275.93	275.86
1000	445.23	444.60	444.58
1500	515.20	514.72	514.73
2000	536.29	536.07	536.09
10000	543.83		

#### 4.2.6 TT\_NL\_2 : Convection et radiation

**Référence :** *solution analytique (hypothèse isotherme).*

**Données :**



**Géométrie :** cylindre plein d'axe  $z$  :

Longueur :  $R = 10$  mm

Hauteur :  $H = 1$  mm

**Matériau :**

Conductivité :  $\lambda = 800$  W/(m.K)

Masse volumique :  $\rho = 8000$  kg/m<sup>3</sup>

Capacité thermique massique :  $c_P = 400$  J/(kg.K)

**Condition initiale :**

La température est uniforme dans la structure et égale à :  $T_0 = 20^\circ\text{C}$

*Remarque :* il suffit d'imposer cette température en un point

**Conditions aux limites :**

Rayonnement sur la face extérieure :

émissivité :  $\epsilon = 0.8$ , température extérieure  $T_\infty = 500^\circ\text{C}$

Convection sur la face extérieure :

coefficient  $h = 100$  W/(m<sup>2</sup>.K), température du fluide  $T_f = 60^\circ\text{C}$

**Modélisation :**

Mailler la structure en  $\sim 300$  triangles à 6 nœuds

Durée du chargement = 1000 s

Nombre de pas de temps = 100

$\alpha = 0.667$

**Résultats :**

La température  $T(t)$  supposée constante dans toute la structure est solution de l'équation :

$$\rho R c_P \frac{dT}{dt} = 2h(T_f - T) + 2\varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)$$

avec :  $T(0) = T_0$  .

Cette équation est résolue numériquement : entre les instants  $t_s$  et  $t_{s+1}$ , on est amené à résoudre le problème non linéaire :

$$C \frac{\Delta T}{\Delta t} = F(\Delta T)$$

avec :

$$C = \rho R c_P \quad , \quad F = 2h(T_f - T) + 2\varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)$$

$$\Delta t = t_{s+1} - t_s \quad , \quad \Delta T = T_{s+1} - T_s \quad , \quad T = T_s + \alpha \Delta T$$

Ce problème est résolu de manière itérative par la méthode de substitution :  $C \Delta T_i = \Delta t F(\Delta T_{i-1})$  avec les paramètres suivants : pas de temps = 1 s ,  $\alpha = 0.667$ .

La température (en °C) dans la structure est égale à :

Temps (s)	Référence	RDM – Éléments finis (face E)	RDM – Éléments finis (centre)
20	43.26	43.08	43.00
50	72.85	72.46	72.37
100	110.65	110.05	109.98
200	156.31	155.68	155.65
300	178.72	178.25	178.23
400	189.54	189.23	189.23
500	194.73	194.54	194.54
700	198.38	198.32	198.32
1000	199.34	199.33	199.33
10000	199.45		